EE728 (22A004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας Λυμένες ασκήσεις (Εκφωνήσεις και Λύσεις)

1. ▶ **Συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών – Cover & Thomas 2.2 (παραλλαγή)**

(α) Έστω $y = g(x)$, $g(\cdot)$ αιτιοκρατική (deterministic) συνάρτηση και X μια (διακριτή) τυχαία μεταβλητή. Μπορεί να ειπωθεί κάτι για τη σχέση μεταξύ της εντροπίας της $Y = g(X)$ και της εντροπίας της X; Εαν ναι, τι;

Απάντηση:

Από τον ορισμό της εντροπίας, $H(Y) = -\sum_{i=1}^{|\mathcal{Y}|} p(y_i) \log p(y_i)$. Εάν η συνάρτηση $g(X)$ είναι 1-προς-1, σε κάθε x_i αντιστοιχεί ένα y_i και ισχύει $p(x_i) = p(y_i)$ και $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}|$. Επομένως,

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{|\mathcal{Y}|} p(y_i) \log p(y_i) = -\sum_{i=1}^{|\mathcal{X}|} p(x_i) \log p(x_i) = H(X).$$

Εάν η συνάρτηση $g(\cdot)$ δεν είναι 1-προς-1, υπάρχει τουλάχιστον ένα y_i στο οποίο αντιστοιχούν περισσότερα από ένα $x_{j,i}$ και $p(y_i) = \sum_j p(x_{j,i})$. Άρα, $p(y_i) \geq p(x_{j,i})$ για κάθε j, και, δεδομένου ότι η συνάρτηση λογαρίθμου είναι αύξουσα, $\log p(y_i) \geq \log p(x_{j,i})$ για κάθε j. Επομένως,

$$\begin{aligned}\sum_{x_j : y_i = g(x_j)} p(x_j) \log p(x_j) &\leq \sum_{x_j : y_i = g(x_j)} p(x_j) \log p(y_i) \\ &= \log p(y_i) \sum_{x_j : y_i = g(x_j)} p(x_j) = p(y_i) \log p(y_i).\end{aligned}$$

Εναλλακτικά, δεδομένου ότι οι $p(x_{j,i})/p(y_i)$ για δεδομένο j αποτελούν κατανομή ($\frac{p(x_{j,i})}{p(y_i)} \geq 0$ και $\sum \frac{p(x_{j,i})}{p(y_i)} = 1$), από την ανισότητα Jensen,

$$\begin{aligned}\sum_{x_j : y_i = g(x_j)} \frac{p(x_j)}{p(y_i)} \log p(x_j) &\leq \log \left(\sum_{x_j : y_i = g(x_j)} \frac{p(x_j)}{p(y_i)} p(x_j) \right) \\ &\overset{(i)}{\leq} \log \left(\sum_{x_j : y_i = g(x_j)} p(x_j) \right) = \log p(y_i) \\ \Rightarrow \sum_{x_j : y_i = g(x_j)} p(x_j) \log p(x_j) &\leq p(y_i) \log p(y_i).\end{aligned}$$

(i) $\frac{p(x_{j,i})}{p(y_i)} \leq 1$.
Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_x p(x)\log p(x) \\ &= -\sum_y \sum_{x:y=g(x)} p(x)\log p(x) \\ &\geq -\sum_y p(y)\log p(y) = H(Y). \end{aligned}$$

Άρα, στη γενική περίπτωση, $H(Y) \leq H(X)$. Το αποτέλεσμα είναι διαισθητικά λογικό. Εάν μια συνάρτηση δεν είναι 1-προς-1, μέρος της πληροφορίας χάνεται κατά την απεικόνιση από τη X στην Y.

Ακόμα πιο απλά, μπορούμε να γράψουμε την $H(X, g(X))$ με δύο τρόπους:

$$H(X, g(X)) = H(X) + H(g(X)|X) = H(g(X)) + H(X|g(X)).$$

Αλλά $H(g(X)|X) = 0$, επειδή η $g(x)$ είναι ντετερμινιστική και $H(X|g(X)) \geq 0$.
Συνεπώς, $H(X) \geq H(Y) = H(g(X))$.
Όταν η $g(X)$ είναι 1-προς-1 ισχύει, επίσης, $H(X|g(X)) = 0$, οπότε $H(X) = H(Y)$.

(β) Βρείτε τη σχέση μεταξύ $H(X)$ και $H(Y)$ για τις συναρτήσεις $y = x^3$ και $y = \lfloor x/2 \rfloor$, x ακέραιος.

Απάντηση:

Η $g(x) = x^3$ είναι 1-προς-1. Επομένως, $H(Y) = H(X)$. Η $g(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ δεν είναι 1-προς-1, στη γενική περίπτωση. Ωστόσο, μπορεί να είναι 1-προς-1 για ορισμένα αλφάβητα. Για παράδειγμα, εάν $X \in \{2, 4, 6\}$, η $\lfloor x/2 \rfloor$ είναι 1-προς-1. Συνεπώς, στη γενική περίπτωση, $H(Y) \leq H(X)$.

2. ▶ **Εντροπία αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών – Cover & Thomas 2.14**

(α) Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές και $Z = X + Y$. Να αποδειχτεί ότι $H(Z|X) = H(Y|X)$.

Απάντηση:

Από τον ορισμό της Δεσμευμένης Εντροπίας,

$$\begin{aligned} H(Z|X) &= \sum_x p(x)H(Z|X=x) \\ &= \sum_x p(x)\sum_z p(Z=z|X=x)\log p(Z=z|X=x). \end{aligned}$$

Εάν γνωρίζουμε ότι $X = x$, $Z = Y + x$. Επομένως, $p_{Z|X}(Z = z|X = x) = p_{Y|X}(Y + x = z|X = x) = p_{Y|X}(Y = z - x|X = x)$. Άρα,

$$\begin{aligned} H(Z|X) &= \sum_x p(x) \sum_z p(Z = z|X = x) \log p(Z = z|X = x) \\ &\overset{(*)}{=} \sum_x p(x) \sum_{y \triangleq z - x} p(Y = z - x|X = x) \log p(Y = z - x|X = x) \\ &= \sum_x p(x) H(Y|X = x) = H(Y|X), \end{aligned}$$

όπου στο $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την παρατήρηση ότι, εάν θεωρήσουμε όλες τις πιθανές τιμές της Z για δεδομένη $X = x$, τότε θεωρούμε, ισοδύναμα, όλες τις πιθανές τιμές της Y για $X = x$.

Έχοντας δείξει με βάση τον ορισμό ότι $H(Z|X) = H(Y|X)$, στο μέλλον μπορούμε να γράφουμε σύντομα $H(Z|X) = H(Y + X|X) = H(Y|X)$.

Παρατηρήστε, τέλος, ότι το αποτέλεσμα ισχύει ανεξαρτήτως της ανεξαρτησίας (ή μη) των X και Y.

(β*) Εάν οι X και Y είναι *ανεξάρτητες*, να αποδειχτεί ότι $H(Y) \leq H(Z)$ και $H(X) \leq H(Z)$. Επομένως, όταν σε μια τ.μ. προστίθεται μια ανεξάρτητή της τ.μ., η αβεβαιότητα αυξάνεται.

Απάντηση:

Εάν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, $H(Y|X) = H(Y)$. Γνωρίζουμε ότι, για οποιεσδήποτε X και Y, $I(X;Y) \geq 0$. Επομένως, $I(Z;X) = H(Z) - H(Z|X) \geq 0 \Rightarrow H(Z) \geq H(Z|X) \overset{(a)}{=} H(Y|X) = H(Y) \Rightarrow H(Z) \geq H(Y)$. Με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύεται ότι $H(Z) \geq H(X)$.

Το αποτέλεσμα είναι διαισθητικά λογικό. Δεδομένου ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες, η Z περιέχει περισσότερη πληροφορία από την καθεμία από τις X και Y.

Προσοχή: Δεν ισχύει, κατ' ανάγκη, $H(Z) = H(X) + H(Y)$ (ισχύει, όμως, $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$, δεδομένου ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες). Ένας τρόπος να το αποδείξουμε είναι με χρήση του αποτελέσματος της 1ης άσκησης, θεωρώντας τη ντετερμινιστική συνάρτηση $g(X, Y) = X + Y$. Η $g(X, Y)$ είναι, στη γενική περίπτωση, μη αντιστρέψιμη. Επομένως, όπως δείξαμε στην Άσκηση 1, $H(Z) = H(g(X, Y)) \leq H(X, Y) = H(X) + H(Y)$. Διαισθητικά, εάν μας "αποκαλυφθεί" η Z δε μας αποκαλύπτονται, στη γενική περίπτωση, οι ακριβείς τιμές των X και Y. Υπάρχουν, όμως, περιπτώσεις, όπου η $X + Y$ είναι αντιστρέψιμη και $H(Z) = H(X) + H(Y)$ (βρείτε ένα παράδειγμα ως άσκηση).

(γ*) Δώστε ένα παράδειγμα (μη ανεξάρτητων) τ.μ. X και Y για τις οποίες $H(Y) \geq H(Z)$ και $H(X) \geq H(Z)$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Έστω ότι

$$X = -Y = \begin{cases} +1 & \text{με πιθανότητα} \quad 1/2 \\ -1 & \text{με πιθανότητα} \quad 1/2 \end{cases}$$

$H(X) = H(Y) = H(1/2) = 1$. Ωστόσο, $Z = X + Y = -Y + Y = 0$ και, επομένως, $H(Z) = 0$.

3. **Σχετική Εντροπία – Cover & Thomas 2.37**

Έστω 3 τ.μ. X, Y, Z με από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(x, y, z)$. Η σχετική εντροπία μεταξύ της από κοινού κατανομής και του γινομένου των περιθώριων κατανομών ορίζεται ως

$$D(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z)) = \mathbb{E}\left[\log \frac{p(x, y, z)}{p(x)p(y)p(z)}\right].$$

(α) Εκφράστε την $D(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z))$ συναρτήσει εντροπιών.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

$$\begin{aligned}
&D(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z)) \\
&= \mathbb{E}_{p_{XYZ}}\left[\log \frac{p(x, y, z)}{p(x)p(y)p(z)}\right] \\
&= \mathbb{E}_{p_{XYZ}}\left[\log \frac{1}{p(x)p(y)p(z)}\right] - \mathbb{E}_{p_{XYZ}}\left[\log \frac{1}{p(x, y, z)}\right] \\
&= \mathbb{E}_{p_{XYZ}}\left[\log \frac{1}{p(x)}\right] + \mathbb{E}_{p_{XYZ}}\left[\log \frac{1}{p(y)}\right] + \mathbb{E}_{p_{XYZ}}\left[\log \frac{1}{p(z)}\right] - \mathbb{E}_{p_{XYZ}}\left[\log \frac{1}{p(x, y, z)}\right] \\
&= H(X) + H(Y) + H(Z) - H(X, Y, Z).
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι, δεδομένου ότι $H(X_1, \ldots, X_N) \leq \sum_n H(X_n)$, $D(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z)) \geq 0$, όπως έχουμε αποδείξει για οποιαδήποτε $D(||)$.

(β) Πότε η $D(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z))$ ισούται με 0;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Η $D(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z))$ ισούται με 0 όταν $H(X, Y, Z) = H(X) + H(Y) + H(Z)$, δηλαδή εάν και μόνο εάν οι X, Y και Z είναι ανεξάρτητες.

4. **Κέρμα και ζάρι – Cover & Thomas 2.43**

(α) Θεωρήστε το αποτέλεσμα της ρίψης *αμερόληπτου* κέρματος. Με τι ισούται η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της επάνω και κάτω πλευράς του κέρματος; Συμφωνεί το αποτέλεσμα με αυτό που περιμένατε διαισθητικά;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Έστω ότι αντιστοιχίζουμε την κορώνα στο 1 και τα γράμματα στο -1. Εάν X είναι η τιμή της επάνω πλευράς του κέρματος και Y η τιμή της κάτω πλευράς, $Y = -X$. Επομένως, $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) - H(X|-X) = H(X) = H(1/2) = 1$ bit.

Το αποτέλεσμα συμφωνεί με αυτό που περιμέναμε διαισθητικά: Εάν γνωρίζουμε την επάνω πλευρά του κέρματος, γνωρίζουμε επακριβώς και την κάτω. Επομένως, η "αποκάλυψη" της επάνω πλευράς μας παρέχει όλη την πληροφορία σχετικά με την κάτω πλευρά.

(β) Αλλάζει η απάντησή σας εάν το κέρμα είναι μεροληπτικό;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Όχι, εκτός από το ότι $I(X;Y) = H(X) = H(p)$. Το ζητούμενο εδώ δεν είναι η πληροφορία που φέρνει η ρίψη του κέρματος, αλλά η πληροφορία που μας δίνει η μια όψη του κέρματος για την άλλη. Εάν ρίξουμε το κέρμα και δούμε την επάνω του όψη, τότε γνωρίζουμε με ακρίβεια την κάτω ακόμα και όταν το κέρμα είναι μεροληπτικό. Η μόνη περίπτωση να αλλάξει η αμοιβαία πληροφορία είναι με κάποια πιθανότητα το κέρμα να είναι ελαττωματικό και να έχει κορώνα (ή γράμματα) και στις δύο του πλευρές.

(γ) Θεωρήστε τη ρίψη αμερόληπτου ζαριού με 6 πλευρές. Ποια είναι η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της επάνω και της μπροστινής πλευράς; Υπενθυμίζεται ότι σε ένα ζάρι το άθροισμα των αντίθετων πλευρών ισούται με 7.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Έστω X η μπροστινή πλευρά και Y η επάνω πλευρά. $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$. Όταν μας αποκαλύπτεται η μπροστινή πλευρά μαθαίνουμε μόνο την πίσω πλευρά. Επομένως, υπάρχουν 4 εξίσου πιθανά ενδεχόμενα για την επάνω πλευρά. Άρα, $I(X;Y) = \log 6 - \log 4 = \log 3 - 1$ bits.

Ωστόσο, αν θέλουμε να είμαστε ακόμα πιο σχολαστικοί, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να εκμεταλλευτούμε ακόμα και τον τρόπο με τον οποίο απεικονίζονται οι αριθμοί στο ζάρι. Συγκεκριμένα, το 2, το 3 και το 6 είναι τυπωμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε να αποκλείσουμε 2 από τις 4 πλευρές. Επομένως,

$$H(X|Y) = \frac{1}{2}H(X|Y \in \{2,3,6\}) + \frac{1}{2}H(X|Y \in \{1,4,5\}) = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}1 = \frac{3}{2},$$

και $I(X;Y) = \log 6 - \frac{3}{2} = 1 + \log 3 - \frac{3}{2} = \log 3 - \frac{1}{2}$ bits.

5. **Μήκος Ακολουθίας – Cover & Thomas 2.48**

Θεωρούμε τυχαία διαδικασία Bernoulli$\left(\frac{1}{2}\right)$ $\{X_i\}$. Σταματάμε τη διαδικασία όταν εμφανίζεται το πρώτο "1". Έστω N το μήκος της ακολουθίας όταν σταματάμε. Επομένως, η ακολουθία X^N είναι ένα στοιχείο του συνόλου όλων των δυαδικών ακολουθιών πεπερασμένου μήκους: $\{0,1\}^* = \{0,1,00,01,10,11,000,\ldots\}$.

(α) Βρείτε την $I(N;X^N)$.

(β) Βρείτε την $H(X^N|N)$.

(γ) Βρείτε την $H(X^N)$.

(δ) Βρείτε την $H(N|X^N)$.

(ε) Βρείτε την $H(N)$.

Υπόδειξη: Ενδέχεται να σας φανεί χρήσιμη η Άσκηση 2.1 του Cover.

Απάντηση:

Η κατανομή που ακολουθεί ο αριθμός προσπαθειών είναι η Γεωμετρική. Γενικά, η γεωμετρική κατανομή ορίζεται ως ο αριθμός πειραμάτων Bernoulli έως ότου εμφανιστεί το πρώτο "1" (ή, εναλλακτικά, ως ο αριθμός των αποτυχιών έως ότου εμφανιστεί το "1" – και στις δύο περιπτώσεις η εντροπία είναι η ίδια, όχι, όμως, η μέση τιμή).

$I(N;X^N) = H(N) - H(N|X^N)$. Δεδομένου ότι υπάρχει μόνο μια ακολουθία μήκους N (με $N-1$ "0" και ένα "1" στο τέλος), $H(N|X^N) = 0$. Από τον ορισμό της εντροπίας, εάν $p = \Pr X = 1$,

$$\begin{aligned}
H(N) &= -\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p\log(1-p)^{n-1}p \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p\log(1-p)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p\log p \\
&= -p\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{n}\log(1-p)^{n} - p\log p\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{n} \\
&= -p\log(1-p)\sum_{n=0}^{\infty}n(1-p)^{n} - p\log p\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{n} \\
&\overset{(a)}{=} -p\log(1-p)\frac{1-p}{p^2} - p\log p\frac{1}{p} \\
&= -\frac{(1-p)\log(1-p) - p\log p}{p} = H(p)/p.
\end{aligned}$$

Στο (α) χρησιμοποιήσαμε τους τύπους της Άσκησης 2.1 των Cover & Thomas.

Θέτοντας $p = 2$, $H(N) = 2$ bits. Συνεπώς, $I(N;X^N) = 2$ bits.

$H(X^N|N) = 0$ δεδομένου ότι υπάρχει μόνο μια επιτρεπτή ακολουθία μήκους N. Τέλος, $H(X^N) = H(N)$ γιατί η κατανομή της X^N είναι ίδια με της N (σε κάθε N αντιστοιχεί μόνο μια ακολουθία X^N).

Αλλάζουμε, τώρα, τον τρόπο με τον οποίο σταματάμε την παραγωγή της ακολουθίας. Θεωρήστε και πάλι ότι X_i ∼Bernoulli$\left(\frac{1}{2}\right)$. Με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ σταματάμε όταν $N = 6$, αλλιώς σταματάμε όταν $N = 12$. Επίσης, θεωρούμε ότι η επιλογή της τιμής του N είναι *ανεξάρτητη* της ακολουθίας $X_1X_2\dots X_{12}$.

(στ) Βρείτε την $I(N; X^N)$.

(ζ) Βρείτε την $H(X^N|N)$.

(η) Βρείτε την $H(X^N)$.

(θ) Βρείτε την $H(N|X^N)$.

(ι) Βρείτε την $H(N)$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

$I(N; X^N) = H(N) - H(N|X^N)$. Αν γνωρίζουμε τη X^N γνωρίζουμε και το μήκος της, οπότε $H(N|X^N) = 0$. $H(N) = H(1/3) \approx 0.918$ bits. Επομένως, $I(N; X^N) \approx 0.918$ bits.

$$\begin{aligned} H(X^N|N) &= \Pr\{N = 6\}H(X^N|N = 6) + \Pr\{N = 12\}H(X^N|N = 12) \\ &= \frac{1}{3}H(X^6) + \frac{2}{3}H(X^{12}) \\ &\overset{(b)}{=} \frac{1}{3}6H(X) + \frac{2}{3}12H(X) \\ &= 10 \text{ bits.} \end{aligned}$$

(b) Οι X_i είναι i.i.d.

$H(X^N) = I(X^N; N) + H(X^N|N) \approx 10.918$ bits. Εναλλακτικά, από την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας,

$$H(X^N) = H(X^N) + H(N|X^N) = H(X^N, N) = H(N) + H(X^N|N) = 10.918 \text{ bits.}$$

Τέλος, η $H(X^N)$ μπορεί να βρεθεί θεωρώντας όλες τις επιτρεπτές ακολουθίες. Υπάρχουν 2^6 ακολουθίες μήκους 6, η κάθε μία με πιθανότητα εμφάνισης $\frac{1}{3}2^{-6}$ και 2^{12} ακολουθίες μήκους 12, η κάθε μία με πιθανότητα εμφάνισης $\frac{2}{3}2^{-12}$.

6. **Οι αναδιατάξεις αυξάνουν την εντροπία – Cover & Thomas 4.3**

Υποθέστε ότι το τυχαίο διάνυσμα X δηλώνει τη θέση στην οποία βρίσκονται κάποια αντικείμενα πάνω σε μια ευθεία γραμμή. Έστω ο πίνακας T ο οποίος αναδιατάσσει τα αντικείμενα. Για παράδειγμα, εάν τα αντικείμενα είναι 3, το αντικείμενο 1 βρίσκεται στη θέση 2, το αντικείμενο 2 στη θέση 3 και το αντικείμενο 3 στη θέση 1, $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Πολλαπλασιασμός (από αριστερά) του X με τον πίνακα $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ αναδιατάσσει τα αντικείμενα στις θέσεις 3, 2 και 1, αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι ο πίνακας αναδιάταξης δεν εξαρτάται από το διάνυσμα X. Δικαιολογήστε τα βήματα της παρακάτω απόδειξης

$$H(TX) \overset{(a)}{\geq} H(TX|T) \overset{(b)}{=} H(T^{-1}TX|T) = H(X|T) \overset{(c)}{=} H(X).$$

Υπόδειξη: Το βήμα (b) σχετίζεται με την Άσκηση 2.2 των Cover & Thomas.

Απάντηση:

(a) Για οποιεσδήποτε τ.μ. (ή ακολουθίες τ.μ.), γνωρίζουμε ότι $H(Y) \geq H(Y|X)$.

(b) Δεδομένου ότι ο T είναι *αντιστρέψιμος*, η απεικόνιση $Y \to T^{-1}Y$ είναι 1-προς-1. Επομένως, $H(T^{-1}Y) = H(Y)$. Αντικαθιστώντας την Y με TX προκύπτει το αποτέλεσμα.

(c) Το τυχαίο διάνυσμα X δεν εξαρτάται από τον πίνακα T.

7. **Εντροπία και Αμοιβαία Πληροφορία (Πρόοδος Θ. Π., Νοέμβριος 2007)**

Έστω οι *ανεξάρτητες* τ.μ. X και Y. Η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με τιμές $\{-1, 1\}$ (δηλαδή $X = 1$ ή $X = -1$ με την ίδια πιθανότητα), ενώ η Y ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με *γνωστές* τιμές $\{-a, a\}$, $a \in \mathbb{R}$ (δηλαδή $Y = a$ ή $Y = -a$ με την ίδια πιθανότητα). Η τ.μ. Z δίνεται από τη σχέση $Z = X + Y$. Για όλες τις πιθανές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ να βρεθούν

(α) Η $H(Y)$.

Απάντηση:

Εάν $a \neq 0$, $H(Y) = \log 2 = 1$ bit (δεδομένου ότι η κατανομή της είναι ομοιόμορφη), αλλιώς, εάν $a = 0$, $H(Y) = 0$ bits.

(β) Η $H(Z)$.

Απάντηση:

• Εάν $a = 0$, $Z = X$. Επομένως, $H(Z) = H(X) = 1$ bit.

• Εάν $a = \pm 1$, η κατανομή της Z είναι $(-2, 0, 2)$ με πιθανότητες $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, αντίστοιχα. Επομένως, $H(Z) = 2 \times \frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{2} \log 2 = 1.5$ bits.

• Για όλα τα άλλα a, η Z ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{1+a, 1-a, -1+a, -1-a\}$. Συνεπώς, $H(Z) = \log 4 = 2$ bits.

(γ) Η $I(X; Z)$.

Απάντηση:

$I(X; Z) = H(Z) - H(Z|X)$.

• Εάν $a = 0$, $Z = X$. Επομένως, $H(Z|X) = H(X|X) = 0$ και $I(X; Z) = H(Z) = 1$ bit.

• Εάν $a = \pm 1$: Εάν γνωρίζουμε τη X η Z μπορεί να πάρει 2 τιμές με την ίδια πιθανότητα. Επομένως, $H(Z|X) = 1$ bit και $I(X; Z) = 1.5 - 1 = 0.5$ bits.

• Για όλα τα άλλα a, εάν γνωρίζουμε τη X η Z μπορεί να πάρει 2 τιμές με την ίδια πιθανότητα. Επομένως, $H(Z|X) = 1$ bit και $I(X; Z) = 2 - 1 = 1$ bit.

Εναλλακτικά, $I(X; Z) = H(X) - H(X|Z)$. Εάν γνωρίζουμε τη Z, τότε μπορούμε να βρούμε και τη X εκτός από την περίπτωση όπου $a = \pm 1$. Συνεπώς, για $a \neq \pm 1$, $H(X|Z) = 0$ και $I(X; Z) = H(X) = 1$ bit.

Εάν $a = \pm 1$ και $Z = 2$ ή -2, τότε και πάλι μπορούμε να βρούμε τη X με βεβαιότητα και, επομένως, $H(X|Z = \pm 2) = 0$. Εάν $Z = 0$ τότε $X = -1$ ή 1 με την ίδια πιθανότητα. Άρα, $H(X|Z = 0) = 1$ bit. Επομένως, $H(X|Z) = \Pr\{Z = \pm 2\}H(X|Z = \pm 2) + \Pr\{Z = 0\}H(X|Z = 0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5$ bits, και $I(X; Z) = H(X) - H(X|Z) = 1 - 0.5 = 0.5$ bits.

Παρατηρήσεις:

Ο βασικός σκοπός της άσκησης ήταν να παρατηρήσετε ότι εάν το a ισούται με ± 1 η Z παίρνει 3 αντί για 4 διακριτές τιμές, με αποτέλεσμα η εντροπία της να μην ισούται με το άνω φράγμα (2 bits).

Ένα λάθος που έκαναν αρκετοί ήταν να προσθέσουν την εντροπία της X και της Y για να βρουν την εντροπία της Z. Στο μάθημα δείξαμε ότι, εάν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ (η από κοινού εντροπία) και όχι, κατ' ανάγκη, $H(X+Y) = H(X)+H(Y)$ (βλ. Άσκηση 2.14 των Cover & Thomas). Συνεπώς, ενώ $H(X, Y) = H(X)+H(Y)$ ανεξαρτήτως του a, η ισότητα $H(X+Y) = H(X)+H(Y)$ ισχύει μόνο όταν η $g(X, Y) = X+Y$ είναι 1-προς-1 συνάρτηση της (X, Y), δηλαδή όταν σε κάθε τιμή $X + Y$ αντιστοιχεί μοναδικό ζεύγος (X, Y). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η $X + Y$ είναι 1-προς-1 μόνο όταν $a \neq \pm 1$. Εάν $a = \pm 1$, τα ζεύγη $(X, Y) = (+1, -1)$ και $(X, Y) = (-1, +1)$ απεικονίζονται στην ίδια τιμή $X + Y = 0$, με αποτέλεσμα η απεικόνιση να μην είναι 1-προς-1.

8. **Εντροπία, Αμοιβαία Πληροφορία και συμπίεση (Τελικό διαγώνισμα Θ. Π., Φεβρουάριος 2008)**

   Έστω οι *ανεξάρτητες* τ.μ. X και Y, η καθεμία με ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$. Η τ.μ. Z δίνεται από τη σχέση $Z = X \cdot Y$ (γινόμενο). Να βρεθούν

   (α) Η $H(X)$.

   Απάντηση:

   Δεδομένου ότι η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με 4 τιμές, $H(X) = \log 4 = 2$ bits.

   (β) Η $H(Z)$. $\log_2 7 \approx 2.8074$.

   Απάντηση:

   Η Z ισούται με 0 όταν $(X, Y) = (0, *)$ ή όταν $(X, Y) = (*, 0)$ (συνολικά 7 από 16 ισοπίθανα ενδεχόμενα). Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή της Z: $Z = (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9)$ με πιθανότητα $\left(\frac{7}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$. $H(Z) = \sum p_i \log \frac{1}{p_i} \approx 2.397$ bits.

   (γ) Η $I(X; Z)$.

   Απάντηση:

   $I(X; Z) = H(Z) - H(Z|X)$. Εάν $X = 0$, τότε και $Z = 0$. Επομένως, $H(Z|0) = 0$. Εάν $X = 1, 2$ ή 3 μπορούμε να γράψουμε $p(Z|X \neq 0) = p(X \cdot Y|X \neq 0) =$

$p(Y|X \neq 0) = p(Y)$. Συνεπώς για $X \neq 0$, $H(Z|X) = H(Y) = 2$ bits. Άρα, $H(Z|X) = \frac{1}{4}\left(H(Z|0) + 3H(Z|X \neq 0)\right) = 1.5$ bits και $I(X;Z) \approx 2.397 - 1.5 = 0.897$ bits.

(δ) Κατασκευάστε ένα <u>δυαδικό</u> κώδικα Huffman για την τ.μ. Z. Συγκρίνετε το μέσο μήκος κώδικα με την εντροπία της Z και σχολιάστε.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Ακολουθούμε την τυπική διαδικασία για να κατασκευάσουμε ένα κώδικα Huffman. Σημειώνεται ότι υπάρχουν περισσότεροι από ένας κώδικες Huffman (όλοι, όμως, με το ίδιο μέσο μήκος).

$$
\begin{array}{llllll}
0 & \frac{7}{16} & \frac{7}{16} & \frac{7}{16} & \frac{7}{16} & \boxed{1} \\
2 & \frac{1}{8} & \boxed{\frac{1}{4}} & \frac{1}{4} & \boxed{\frac{9}{16}} & \\
3 & \frac{1}{8} & \boxed{\frac{3}{16}} & \boxed{\frac{5}{16}} & & \\
6 & \frac{1}{8} & \boxed{\frac{1}{8}} & & & \\
1 & \frac{1}{16} & & & & \\
4 & \frac{1}{16} & & & & \\
9 & \frac{1}{16} & & & &
\end{array}
$$

Ο κώδικας που προκύπτει είναι ο

$$
\begin{array}{lcl}
0 & \longleftrightarrow & 0 \\
1 & \longleftrightarrow & 1101 \\
2 & \longleftrightarrow & 100 \\
3 & \longleftrightarrow & 101 \\
4 & \longleftrightarrow & 1110 \\
6 & \longleftrightarrow & 1100 \\
9 & \longleftrightarrow & 1111
\end{array}
$$

Το μέσο μήκος του κώδικα ισούται με $\mathbb{E}[l] = \frac{7}{16} \times 1 + 2 \times \frac{1}{8} \times 3 + \left(\frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16}\right) \times 4 \approx 2.4375$ bits. Παρατηρούμε ότι ο κώδικας Huffman επιτυγχάνει συμπίεση με απόσταση μόλις ~ 0.04 bits μακριά από την εντροπία.

$\boxed{\text{Παρατηρήσεις:}}$

Στην άσκηση αυτή οι επιδόσεις ήταν, γενικά, καλές. Στο Ερώτημα (γ), κάποιοι προτίμησαν να υπολογίσουν την $I(X;Z)$ με χρήση της $H(X) - H(X|Z)$. Η προσέγγιση αυτή, αν και σωστή, ήταν πιο χρονοβόρα. Επίσης, κάποιοι έκαναν λάθος στην εξής λεπτομέρεια: Εάν $Z = 0$, η X δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη. Από τα 16 ισοπίθανα ενδεχόμενα της μορφής (X,Y), 7 οδηγούν σε $Z = 0$. Από αυτά, τα 4 είναι της μορφής $(0,Y)$. Επομένως, είναι πιο πιθανό η έξοδος $Z = 0$ να οφείλεται σε $X = 0$, παρά σε $X = 1$, 2 ή 3. Μαθηματικά, $p(X|Z=0) = \frac{p(X,Z=0)}{p(Z=0)} = \frac{16}{7}p(X,Z=0) = \frac{16}{7}p(X)p(Z=0|X)$. Αντικαθιστώντας, $p(X|Z=0) = 4/7$ για $X=0$ και $1/7$ για τις άλλες τιμές του X. Επομένως, $H(X|Z=0) = 1.6645$ bits και όχι 2 bits.

Ένα άλλο λάθος που έκαναν κάποιοι ήταν να γράψουν το εξής: $H(Z|X) = H(X\cdot Y|X) = H(Y|X) = H(Y) = 2$ bits. Το λάθος εδώ είναι ότι, στην περίπτωση που $X=0$, η $X\cdot Y$ δεν είναι αντιστρέψιμη, επομένως, $Y \neq Z/X$.

9. **Σύντομες Ερωτήσεις (Τελικό Διαγώνισμα Θ. Π., Φεβρουάριος 2008)**

   (α) Αποδείξτε ότι $H(X,Y,Z) - H(X,Y) \leq H(X,Z) - H(X)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

   Απάντηση:

   Από τον κανόνα αλυσίδας για την εντροπία, $H(X,Y,Z) = H(X,Y) + H(Z|X,Y) \Rightarrow H(X,Y,Z) - H(X,Y) = H(Z|X,Y)$. Ομοίως, $H(X,Z) - H(X) = H(Z|X)$. Δεδομένου ότι (όπως έχουμε δείξει στο μάθημα) η υπό συνθήκη εντροπία δεν υπερβαίνει την εντροπία, $H(Z|X,Y) \leq H(Z|X) \Rightarrow H(X,Y,Z) - H(X,Y) \leq H(X,Z) - H(X)$. Η ισότητα ισχύει όταν $H(Z|X,Y) \leq H(Z|X)$, όταν, δηλαδή, οι Y και Z είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δεδομένης της X. Για όσους προτιμούν μεγαλύτερη μαθηματική αυστηρότητα, $H(Z|X) - H(Z|X,Y) = I(X;Y|Z) \geq 0$, με $=$ όταν $I(Y;Z|X) = 0$.

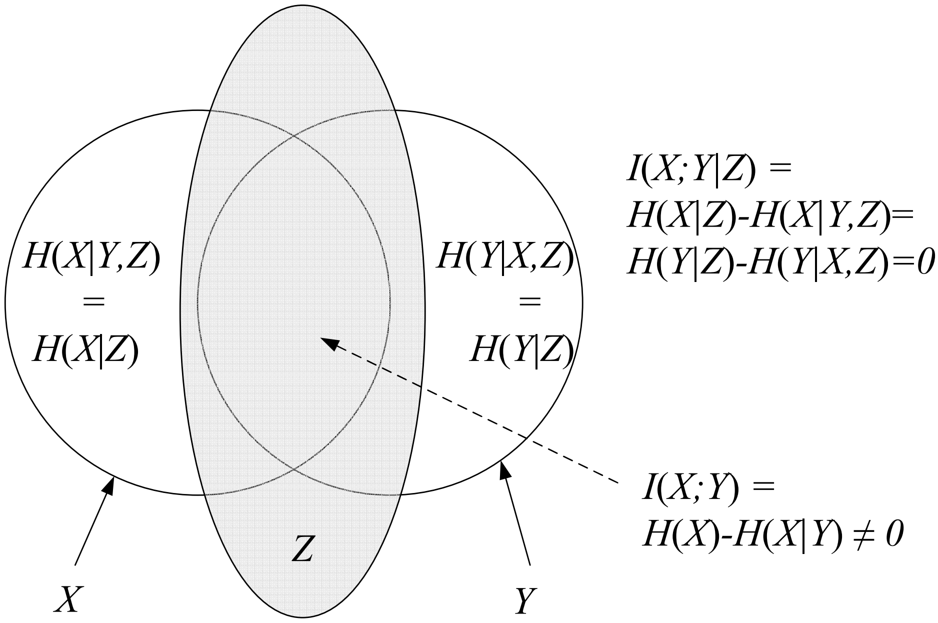
   (γ) Σωστό ή λάθος; $I(X;Y|Z) = 0 \Rightarrow I(X;Y) = 0$. Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα.

   Απάντηση:

   Λάθος. Υπό συνθήκη ανεξαρτησία δε συνεπάγεται και ανεξαρτησία. Έστω, για παράδειγμα, $Z = X$ και $Y = X + N$. $I(X;Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z) = H(X|X) - H(X|X, X+N) = 0$. Ωστόσο, $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) - H(X|X+N) = H(X) - H(N) \neq 0$, στη γενική περίπτωση. Εναλλακτικά, το αναληθές της πρότασης μπορεί να δειχτεί και με χρήση διαγραμμάτων Venn (βλ. Σχήμα 1).

Παρατηρήσεις:

Η άσκηση ήταν εσκεμμένα πιο δύσκολη. Στο Ερώτημα (α) πολλοί απάντησαν ότι η ισότητα ισχύει όταν οι Y και Z είναι ανεξάρτητες. Παρόλο που αυτό είναι σωστό, αποτελεί μερική περίπτωση της γενικότερης συνθήκης, η οποία είναι η υπό συνθήκη ανεξαρτησία των Y και Z δεδομένης της X. Το ίδιο λάθος έγινε από κάποιους και στο Ερώτημα (γ) οι οποίοι υπέθεσαν ότι υπό συνθήκη ανεξαρτησία συνεπάγεται και ανεξαρτησία, με αποτέλεσμα να απαντήσουν (λανθασμένα) ότι η σχέση είναι σωστή. Ένας συνάδελφός σας βασίστηκε στη σχέση $I(X;Y;Z) \geq 0$. Ωστόσο, η αμοιβαία πληροφορία 3 τ.μ. δεν είναι πάντοτε μη αρνητική (σε αντίθεση με την $I(X;Y)$). Το Ερώτημα (δ) δυσκόλεψε τους περισσότερους. Ένας λόγος πιθανώς ήταν ότι η εκφώνηση δεν ήταν πολύ σαφής: Θα ήταν σωστότερο να έλεγε: Επιτυγχάνεται συμπίεση αυθαίρετα κοντά στην εντροπία της πηγής. Κάποιοι προσπάθησαν να βρουν ποιες συνθήκες πρέπει



Σχήμα 1: Εναλλακτική απάντηση στο Ερώτημα (γ)

να ισχύουν για την εντροπία της πηγής ώστε το μέσο μήκος του κώδικα να ισούται ακριβώς με την εντροπία της πηγής. Σκοπός, όμως, της άσκησης, ήταν να επισημάνει ότι οι πολύ καλά συμπιεσμένες ακολουθίες χαρακτηρίζονται από τη μέγιστη τυχαιότητα, δεδομένου ότι δεν υπάρχει καθόλου πλεονασμός και ό,τι περιέχουν είναι πληροφορία.

10. **Εντροπία (Τελικό Διαγώνισμα Π. Θ. Θ. Π., Ιούνιος 2008)**

Θεωρούμε μια διακριτή τυχαία τ.μ. που παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων $\mathcal{X} = \{1, \ldots, |\mathcal{X}|\}$. Έστω ότι δίνεται η $p(1) = \Pr\{X = 1\}$ η οποία δεν είναι δυνατόν να μεταβληθεί.

(α) Ποιες είναι οι τιμές $p(i)$, $i = 2, \ldots, |\mathcal{X}|$, της κατανομής που μεγιστοποιεί την εντροπία $H(X)$ (για δεδομένη $p(1)$);

Απάντηση:

Από τον ορισμό της εντροπίας,

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{|\mathcal{X}|} p(i) \log p(i) = -p(1) \log p(1) - \sum_{i=2}^{|\mathcal{X}|} p(i) \log p(i).$$

Ο δεύτερος όρος μεγιστοποιείται επιλέγοντας ομοιόμορφη κατανομή $p(i) = (1 - p(1))/(|\mathcal{X}| - 1)$, $i = 2, \ldots, |\mathcal{X}|$.

(β) Με τι ισούται η μέγιστη $H(X)$ για δεδομένη $p(1)$; Δώστε μια ερμηνεία της έκφρασης για την $H(X)$ με χρήση την αρχή διαχωρισιμότητας.

Υπόδειξη: Χωρίστε το $\mathcal{X}$ σε δύο κατάλληλα υποσύνολα.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Αντικαθιστώντας,

$$\begin{aligned}
H(X) &= -p(1)\log p(1) - \sum_{i=2}^{|\mathcal{X}|} \frac{1-p(1)}{|\mathcal{X}|-1} \log \frac{1-p(1)}{|\mathcal{X}|-1} \\
&= -p(1)\log p(1) - (1-p(1)) \log \frac{1-p(1)}{|\mathcal{X}|-1} \\
&= -p(1)\log p(1) - (1-p(1))\log(1-p(1)) + (1-p(1))\log(|\mathcal{X}|-1) \\
&= H(p(1)) + (1-p(1))\log(|\mathcal{X}|-1).
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα θα μπορούσε να προκύψει και με χρήση του κανόνα αλυσίδας. Έστω η τ.μ. Z:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad X = 1 \\ 1 & \text{εάν} \quad X \neq 1. \end{cases}$$

Εάν χωρίσουμε το σύνολο $\mathcal{X}$ σε δύο υποσύνολα $\{1\}$ και $\{2, 3, \ldots, |\mathcal{X}|\}$, η Z περιγράφει σε ποιο σύνολο ανήκει η X. Θεωρούμε, δηλαδή, ότι, αντί να αποκαλύπτεται απευθείας η τιμή X, αποκαλύπτεται πρώτα το υποσύνολο Z στο οποίο ανήκει η X και, στη συνέχεια, η τιμή της. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
H(X) \overset{(i)}{=} H(X, Z) &\overset{(ii)}{=} H(Z) + H(X|Z) \\
&= H(p(1)) + p(1)H(X|Z=0) + (1-p(1))H(X|Z=1) \\
&\overset{(iii)}{=} H(p(1)) + (1-p(1))\log(|\mathcal{X}|-1).
\end{aligned}$$

(i) $H(X,Z) = H(X) + H(Z|X) = H(X)$, (ii) κανόνας αλυσίδας για την εντροπία, (iii) η εντροπία τ.μ. X δεδομένου ότι $Z = 1$ μεγιστοποιείται από την ομοιόμορφη κατανομή $p(x|Z=1) = 1/(\log|\mathcal{X}|-1)$.

(γ) Εάν ένας παίκτης Α μπορεί να μεταβάλλει την $p(1)$ με σκοπό να μειώνει την εντροπία $H(X)$ όσο περισσότερο μπορεί, ενώ ένας παίκτης Β μπορεί να μεταβάλλει οποιοδήποτε υποσύνολο των υπόλοιπων $p(i)$ (αλλά όχι την $p(1)$) με σκοπό να αυξάνει την εντροπία όσο μπορεί, ποια τιμή πρέπει να επιλέξει ο Α για την $p(1)$ αν παίζει πρώτος; Πώς πρέπει να απαντήσει ο Β; Αλλάζει η απάντησή σας εάν πρώτος παίζει ο Β; Θεωρούμε ότι οι παίκτες παίζουν έτσι ώστε να μην παραβιάζεται η συνθήκη $\sum_{i=1}^{|\mathcal{X}|} p(x_i) = 1$ για το $\mathbf{p}$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Όταν ο Α παίζει πρώτος, μπορεί να επιλέξει $p(1) = 1$. Επομένως, ο Β είναι αναγκασμένος να επιλέξει $p(i) = 0$, $i = 2, \ldots, |\mathcal{X}|$ και $H(X) = 0$. Εάν ο Β παίζει πρώτος, πρέπει να επιλέξει $p(i) = 1/|\mathcal{X}|$, $i = 2, \ldots, |\mathcal{X}|$, αναγκάζοντας τον Α να θέσει $p(1) = 1/|\mathcal{X}|$. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται μέγιστη εντροπία $H(X) = \log|\mathcal{X}|$. Επομένως, η επιλογή του παίκτη που ξεκινά έχει καθοριστική σημασία για την έκβαση του παιχνιδιού.

11. **Εντροπία (Επαναληπτική εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2008)**

Επιστήμονες που μελετούν ένα σπάνιο ερπετό έχουν προσδιορίσει ότι η επώαση του κάθε αβγού του ερπετού διαρκεί τουλάχιστον 41 ημέρες και δεν υπερβαίνει τις 104 ημέρες. Κατά τα άλλα, τίποτα δεν είναι γνωστό για την κατανομή της διάρκειας επώασης των αβγών.

(α) Έστω X διακριτή τ.μ. που αναπαριστά τη διάρκεια επώασης ενός αβγού του ερπετού. Δώστε ένα άνω φράγμα και ένα κάτω φράγμα για την εντροπία της X, καθώς και τις κατανομές που αντιστοιχούν στο άνω και στο κάτω φράγμα. Υποθέτουμε ότι η επώαση μετράται σε ακέραιο αριθμό ημερών ($X \in \mathbb{N} \cap [41,\ 104]$, δηλαδή δεν μπορεί, για παράδειγμα, να διαρκέσει 65.3 ημέρες).

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Η ελάχιστη εντροπία της X ισούται με 0 και αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο χρόνος επώασης είναι ίδιος για όλα τα αβγά, δηλαδή $p(i) = 1$ για κάποιο i, $40 < i \leq 104$ και $p(j) = 0$ για όλα τα $j \neq i$. Η $H(X)$ μεγιστοποιείται όταν όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, όταν, δηλαδή, $p(i) = \frac{1}{64}$, $40 < i \leq 104$ και $H(X) = \log_2 64 = 6$ bits. Επομένως, $\boxed{0 \leq H(X) \leq 6 \text{ bits.}}$

(β) Μετά από νέες παρατηρήσεις, επιβεβαιώθηκε ότι $41 \leq X \leq 104$, και προέκυψε, επίσης, ότι η πιθανότητα η επώαση του αβγού να διαρκεί περισσότερο από 56 ημέρες δεν μπορεί να υπερβεί την πιθανότητα η επώαση να διαρκεί 56 ημέρες ή λιγότερο. Επαναλάβετε το Ερώτημα (α) και συγκρίνετε τα νέα φράγματα που υπολογίσατε.

Δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η ελάχιστη τιμή της $H(X)$ ισούται με 0 και επιτυγχάνεται με $p(i) = 1$ για κάποιο i, τέτοιο ώστε $40 < i \leq 56$. Η κατανομή ικανοποιεί τη συνθήκη $\Pr\{X > 56\} \leq \Pr\{X \leq 56\}$, δεδομένου ότι $\Pr\{X \leq 56\} = 1$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για την $H(X)$, υποθέτουμε κατ' αρχάς, ότι $\Pr\{X \leq 56\} = p$. Από τον περιορισμό, $p \geq 1/2$. Έστω Y τ.μ. που ορίζεται ως

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad 40 < X \leq 56 \\ 1 & \text{εάν} \quad 56 < X \leq 104 \end{cases}.$$

$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(X)$. Επίσης, $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$. Συνεπώς, $H(X) = H(Y) + H(X|Y)$ (αρχή διαχωρισιμότητας εντροπίας). Αντικαθιστώντας, $H(X) = H(p) + pH(X|Y = 0) + (1-p)H(X|Y = 1)$, όπου $H(p) \triangleq -p \log p - (1-p)\log(1-p)$.

Η $H(X|Y = 0)$ μεγιστοποιείται για ομοιόμορφη κατανομή $p(i|i \leq 56) = \frac{1}{16}$ ανεξάρτητα της τιμής της p, και $H(X|Y = 0) = \log_2 16 = 4$ bits. Η $H(X|Y = 1)$ μεγιστοποιείται για ομοιόμορφη κατανομή $p(i|i > 56) = \frac{1}{48}$, και $H(X|Y = 1) = \log_2 48 = \log_2(3 \cdot 16) = 4 + \log 3 \approx 5.585$ bits.

Συνεπώς, $H(X) = -p\log p - (1-p)\log(1-p) + 4p + (4+\log 3)(1-p) = -p\log p - (1-p)\log(1-p) - p\log 3 + \log 48$. Η $H(X)$ είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση δεδομένου ότι είναι άθροισμα μιας κοίλης συνάρτησης $H(p)$ και μιας συνάρτησης που είναι γραμμική ως προς p ($-p\log 3 + \log 48$). Εναλλακτικά, μπορείτε να το επιβεβαιώσετε υπολογίζοντας τη δεύτερη παράγωγο της $H(X)$ (η δεύτερη παράγωγος του όρου $-p\log 3 + \log 48$ ισούται με 0). Επομένως, μπορούμε να βρούμε την τιμή του $p \in [\frac{1}{2}, 1]$ που μεγιστοποιεί την $H(X)$ παραγωγίζοντας ως προς p.

$$\frac{\partial H(X)}{\partial p} = -\log_2 p - \log_2 e + \log_2(1-p) + \log_2 e - log_2 3 = \log_2 \frac{1-p}{3p}.$$

Η $H(X)$ μηδενίζεται όταν $1 - p = 3p \Rightarrow p = \frac{1}{4}$. Για $p > \frac{1}{4}$, $\frac{\partial H(X)}{\partial p} < 0$. Επομένως, η τιμή του $p \in [\frac{1}{2}, 1]$ για την οποία μεγιστοποιείται η $H(X)$ είναι $p = \frac{1}{2}$ και $H(X) = 1 - \frac{1}{2}\log 3 + \log 48 \approx 5.7925$ bits. Συνεπώς, $\boxed{0 \leq H(X) \leq 5.7925 \text{ bits.}}$

Εναλλακτική λύση:

Δεδομένου ότι η X είναι ομοιόμορφη στα διαστήματα $[41, 56]$ και $[57, 104]$,

$$p(i) = \begin{cases} \frac{p}{16} & , \quad 40 < i \leq 56 \\ \frac{(1-p)}{48} & , \quad 56 < i \leq 104 \end{cases}$$

Επομένως, $H(X) = -16 \cdot \frac{p}{16}\log_2 \frac{p}{16} - 48 \cdot \frac{1-p}{48}\log_2 \frac{1-p}{48} = H(p) + 4p + (1-p)\log_2 48$. Η έκφραση είναι η ίδια με αυτήν που προκύπτει από την αρχή διαχωρισιμότητας. Συνεπώς, συνεχίζουμε όπως προηγουμένως.

Παρατηρήστε ότι το άνω φράγμα για την εντροπία είναι μικρότερο σε αυτήν την περίπτωση. Ο λόγος είναι ότι τώρα γνωρίζουμε κάτι περισσότερο, ότι, δηλαδή, $\Pr\{X > 56\} \leq \Pr\{X \leq 56\}$. Επομένως, η αβεβαιότητά μας για την κατανομή της X (και άρα την εντοπία της X) ελαττώνεται.

Επίσης, παρατηρήστε ότι, για $p = 1/4$, $H(X) = 6$ bits, που αντιστοιχεί στην περίπτωση του Ερωτήματος (α).

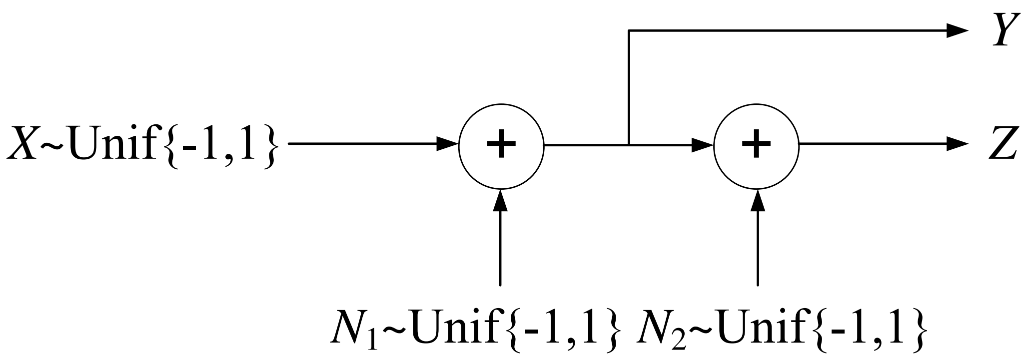
Παρατηρήσεις:

Όσοι απάντησαν στο Ερώτημα (β) υπέθεσαν ότι $\Pr\{X > 56\} = \Pr\{X \leq 56\} = \frac{1}{2}$. Η τιμή αυτή μεγιστοποιεί, πράγματι, την εντροπία, αλλά αυτό πρέπει να αποδειχτεί. Επίσης, παρατηρήστε ότι, εάν $\Pr\{X > 56\} = \Pr\{X \leq 56\} = \frac{1}{2}$, το κάτω φράγμα για την $H(X)$ δεν είναι 0, αλλά 1 bit.

12. **Εντροπία και Αμοιβαία Πληροφορία (Πρόοδος Θ. Π., Νοέμβριος 2008)**

Στο Σχήμα 2, οι τ.μ. X, N_1 και N_2 είναι διακριτές, δυαδικές και ομοιόμορφα κατανεμημένες. Επίσης, είναι όλες *ανεξάρτητες* μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που σας χρειαστεί, δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.



Σχήμα 2: Σύστημα με δύο πηγές θορύβου

(α) Με τι ισούται η εντροπία της X;

Απάντηση:

Η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με 2 τιμές. Επομένως, η εντροπία της ισούται με 1 bit. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και με απευθείας υπολογισμό της $H(X)$.

(β) Βρείτε την εντροπία της Y.

Απάντηση:

Η κατανομή της Y είναι η εξής:

$$Y = \begin{cases} -2 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4} \\ 0 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2} \\ +2 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4} \end{cases}$$

Επομένως,

$$H(Y) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y) \log \frac{1}{p(y)} = 2 \times \frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{2} \log 2 = 1.5 \text{ bits}.$$

(γ) Για *οποιαδήποτε* κατανομή της N_2 (όχι, κατ' ανάγκη ομοιόμορφη όπως στο σχήμα), υποθέτοντας, πάντοτε, ότι η N_2 είναι τυχαία και ανεξάρτητη των X και N_1, δώστε το καλύτερο κάτω φράγμα που μπορείτε για την $H(Z)$. Θεωρούμε ότι η κατανομή της N_2 (και, επομένως, και η εντροπία της) είναι γνωστή. Προσοχή: Σε αυτό το ερώτημα (αντίθετα με όλα τα άλλα) δε θεωρούμε ότι η N_2 είναι, κατ' ανάγκη, δυαδική.

Απάντηση:

Η N_2 είναι ανεξάρτητη της Y δεδομένου ότι είναι ανεξάρτητη από τις X και N_1 και η Y είναι αιτιοκρατική (deterministic) συνάρτηση των X και N_1. Στην 1η σειρά ασκήσεων είδαμε ότι όταν δύο ανεξάρτητες τ.μ. αθροίζονται, η εντροπία του αθροίσματος είναι τουλάχιστον ίση με την εντροπία κάθε μίας από τις μεταβλητές που αθροίζονται. Συνεπώς, $H(Z) \geq H(Y)$ και $H(Z) \geq H(N_2)$. Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις, $H(Z) \geq \max\{1.5, H(N_2)\}$.

(δ) Υπολογίστε, τώρα, την $H(Z)$ για $N_2 \sim \text{Unif}\{-1, +1\}$ και επαληθεύστε ότι υπερβαίνει το κάτω φράγμα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Η Z ακολουθεί την κατανομή

$$Z = \begin{cases} -3 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{8} \\ -1 & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{8} \\ +1 & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{8} \\ +3 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{8} \end{cases}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} H(Z) &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} p(z) \log \frac{1}{p(z)} \\ &= 2 \times \frac{1}{8} \log 8 + 2 \times \frac{3}{8} \log \frac{8}{3} = 3 - \frac{3}{4} \log 3 \approx 1.8113 \text{ bits.} \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, από την αρχή διαχωρισμού της εντροπίας, και παρατηρώντας ότι η πιθανότητα η Z να είναι αρνητική είναι ίση με την πιθανότητα να είναι θετική,

$$\begin{aligned} H(Z) &= H(S) + H(Z|S) = 1 + H(1/4) \\ &= 1 + \frac{1}{4} \log 4 + \frac{3}{4} \log \frac{4}{3} = 3 - \frac{3}{4} \log 3 \approx 1.8113 \text{ bits,} \end{aligned}$$

όπου S τ.μ. που δηλώνει το πρόσημο της Z.

Τέλος, μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διαχωρισμού της εντροπίας και με διαφορετικό τρόπο, παρατηρώντας ότι, για δεδομένη απόλυτη τιμή της Z, η αρνητική και η θετική τιμή είναι ισοπίθανες (επιβεβαιώστε ως άσκηση).

(ε) Υπολογίστε τις $I(Y; X)$, $I(Z; X)$ και $I(Y, Z; X)$. Συγκρίνετέ τις μεταξύ τους και σχολιάστε.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

• $I(Y; X) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - H(X + N_1|X) = H(Y) - H(N_1) = 1.5 - 1 = 0.5$ bits. Όπως θα δούμε στα επόμενα μαθήματα, μπορούμε να δούμε το κανάλι μεταξύ X και Y ως ένα κανάλι διαγραφής. Όταν $Y = 0$, δεν μπορούμε να βρούμε ποια ήταν η τιμή της X. Ωστόσο, όταν $Y = -2$ γνωρίζουμε με βεβαιότητα ότι $X = -1$ (αντίστοιχα για $Y = +2$). Θα αποδείξουμε σε επόμενο μάθημα ότι η χωρητικότητα του καναλιού διαγραφής ισούται με $1 - \alpha$ και επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη κατανομή της εισόδου X. Εδώ, $\alpha = \Pr\{Y = 0\} = 1/2$. Επομένως, $C = 0.5$ bits και επιτυγχάνουμε τη χωρητικότητα του καναλιού.

• $I(Z; X) = H(Z) - H(Z|X)$. Για δεδομένη $X = x$ μπορούμε να δούμε εύκολα ότι οι μάζες πιθανότητας $p_{Z|X}(z|x)$ είναι ίδιες με αυτές της κατανομής $p_Y(z)$ (αν και οι τιμές διαφέρουν). Επομένως, $H(Z|X) = H(Y)$. Εναλλακτικά, για δεδομένη

$X = x$, το κανάλι από τη N_1 στη Z είναι το ίδιο με το κανάλι από μη δεδομένη X στην Y όπου το ρόλο της X έχει τώρα η N_1, και η γνωστή τιμή της X απλώς μεταθέτει την κατανομή της εξόδου κατά X. Ένας άλλος τρόπος είναι γράφοντας $H(Z|X) = H(Y+N_2|X) = H(X+N_1+N_2|X) = H(N_1+N_2) = 1.5$, γιατί η N_1+N_2 ακολουθεί ίδια κατανομή με την Y. Συνεπώς, $I(Z;X) \approx 1.8113 - 1.5 = 0.3113$ bits.

• Από τον κανόνα αλυσίδας για την αμοιβαία πληροφορία, $I(Y,Z;X) = I(Y;X) + I(Z;X|Y)$. $I(Z;X|Y) = H(Z|Y) - H(Z|X,Y) = H(Z|Y) - H(Z|Y) = 0$. Επομένως, $I(Y,Z;X) = I(Y;X) = 0.5$ bits.

Συγκρίνοντας τις τιμές που βρήκαμε, παρατηρούμε ότι $I(Y;X) > I(Z;X)$. Αυτό είναι διαισθητικά λογικό δεδομένου ότι η Z περιέχει περισσότερο "θόρυβο" σε σχέση με τη X απ' ό,τι η Y. Μπορούμε, λοιπόν, να "μάθουμε" περισσότερα για τη X από την Y απ' ότι από τη Z (και αντίστροφα).

Παρατηρούμε, επίσης, ότι $I(Z;X|Y) = 0$. Δηλαδή, εάν γνωρίζουμε την Y, γνώση της X δε μας δίνει καμία περαιτέρω πληροφορία για τη Z. Και αυτό είναι διαισθητικά λογικό: $Z = Y + N_2$, και η N_2 είναι ανεξάρτητη της X. Επομένως, από τη στιγμή που γνωρίζουμε την Y, η μόνη αβεβαιότητα που απομένει είναι η τιμή της N_2 για την οποία η X δεν μπορεί να παράσχει καμία πληροφορία.

Τέλος, $I(Y,Z;X) = I(Y;X)$. Επομένως, όλη η πληροφορία που η X "περνάει" στα μετέπειτα στάδια περιέχεται ήδη στην Y. Παρατήρηση της Z επιπλέον της Y δε μας δίνει καμία παραπάνω πληροφορία για τη X.

Η άσκηση αποτελεί ένα παράδειγμα στο οποίο ισχύει η ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων (data-processing inequality). Αποδεικνύεται ότι, εάν $X \to Y \to Z$ (σχηματίζουν, δηλαδή, αλυσίδα Markov), $I(Y;X) \geq I(Z;X)$. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι, στην άσκηση, $X \to Y \to Z$. Η ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων έχει ενδιαφέρουσες προεκτάσεις, μια από τις οποίες είναι ότι δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε νέα πληροφορία με ντετερμινιστική επεξεργασία τ.μ. Αντίθετα, στη γενική περίπτωση, "καταστρέφουμε" πληροφορία (ένα παράδειγμα είδατε στην 1η σειρά ασκήσεων στην περίπτωση μη αντιστρέψιμης συνάρτησης). Περισσότερα στο βιβλίο των Cover & Thomas, και στο μάθημα "Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας".

(στ) Σας δίνονται οι εξής επιλογές: Παρατήρηση της τ.μ. Y μόνο, παρατήρηση της τ.μ. Z μόνο ή παρατήρηση του ζεύγους τ.μ. (Y,Z). Ποια παρατήρηση θα επιλέξετε ώστε να πάρετε όση περισσότερη πληροφορία για τη X μπορείτε (κατά μέσο όρο);

Απάντηση:

Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι θα επιλέξουμε να παρατηρήσουμε την Y, δεδομένου ότι $I(Y;X) > I(Z;X)$ και του ότι ταυτόχρονη παρατήρηση της Z δε μας προσφέρει περισσότερη πληροφορία.

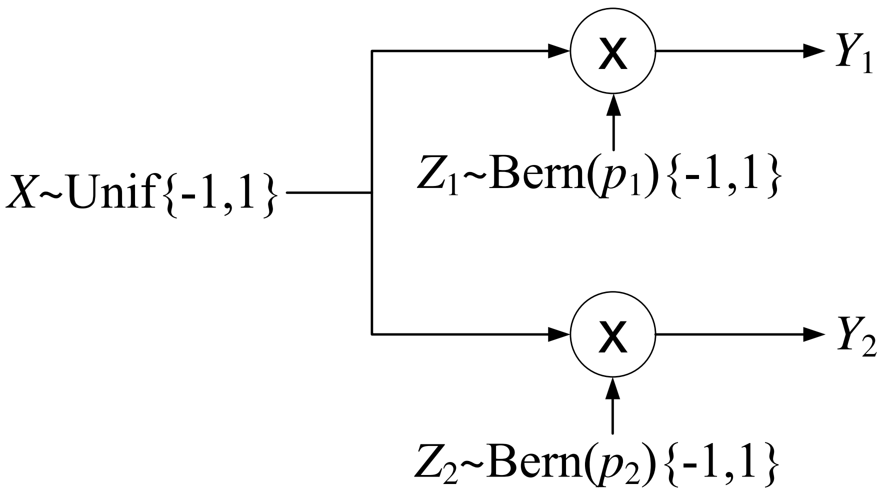
Παρατηρήσεις: Γενικά, οι επιδόσεις σε αυτήν την άσκηση ήταν καλές. Ένα λάθος που έκαναν οι περισσότεροι (μάλλον λόγω πίεσης χρόνου) ήταν στην κατανομή της Z. Η τιμή $Y = 0$ είναι πιο πιθανή από τις $Y = \pm 2$ και, επομένως, η κατανομή της Z είναι $\{-3, -1, +1, +3\} \leftrightarrow \{1/8, 3/8, 3/8, 1/8\}$ και όχι $\{1/6, 1/3, 1/3, 1/6\}$.

13. **Σύστημα με δύο εξόδους (Τελικό διαγώνισμα Θ. Π., Φεβρουάριος 2009)**

Θεωρούμε το σύστημα του Σχήματος 3. Η πηγή X *δεν* έχει μνήμη και παίρνει τιμές $+1$ ή -1 με την ίδια πιθανότητα $1/2$. Οι *πολλαπλασιαστικοί* θόρυβοι Z_1 και Z_2 παίρνουν, επίσης, τιμές στο σύνολο $\{-1, 1\}$, αλλά ακολουθούν κατανομή Bernoulli. Δηλαδή,

$$Z_i = \begin{cases} +1 & \text{με πιθανότητα} \quad p_i \\ -1 & \text{με πιθανότητα} \quad 1 - p_i \end{cases} .$$

Οι τ.μ. Z_1 και Z_2 είναι ανεξάρτητες της X. Ωστόσο, στη γενική περίπτωση, **δεν** είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.



Σχήμα 3: Σύστημα με δύο εξόδους.

(α) Βρείτε την $H(X)$ και τις $H(Z_i)$ (συναρτήσει των p_i).

Απάντηση:

$H(X) = 1$ bit, δεδομένου ότι η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή.

Οι Z_i ακολουθούν κατανομή Bernoulli. Επομένως, $H(Z_i) = H(p_i) = -p_i \log p_i - (1 - p_i) \log(1 - p_i)$.

(β) Για *δεδομένα* p_1 και p_2, βρείτε ένα άνω φράγμα για την $H(Z_1, Z_2)$, καθώς και την από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(z_1, z_2)$ η οποία επιτυγχάνει το άνω φράγμα.

Απάντηση:

Από τον κανόνα αλυσίδας για την εντροπία, $H(Z_1, Z_2) = H(Z_1) + H(Z_2|Z_1) \leq H(Z_1) + H(Z_2)$, με την ισότητα να ικανοποιείται όταν οι Z_1 και Z_2 είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς, $H(Z_1, Z_2) \leq H(p_1) + H(p_2)$. Το άνω φράγμα επιτυγχάνεται από την από κοινού σ.μ.π. του Πίνακα 1.

	$Z_1 = +1$	$Z_1 = -1$
$Z_2 = +1$	$p_1 p_2$	$(1-p_1)p_2$
$Z_2 = -1$	$p_1(1-p_2)$	$(1-p_1)(1-p_2)$

Πίνακας 1: Από κοινού σ.μ.π. που επιτυγχάνει το άνω φράγμα για την $H(Z_1, Z_2)$.

(γ) Βρείτε τις $I(X;Y_1)$ και $I(X;Y_2)$. Για δεδομένα p_1 και p_2 υπάρχει τρόπος να αυξήσετε τις $I(X;Y_1)$ και $I(X;Y_2)$ αλλάζοντας την κατανομή της X; Επιτρέπεται να αλλάξετε μόνο τις πιθανότητες με τις οποίες $X = 1$ ή -1. Δεν μπορείτε να αυξήσετε το πλήθος τιμών, $|\mathcal{X}|$, της πηγής.

Απάντηση:

$$\begin{aligned} I(X;Y_i) &= H(Y_i) - H(Y_i|X) = H(Y_i) - H(X \cdot Z_i|X) \\ &\overset{(i)}{=} H(Y_i) - H(Z_i|X) \\ &\overset{(ii)}{=} H(Y_i) - H(Z_i) = H(Y_i) - H(p_i). \end{aligned}$$

(i) Ο πολλαπλασιασμός με μη μηδενική τιμή είναι αντιστρέψιμος, (ii) Οι Z_i είναι ανεξάρτητες της X. Με πράξεις μπορείτε εύκολα να δείτε ότι, για οποιαδήποτε τιμή της p_i, οι Y_1 και Y_2 ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο $\{-1, +1\}$. Ο πιο σύντομος τρόπος για να το διαπιστώσετε είναι με χρήση των αποτελεσμάτων για τα συμμετρικά κανάλια. Το κανάλι από τη X στην Y_1 είναι ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC). Επομένως, όταν στην είσοδο εφαρμόζεται ομοιόμορφη κατανομή η έξοδός του είναι, επίσης, ομοιόμορφα κατανεμημένη. Το ίδιο ισχύει και για το κανάλι από τη X στην Y_2. Συνεπώς,

$$I(X;Y_i) = 1 - H(p_i).$$

Δεδομένου ότι η χωρητικότητα του δυαδικού συμμετρικού καναλιού επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη κατανομή για οποιαδήποτε τιμή της p_i, δεν υπάρχει τρόπος να αυξήσουμε τις $I(X;Y_1)$ και $I(X;Y_2)$ για δεδομένα p_1 και p_2. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει παρατηρώντας ότι η $H(Z_i|X)$ δεν εξαρτάται από τη X (λόγω της συμμετρίας) και η $H(Y_i)$ δεν μπορεί να υπερβεί το 1 bit (αυτό ακριβώς κάναμε όταν υπολογίσαμε τη χωρητικότητα του BSC).

(δ) Συγκρίνετε την $I(X;Y_1,Y_2)$ με τις $I(X;Y_i)$. Είναι μικρότερη; Μεγαλύτερη; Ίση; Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή (σε bits) που μπορεί να πάρει η $I(X;Y_1,Y_2)$;

Υπόδειξη: Στο ερώτημα αυτό μπορείτε να απαντήσετε χωρίς να βρείτε την τιμή της $I(X;Y_1,Y_2)$.

Απάντηση:

Από τον κανόνα αλυσίδας για την αμοιβαία πληροφορία,

$$I(X;Y_1,Y_2) = I(Y_1,Y_2;X) = I(Y_1;X) + I(Y_2;X|Y_1).$$

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι η αμοιβαία πληροφορία (και η δεσμευμένη αμοιβαία πληροφορία) είναι πάντοτε μη αρνητική. Επομένως,

$$I(Y_2; X|Y_1) \geq 0 \Rightarrow I(X; Y_1, Y_2) \geq I(X; Y_1).$$

Για τους ίδιους λόγους,

$$I(X; Y_1, Y_2) \geq I(X; Y_2).$$

Επομένως, στη γενική περίπτωση, όπως περιμένουμε και διαισθητικά, παίρνουμε περισσότερη πληροφορία αν κοιτάξουμε και τις 2 εξόδους. Αυτό οφείλεται στο ότι, στη γενική περίπτωση, οι τιμές των θορύβων Z_1 και Z_2 δεν είναι πλήρως εξαρτημένες μεταξύ τους.

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες δεν ωφελεί να κοιτάξουμε και τις δύο εξόδους. Η μία είναι όταν οι Z_1 και Z_2 είναι πλήρως εξαρτημένες, δηλαδή $Z_1 = Z_2$ (πάντοτε) ή $Z_1 = -Z_2$ (πάντοτε). Στην περίπτωση αυτή
$I(Y_1; X|Y_2) = H(Y_1|Y_2) - H(Y_1|Y_2, X) = H(X + Z_1|X + Z_2) - H(X + Z_1|X + Z_2, X) = 0 - 0 = 0$ και, επομένως, $I(X; Y_1, Y_2) = I(X; Y_1)$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι $I(X; Y_1, Y_2) = I(X; Y_2)$. Η άλλη περίπτωση είναι η τετριμμένη, όπου ο θόρυβος είναι ντετερμινιστικός, δηλαδή κάποιο από τα p_i ισούται με 0 ή 1. Κοιτάζοντάς το και πάλι μαθηματικά, εάν υποθέσουμε ότι η Z_1 είναι ντετερμινιστική, $I(Y_2; X|Y_1) = H(Y_2|Y_1) - H(Y_2|Y_1, X) = 0$, γιατί, από τη στιγμή που γνωρίζουμε την Y_1 μπορούμε να υπολογίσουμε και τη X αφαιρώντας τη γνωστή Z_1 και, επομένως, $H(Y_2|Y_1) = H(Y_2|Y_1, X)$.

Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η $I(X; Y_1, Y_2)$ είναι 1 bit.

$$I(X; Y_1, Y_2) = H(X) - H(X|Y_1, Y_2) \leq H(X) = 1 \text{ bit}.$$

Το αποτέλεσμα είναι λογικό: Η πληροφορία που "μπαίνει" στο σύστημα ισούται ακριβώς με 1 bit. Επομένως, η μέγιστη πληροφορία στην έξοδο η οποία προέρχεται από τη X (<u>όχι</u> η συνολική πληροφορία που περιέχεται στην έξοδο) δεν μπορεί να υπερβαίνει το 1 bit. Ωστόσο, στη γενική περίπτωση, πρέπει να "συλλέξουμε" την πληροφορία από όλες τις εξόδους του συστήματος.

Η ισότητα ισχύει όταν μπορούμε να βρούμε τη X από τις Y_1 και Y_2 χωρίς αβεβαιότητα. Αυτό συμβαίνει όταν τουλάχιστον μια από τις Z_1 και Z_2 είναι ντετερμινιστική ή όταν $Z_1 = -Z_2$ (οπότε $Y_1 + Y_2 = 2X$).

(ε) Υποθέστε, τώρα, ότι οι Z_1 και Z_2 είναι *ανεξάρτητες* μεταξύ τους. Βρείτε μια έκφραση για την $I(X; Y_1, Y_2)$ συναρτήσει των p_1 και p_2.

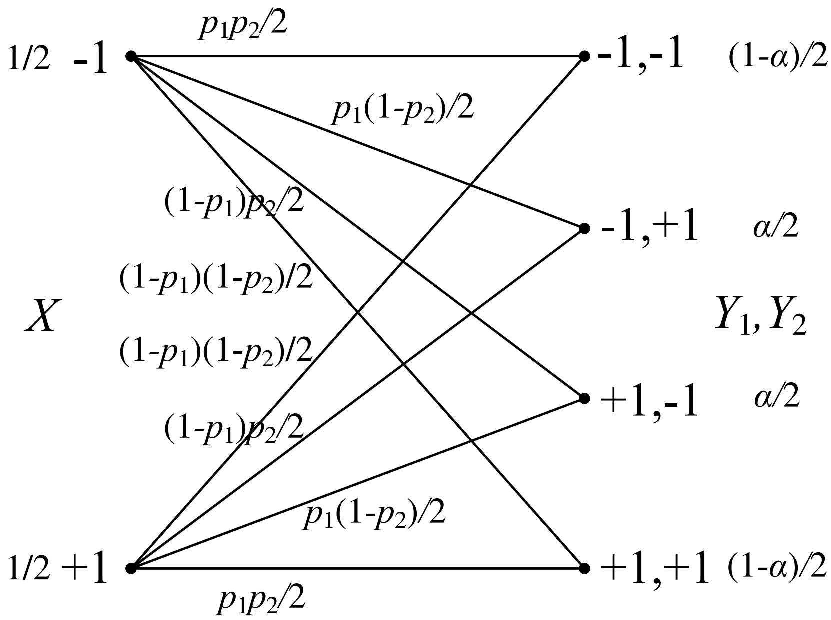
Υπόδειξη: Ενδέχεται να σας φανεί χρήσιμη η αντικατάσταση $\alpha \triangleq p_1 + p_2 - 2p_1p_2$.

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι

$$I(X; Y_1, Y_2) = H(Y_1, Y_2) - H(Y_1, Y_2|X).$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την $H(Y_1, Y_2)$ βρίσκουμε την από κοινού κατανομή, $p(y_1, y_2)$, των Y_1 και Y_2.



Σχήμα 4: Υπολογισμός $p(y_1, y_2)$ και $p(y_1, y_2|x)$.

Με χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας (Σχήμα 4) και θέτοντας $\alpha \triangleq p_1 + p_2 - 2p_1p_2$,

$$p(-1,-1) = p(+1,+1) = \frac{1}{2}(1 - p_1 - p_2 + 2p_1p_2) = \frac{(1-\alpha)}{2},$$
$$p(-1,+1) = p(+1,-1) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2 - 2p_1p_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} H(Y_1, Y_2) &= -2 \times \frac{\alpha}{2}\log\frac{\alpha}{2} - 2 \times \frac{(1-\alpha)}{2}\log\frac{(1-\alpha)}{2} \\ &= -\alpha\log\alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha) + \alpha + (1-\alpha) \\ &= 1 + H(\alpha). \end{aligned}$$

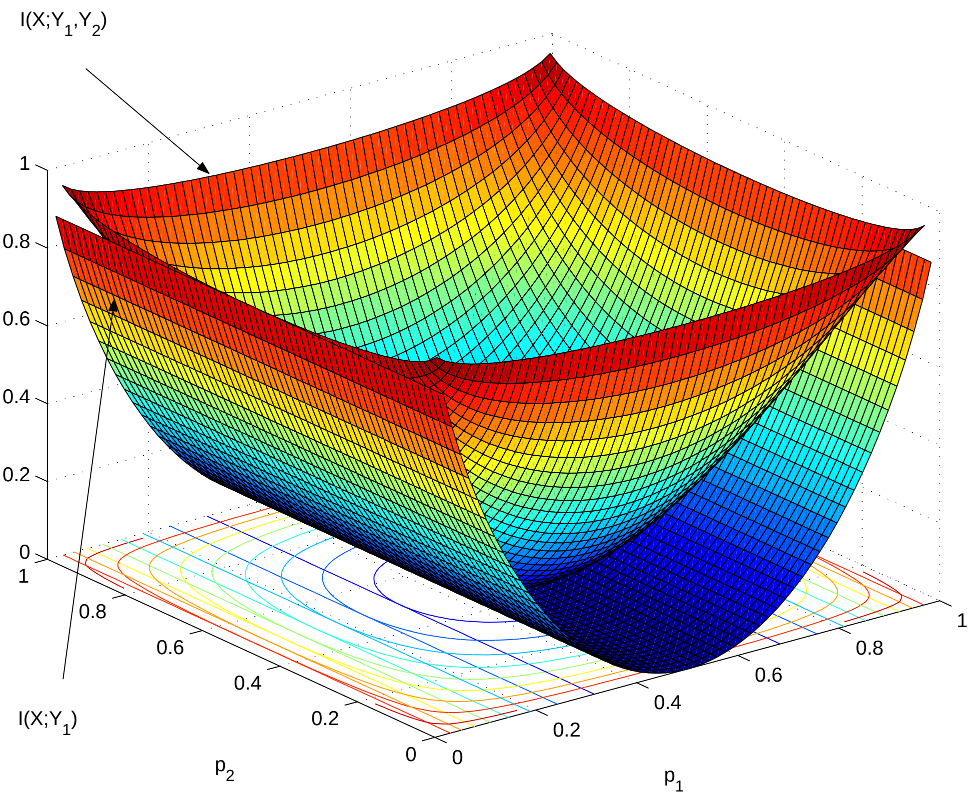
Με χρήση του κανόνα αλυσίδας,

$$\begin{aligned} H(Y_1, Y_2|X) &= H(Y_1|X) + H(Y_2|X, Y_1) = H(X \cdot Z_1|X) + H(X \cdot Z_2|X, X \cdot Z_1) = \\ &= H(Z_1) + H(Z_2|Z_1) \overset{(i)}{=} H(Z_1) + H(Z_2) \\ &= H(p_1) + H(p_2). \end{aligned}$$

(i) από την υπόθεση ότι οι Z_1 και Z_2 είναι ανεξάρτητες.
Αντικαθιστώντας,

$$I(X; Y_1, Y_2) = 1 + H(\alpha) - H(p_1) - H(p_2).$$

Η $I(X;Y_1,Y_2)$ συναρτήσει των p_1 και p_2 έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 5. Παρατηρήστε ότι $I(X;Y_1,Y_2)=0$ όταν $p_1=p_2=\frac{1}{2}$. Παρατηρήστε, επίσης, ότι $I(X;Y_1,Y_2)\geq I(X;Y_1)$, όπως αποδείχτηκε στο προηγούμενο ερώτημα.



Σχήμα 5: $I(X;Y_1,Y_2)$ για ανεξάρτητες Z_1 και Z_2 και σύγκριση με την $I(X;Y_1)$.

$\boxed{\text{Παρατηρήσεις:}}$ Η άσκηση αυτή δυσκόλεψε αρκετούς και ήταν μάλλον η δυσκολότερη του διαγωνίσματος. Ένα λάθος που έκαναν κάποιοι είναι να θέσουν συγκεκριμένες τιμές για τα p_i στο Ερώτημα (β). Ωστόσο, σύμφωνα με την εκφώνηση και όπως διευκρινίστηκε και κατά τη διάρκεια της εξέτασης, οι τιμές των p_i είναι *δεδομένες*. Το γεγονός ότι οι τιμές των p_i (δηλαδή οι περιθώριες της $p(z_1,z_2)$) είναι δεδομένες δε σημαίνει ότι η $p(z_1,z_2)$ είναι μοναδική. Επίσης, ένας από τους σκοπούς της άσκησης ήταν να συνειδητοποιήσετε ότι, στη γενική περίπτωση, οι Y_1 και Y_2 **δεν** είναι ανεξάρτητες ακόμα και εάν οι θόρυβοι είναι ανεξάρτητοι. Η τιμή και των δύο εξαρτάται από τη X. Εάν, για παράδειγμα, $p_1=p_2=0.001$, γνώση της τιμής της Y_1 μας βοηθά να εκτιμήσουμε την Y_2 με μικρή πιθανότητα σφάλματος. Η μόνη περίπτωση που οι Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες είναι όταν $p_1=p_2=1/2$ **και** οι Z_i είναι ανεξάρτητες. Τέλος, προσοχή: $H(X\cdot Z_1|X)=H(Z_1)$, γιατί αν μας αποκαλυφθεί η X απομένει η αβεβαιότητα της Z_1 (αρκεί το X να μην είναι 0). Αντίθετα, $H(X|X\cdot Z_1)\neq H(X|Z_1)$. Και πάλι, αν $Z_1=+1$ με πολύ μεγάλη πιθανότητα, παίρνουμε σχεδόν όλη την πληροφορία για τη X από το γινόμενο $X\cdot Z_1$

(κατά μέσο όρο), ενώ, αντίθετα, δεν παίρνουμε καμία πληροφορία για τη X μόνο από τη Z_1.

14. **Ανισότητες (Επαναληπτική Εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

(α) Να αποδειχτεί ότι, για $n \geq 2$,

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) \geq \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n).$$

Στη συνέχεια, να αποδειχτεί ότι

$$\frac{1}{2}\left[H(X_1, X_2) + H(X_2, X_3) + H(X_1, X_3)\right] \geq H(X_1, X_2, X_3).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις

$$H(X_1, X_2, X_3) = H(X_i, X_j) + H(X_k | X_i, X_j),$$

καθώς και την πρώτη σχέση που αποδείξατε.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Από τον κανόνα αλυσίδας για την εντροπία,

$$\begin{aligned} H(X_1, X_2, \ldots, X_n) &= H(X_1) + H(X_2|X_1) + \ldots + H(X_n|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \\ &\overset{(a)}{\geq} H(X_1|X_2, X_3, \ldots, X_n) + H(X_2|X_1, X_3, \ldots, X_n) + \ldots \\ &+ H(X_n|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n). \end{aligned}$$

(a) $H(X|Y) \leq H(X)$.

Εναλλακτική απόδειξη με χρήση επαγωγής (από συνάδελφό σας):

• Για $n = 2$, $H(X_1, X_2) = H(X_1) + H(X_2|X_1) \geq H(X_1|X_2) + H(X_2|X_1)$.

• Έστω ότι ισχύει για $n = k$:
$H(X_1, X_2, \ldots, X_k) \geq \sum_{i=1}^{k} H(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_k)$.

• Για $n = k + 1$,

$$\begin{aligned}
H(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}) &= H(X_1, X_2, \ldots, X_k) + H(X_{k+1}|X_1, X_2, \ldots, X_k) \\
&\overset{(b)}{\geq} \sum_{i=1}^{k} H(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_k) \\
&\quad + H(X_{k+1}|X_1, X_2, \ldots, X_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} H(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_k).
\end{aligned}$$

(b) από την υπόθεση για $n = k$.

Αθροίζοντας, τώρα, τις σχέσεις $H(X_1, X_2, X_3) = H(X_i, X_j) + H(X_k|X_i, X_j)$ για όλους τους συνδυασμούς τριών τ.μ.,

$$\begin{aligned}
3H(X_1, X_2, X_3) &= H(X_1, X_2) + H(X_1, X_3) + H(X_2, X_3) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3} H(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n) \\
&\overset{(c)}{\leq} H(X_1, X_2) + H(X_1, X_3) + H(X_2, X_3) + H(X_1, X_2, X_3) \\
\Rightarrow 2H(X_1, X_2, X_3) &\leq H(X_1, X_2) + H(X_1, X_3) + H(X_2, X_3) \\
\Rightarrow H(X_1, X_2, X_3) &\leq \frac{1}{2}\left[H(X_1, X_2) + H(X_2, X_3) + H(X_1, X_3)\right].
\end{aligned}$$

(c) Από την πρώτη σχέση που αποδείχτηκε.

(β) Έστω $p_{XY}(x, y)$ και $q_{XY}(x, y)$ δύο κατανομές μάζας πιθανότητας στο σύνολο $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Να αποδειχθεί ότι $D(p_{XY}||q_{XY}) \geq D(p_X||q_X)$, όπου $p_X(x)$ και $q_X(x)$ οι περιθώριες σ.μ.π. των $p_{XY}(x, y)$ και $q_{XY}(x, y)$, αντίστοιχα.

Απάντηση (Cover Theorem 2.5.3):

Από τον ορισμό της σχετικής εντροπίας,

$$\begin{aligned}
D(p_{XY}(x,y)||q_{XY}(x,y)) &= \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_{XY}(x,y)\log\frac{p_{XY}(x,y)}{q_{XY}(x,y)} \\
&= \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_{XY}(x,y)\log\frac{p_X(x)p_{Y|X}(y|x)}{q_X(x)q_{Y|X}(y|x)} \\
&= \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_{XY}(x,y)\log\frac{p_X(x)}{q_X(x)} + \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_{XY}(x,y)\log\frac{p_{Y|X}(y|x)}{q_{Y|X}(y|x)} \\
&= \sum_{x\in\mathcal{X}}\log\frac{p_X(x)}{q_X(x)}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_{XY}(x,y) + D(p_{Y|X}||q_{Y|X}) \\
&= \sum_{x\in\mathcal{X}} p_X(x)\log\frac{p_X(x)}{q_X(x)} + D(p_{Y|X}||q_{Y|X}) \\
&= D(p_X||q_X) + D(p_{Y|X}||q_{Y|X}) \geq D(p_X||q_X),
\end{aligned}$$

δεδομένου ότι η σχετική εντροπία είναι πάντοτε μη αρνητική.

Εναλλακτική απόδειξη (από συνάδελφό σας):

$$\begin{aligned}
D(p_X(x)||q_X(x)) &= \sum_{x\in\mathcal{X}} p_X(x)\log\frac{p_X(x)}{q_X(x)} \\
&= \sum_{x\in\mathcal{X}}\left(\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_{X,Y}(x,y)\right)\log\frac{\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_{X,Y}(x,y)}{\sum_{y\in\mathcal{Y}} q_{X,Y}(x,y)} \\
&\overset{(d)}{\leq} \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_{X,Y}(x,y)\log\frac{p_{X,Y}(x,y)}{q_{X,Y}(x,y)} = D(p_{XY}(x,y)||q_{XY}(x,y)).
\end{aligned}$$

(d) από την ανισότητα log-sum (Cover Theorem 2.7.1).

15. **Ισότητες και ανισότητες (Επαναληπτική εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

Συμπληρώστε τις παρακάτω σχέσεις με $=$, $\leq$ ή $\geq$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Στην περίπτωση που ισχύει $\leq$ ή $\geq$, προσδιορίστε πότε ισχύει η ισότητα.

Σημείωση: Απαντήσεις που δεν είναι επαρκώς αιτιολογημένες δε βαθμολογούνται.

(α) $I(X;Y)$? $I(g(X);Y)$. Η $g()$ είναι αιτιοκρατική (deterministic) συνάρτηση.

Απάντηση:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) \geq H(Y) - H(Y|g(X)) = I(g(X);Y),$$

δεδομένου ότι η $g(X)$ δεν μπορεί να περιέχει περισσότερη πληροφορία για την Y απ' ό,τι η X.

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης (στην ουσία ο ίδιος) είναι να παρατηρήσετε ότι $Y \to X \to g(X)$ και να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων.

Η ισότητα ισχύει όταν η $g(X)$ είναι 1-προς-1, δηλαδή όταν από την τιμή της $g(X)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή της X.

(β) $I(Y;Z|X)$? $I(Y;Z)$ εάν $p(x,y,z) = p(x)p(y)p(z|x,y)$.

Απάντηση:

$$\begin{aligned} I(Y;Z|X) &= H(Y|X) - H(Y|X,Z) \overset{(i)}{=} H(Y) - H(Y|X,Z) \\ &\geq H(Y) - H(Y|Z) = I(Y;Z). \end{aligned}$$

(i) Οι X και Y είναι ανεξάρτητες.

Η ισότητα ισχύει όταν $H(Y|X,Z) = H(Y|Z) \Rightarrow H(Y|Z) - H(Y|X,Z) = 0 \Rightarrow I(X;Y|Z) = 0$, όταν, δηλαδή, οι X και Y είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δεδομένης της Z.

(γ) $H(X|Z)$? $H(X|Y) + H(Y|Z)$.

Απάντηση:

$$H(X|Y) + H(Y|Z) \geq H(X|Y,Z) + H(Y|Z) = H(X,Y|Z) \geq H(X|Z).$$

Η ισότητα ισχύει όταν $H(X|Y) = H(X|Y,Z)$ και $H(X,Y|Z) = H(X|Z)$, όταν, δηλαδή $I(X;Z|Y) = 0$ και $H(Y|X,Z) = 0$.

(δ) (εκτός ύλης για την Πρόοδο)

$h(X+Y)$? $h(X)$, όταν X και Y είναι *ανεξάρτητες* συνεχείς τ.μ.

Απάντηση:

$$h(X+Y) \geq h(X+Y|Y) = h(X).$$

Η ισότητα ισχύει μόνο στην τετριμμένη περίπτωση που η Y παίρνει μόνο μια τιμή (οπότε δεν είναι ούτε συνεχής ούτε τ.μ.).

16. **Μεταβολή εντροπίας (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2010)**

Θεωρήστε μια κατανομή $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ με $N \geq 2$ ενδεχόμενα, όλα *μη μηδενικής πιθανότητας*, δηλαδή $p_n > 0\ \forall n$. Θα δείξουμε ότι, για οποιαδήποτε κατανομή, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο, έστω K, το οποίο αν αφαιρέσουμε θα ελαττώσουμε την εντροπία. Δηλαδή, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα p_k έτσι ώστε, αν $\mathbf{p}' = \left(\frac{p_1}{1-p_K}, \frac{p_2}{1-p_K}, \ldots, \frac{p_{K-1}}{1-p_K}, \frac{p_{K+1}}{1-p_K}, \ldots, \frac{p_N}{1-p_K}\right)$, $H(\mathbf{p}') < H(\mathbf{p})$.

(α) Δείξτε ότι δεν μπορούμε πάντοτε να ελαττώσουμε την εντροπία αν επιλέξουμε το ενδεχόμενο K τυχαία. Δηλαδή, υπάρχουν κατανομές για τις οποίες υπάρχει p_K τέτοιο ώστε $H(\mathbf{p}') > H(\mathbf{p})$.

Απάντηση:

Αρκεί ένα αντιπαράδειγμα. Έστω, για παράδειγμα, η κατανομή $\left((1-p), \frac{p}{N-1}, \frac{p}{N-1}, \ldots, \frac{p}{N-1}\right)$ από την οποία αφαιρούμε το πρώτο ενδεχόμενο. Από τη διαχωρισιμότητα της εντροπίας, $H(\mathbf{p}) = H(p) + pH\left(\frac{p}{N-1}, \frac{p}{N-1}, \ldots, \frac{p}{N-1}\right) = H(p) + p\log(N-1)$. Θέλουμε $H(\mathbf{p}') > H(\mathbf{p}) \Rightarrow H(p) < (1-p)\log(N-1) \Rightarrow H(p)/(1-p) > \log(N-1)$. Για $p = 1/2$, αρκεί $\log_2(N-1) > 2 \Rightarrow N > 5$. Πράγματι, για $p = 2$ και $N = 5$, $H(\mathbf{p}) \approx 2.161$ bits $< 2.322 \approx H(\mathbf{p}')$.

(β) Στη συνέχεια θα αποδείξετε ένα λήμμα που θα σας βοηθήσει να αποδείξετε το ζητούμενο. Δείξτε ότι, για $p \in (0, 1/2]$, η συνάρτηση $\frac{H(p)}{p}$, όπου $H(p) \triangleq -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του p.

Απάντηση:

Παραγωγίζοντας,

$$
\begin{aligned}
\frac{H(p)}{p} &= -\log_2 p - \frac{1-p}{p}\log_2(1-p) \Rightarrow \\
\frac{\partial}{\partial p}\frac{H(p)}{p} &= -\frac{1}{p}\log_2 e + \frac{1}{p^2}\log_2(1-p) + \frac{1-p}{p}\frac{1}{1-p}\log_2 e \\
&= \frac{\log_2(1-p)}{p^2} < 0 \text{ για } p \in (0, 1/2].
\end{aligned}
$$

Επειδή η παράγωγος είναι πάντοτε αρνητική στο διάστημα $(0, 1/2]$, η $H(p)/p$ είναι φθίνουσα.

(γ) Εξηγήστε γιατί, σε μία οποιαδήποτε κατανομή με N ενδεχόμενα, $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$, όλα *μη μηδενικά*, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο, L, με $p_L \leq \frac{1}{N}$.

Απάντηση:

Έστω $p_{min} \triangleq \min\{p_n\}$ η ελάχιστη μάζα της κατανομής. Δεδομένου ότι $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{n} p_{min} \leq 1 \Rightarrow Np_{min} \leq 1 \Rightarrow p_{min} \leq \frac{1}{N}$.

(δ) Χρησιμοποιώντας τα Ερωτήματα (β) και (γ) (ή κάποιον άλλο τρόπο, αν προτιμάτε) αποδείξτε ότι υπάρχει πάντοτε ένα ενδεχόμενο, K, το οποίο αν αφαιρεθεί η εντροπία της κατανομής μειώνεται.

Απάντηση:

Θέλουμε να δείξουμε ότι $H(\mathbf{p}') < H(\mathbf{p})$. Έστω, για απλοποίηση των εξισώσεων, ότι αναδιατάσσουμε τα ενδεχόμενα και το ενδεχόμενο που αφαιρούμε είναι το N-

στό. Από τον ορισμό της εντροπίας,

$$
\begin{aligned}
H(\mathbf{p}') &= -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{p_n}{1-p_N} \log \frac{p_n}{1-p_N} = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{p_n}{1-p_N} \log p_n + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{p_n}{1-p_N} \log(1-p_N) \\
&= -\sum_{n=1}^{N} \frac{p_n}{1-p_N} \log p_n + \frac{p_N}{1-p_N} \log p_N + \log(1-p_N) \\
&= \frac{1}{1-p_N} H(\mathbf{p}) + \frac{1}{1-p_N} \left[p_N \log p_N + (1-p_N)\log(1-p_N)\right] \\
&= \frac{1}{1-p_N} \left[H(\mathbf{p}) - H(p_N)\right].
\end{aligned}
$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα p_N ώστε

$$
\begin{aligned}
&H(\mathbf{p}') < H(\mathbf{p}) \Rightarrow \frac{1}{1-p_N} \left[H(\mathbf{p}) - H(p_N)\right] < H(\mathbf{p}) \Rightarrow \\
&H(p_N) > p_N H(\mathbf{p}) \Rightarrow H(\mathbf{p}) < \frac{H(p_N)}{p_N}.
\end{aligned}
$$

Όπως δείξαμε στο Ερώτημα (β), η $\frac{H(p_N)}{p_N}$ είναι φθίνουσα. Επίσης, από το Ερώτημα (γ), υπάρχει $p_N \le \frac{1}{N}$. Συνεπώς, υπάρχει p_N τέτοιο ώστε

$$
\begin{aligned}
\frac{H(p_N)}{p_N} &\ge N \cdot H(1/N) = N\left(\frac{1}{N}\log N + \frac{N-1}{N}\log\frac{N}{N-1}\right) \\
&= \log N + (N-1)\log N - (N-1)\log(N-1) \\
&= N\log N - (N-1)\log(N-1) \\
&> N\log N - (N-1)\log N = \log N \ge H(\mathbf{p}).
\end{aligned}
$$

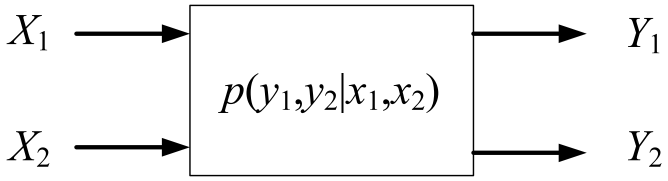
17. **Ανισότητες (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2011)**

Θεωρήστε 4 διακριτές τ.μ. X_1, X_2, Y_1 και Y_2 οι οποίες ικανοποιούν τις εξής συνθήκες

- Οι X_1 και X_2 είναι *ανεξάρτητες*. Δηλαδή, $p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$.
- Οι Y_1 και Y_2 εξαρτώνται από τις X_1 και X_2 μέσω της $p_{Y_1Y_2|X_1X_2}(y_1, y_2|x_1, x_2)$.

Για παράδειγμα, οι Y_1 και Y_2 μπορεί να είναι έξοδοι του συστήματος του Σχήματος 6, στο οποίο εισάγουμε ανεξάρτητες εισόδους (δηλαδή ο χρήστης 1 δεν μπορεί να συνεννοηθεί με το χρήστη 2). Ωστόσο, στη γενική περίπτωση, η έξοδος Y_j εξαρτάται όχι μόνο από τη X_j, αλλά και από τη X_i, $i \neq j$.

(α) Δείξτε ότι $I(X_1, X_2; Z) \ge I(X_1; Z) + I(X_2; Z)$, όπου $Z = Y_1$, $Z = Y_2$ ή $Z = (Y_1, Y_2)$.



Σχήμα 6: Στοχαστικό σύστημα με εισόδους X_1 και X_2 και εξόδους Y_1 και Y_2.

Δηλαδή, κάποιος που διαθέτει πρόσβαση στα X_1 και X_2 ταυτόχρονα, μπορεί να αντλήσει περισσότερη πληροφορία για το Z από τη συνολική πληροφορία που μπορούν να αντλήσουν δύο άτομα που διαθέτουν πρόσβαση ο καθένας μόνο στο X_1 και μόνο στο X_2.

Πότε ίσχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση;

Απάντηση:

Από τον κανόνα αλυσίδας για την αμοιβαία πληροφορία,

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2; Z) &= I(X_1; Z) + I(X_2; Z|X_1) \\ &= I(X_1; Z) + H(X_2|X_1) - H(X_2|X_1, Z) \\ &\overset{(i)}{=} I(X_1; Z) + H(X_2) - H(X_2|X_1, Z) \\ &\overset{(ii)}{\geq} I(X_1; Z) + H(X_2) - H(X_2|Z) \\ &= I(X_1; Z) + I(X_2; Z). \end{aligned}$$

(i) Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες. (ii) Conditioning reduces entropy.

Η ισότητα στην παραπάνω σχέση ισχύει όταν

$H(X_2|X_1, Z) = H(X_2|Z) \Rightarrow H(X_2|Z) - H(X_2|X_1, Z) = I(X_1; X_2|Z) = 0$.

Γνωρίζουμε ότι αυτό ισχύει εάν και μόνο εάν οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες *δεδομένης* της Z.

(β) Έστω, τώρα, ότι ισχύει $p(y_1, y_2|x_1, x_2) = p(y_1|x_1, x_2) \cdot p(y_2|x_1, x_2)$. Δηλαδή, οι Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες *δεδομένων των* X_1 και X_2.

Δείξτε ότι

$$I(X_1, X_2; Y_1, Y_2) \leq I(X_1, X_2; Y_1) + I(X_1, X_2; Y_2).$$

Δηλαδή, κάποιο μέρος της πληροφορίας που περιέχει η Y_1 για τις X_1 και X_2 υπάρχει και στην Y_2 (και αντίστροφα).

Πότε ισχύει η ισότητα;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Χρησιμοποιώντας, και πάλι, τον κανόνα αλυσίδας,

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2; Y_1, Y_2) &= I(X_1, X_2; Y_1) + I(X_1, X_2; Y_2|Y_1) \\ &= I(X_1, X_2; Y_1) + H(Y_2|Y_1) - H(Y_2|Y_1, X_1, X_2) \\ &\overset{(i)}{\leq} I(X_1, X_2; Y_1) + H(Y_2) - H(Y_2|Y_1, X_1, X_2) \\ &\overset{(ii)}{=} I(X_1, X_2; Y_1) + H(Y_2) - H(Y_2|X_1, X_2) \\ &= I(X_1, X_2; Y_1) + I(X_1, X_2; Y_2). \end{aligned}$$

(i) Conditioning reduces entropy, (ii) Οι Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες *δεδομένων των* X_1 και X_2.
Η ισότητα ισχύει όταν $H(Y_2|Y_1) = H(Y_2)$, όταν, δηλαδή, οι Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες (και όχι απλώς ανεξάρτητες δεδομένων των X_1 και X_2).

$\boxed{\text{Παρατηρήσεις:}}$

Κάποιοι δεν πρόσεξαν ότι στο Ερώτημα (α), η ισότητα ισχύει όταν οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες *δεδομένης* της Z. Η ανεξαρτησία των X_1 και X_2 (η οποία, άλλωστε, είχε υποτεθεί στο πρόβλημα) δεν αρκεί.

18. ► **Ο σκύλος που ψάχνει για το κόκκαλο – Cover & Thomas 4.12**

Ένας σκύλος κινείται επάνω στους ακέραιους αριθμούς. Σε κάθε βήμα συνεχίζει προς την ίδια κατεύθυνση με πιθανότητα 0.9, ενώ αλλάζει κατεύθυνση με πιθανότητα 0.1. Υποθέστε ότι ο σκύλος ξεκινά από τη θέση $X_0 = 0$ και ότι το πρώτο βήμα μπορεί να γίνει προς οποιαδήποτε κατεύθυνση (θετική ή αρνητική) με την ίδια πιθανότητα. Για παράδειγμα, μια πιθανή διαδρομή του σκύλου είναι

$(X_0, X_1, \ldots) = (0, -1, -2, -3, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, ...)$.

(α) Υπολογίστε την $H(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Από τον κανόνα αλυσίδας,

$$\begin{aligned} H(X_0, X_1, \ldots, X_n) &= \sum_{i=0}^{n} H(X_i|X_{i-1}, \ldots, X_0) \\ &= H(X_0) + H(X_1|X_0) + \sum_{i=2}^{n} H(X_i|X_{i-1}, \ldots, X_0). \end{aligned}$$

- $H(X_0) = 0$ δεδομένου ότι η θέση του σκύλου τη χρονική στιγμή 0 μας είναι γνωστή ($X_0 = 0$).
- $H(X_1|X_0) = H(1/2) = 1$, καθώς έχουμε υποθέσει ότι το πρώτο βήμα του σκύλου γίνεται προς μια από τις 2 κατευθύνσεις (-1 ή 1) με την ίδια πιθανότητα.

- Παρατηρούμε ότι, για τα επόμενα βήματα, η θέση του σκύλου τη χρονική στιγμή i εξαρτάται μόνο από τη θέση του τις χρονικές στιγμές $i-1$ και $i-2$, δεδομένου ότι, πριν προχωρήσει στο βήμα i, ο σκύλος είτε συνεχίζει στην ίδια κατεύθυνση με αυτή που είχε μεταξύ των βημάτων $i-2$ και $i-1$, ή αντιστρέφει την πορεία του. Σε κάθε περίπτωση, ο σκύλος λαμβάνει υπόψη του μόνο την κατεύθυνση που είχε μεταξύ των βημάτων $i-2$ και $i-1$, ανεξαρτήτως της διαδρομής του πριν από το βήμα $i-2$. Μαθηματικά, η πορεία του σκύλου αποτελεί τυχαία διαδικασία Markov 2ης τάξης, και

$$\begin{aligned} p(x_i|x_{i-1},\dots,x_0) &= p(x_i|x_{i-1},x_{i-2}) \\ &= \begin{cases} 0.9 & \text{όταν} \quad (x_i - x_{i-1}) = (x_{i-1} - x_{i-2}),\ |x_i - x_{i-1}| = 1 \\ 0.1 & \text{όταν} \quad (x_i - x_{i-1}) = -(x_{i-1} - x_{i-2}),\ |x_i - x_{i-1}| = 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \end{aligned}$$

  Επομένως, $H(X_i|X_{i-1},X_{i-2},\dots,X_0) = H(X_i|X_{i-1},X_{i-2}) = H(0.9,0.1) = -0.9\log 0.9 - 0.1\log 0.1$ bits.

Αντικαθιστώντας στον κανόνα αλυσίδας,

$$\begin{aligned} H(X_0,X_1,\dots,X_n) &= \sum_{i=0}^{n} H(X_i|X_{i-1},\dots,X_0) \\ &= H(X_0) + H(X_1|X_0) + \sum_{i=2}^{n} H(X_i|X_{i-1},X_{i-2}) \\ &= 0 + 1 + (n-1)H(0.9,0.1) = 1 + (n-1)H(0.9,0.1). \end{aligned}$$

(β) Υπολογίστε το ρυθμό εντροπίας, $H(\mathcal{X})$, της θέσης του σκύλου.

Απάντηση:

Από τον ορισμό του ρυθμού εντροπίας,

$$\begin{aligned} H(\mathcal{X}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} H(X_0,X_1,\dots,X_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} H(0.9,0.1) \right) = H(0.9,0.1). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} H(\mathcal{X}) &= H(\mathcal{X}') \\ &= \lim_{n\to\infty} (X_n|X_{n-1},X_{n-2},\dots,X_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} (X_n|X_{n-1},X_{n-2}) = H(0.9,0.1). \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι λογικό διαισθητικά, αφού σε κάθε βήμα αυτό που δεν ξέρουμε (η αβεβαιότητα) είναι ποια κατεύθυνση θα επιλέξει ο σκύλος μεταξύ 2 πιθανών κατευθύνσεων.

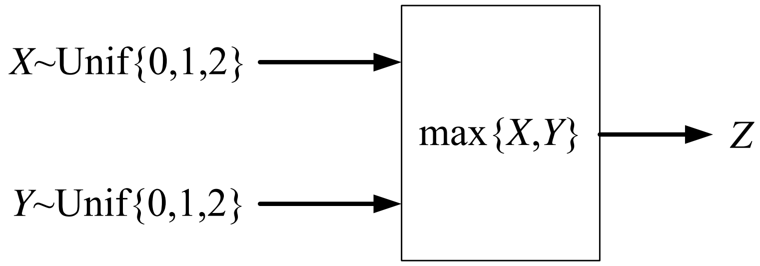
Παρατηρήστε, επίσης, ότι εάν δε λαμβάναμε υπόψη μας το γεγονός ότι ο σκύλος αποφασίζει μόνο με βάση τις 2 τελευταίες θέσεις του, θα χρειαζόμασταν περισσότερα bits για να κωδικοποιήσουμε τις κινήσεις του.

19. **Μέγιστο δύο τ.μ. (Πρόοδος Θ. Π., Νοέμβριος 2009)**

Θεωρούμε το ντετερμινιστικό σύστημα του Σχήματος 7. Οι τ.μ. X και Y ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2\}$. Οι X και Y είναι *ανεξάρτητες* μεταξύ τους. Το κύκλωμα υπολογίζει την έξοδο με χρήση της σχέσης $Z = \max\{X, Y\}$.

Δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και $\log_2 5 \approx 2.3219$.

Εάν προτιμάτε, μπορείτε να αφήσετε στις απαντήσεις σας όρους της μορφής $H(\mathbf{p}) = H(p_1, p_2, \ldots, p_K)$ χωρίς να τους υπολογίσετε, αρκεί να δώσετε τις τιμές των $p_1, p_2, \ldots, p_K$.



Σχήμα 7: Υπολογισμός μεγίστου δύο τ.μ.

(α) Υπολογίστε την $H(X)$ και την $I(X;Y)$.

Απάντηση:

Δεδομένου ότι η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή, $H(X) = \log_2 3$ bits.

Επειδή οι X και Y είναι ανεξάρτητες, $I(X;Y) = 0$.

(β) Υπολογίστε την $H(Z)$ και την $I(X;Z)$.

Απάντηση:

Για να βρούμε την $H(Z)$ βρίσκουμε, κατ' αρχάς, την κατανομή της Z. Παρατηρούμε ότι $Z = 0$ όταν $(X,Y) = (0,0)$, $Z = 1$ όταν $(X,Y) \in \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$ και $Z = 2$ όταν $(X,Y) \in \{(0,2),(2,0),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. Δεδομένου ότι όλα τα ζεύγη (X,Y) είναι ισοπίθανα, $\{p_Z(0), p_Z(1), p_Z(2)\} = \left\{\frac{1}{9}, \frac{3}{9}, \frac{5}{9}\right\}$. Εναλλακτικά, $\Pr\{Z = 0\} = \Pr\{X = 0 \text{ και } Y = 0\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, $\Pr\{Z = 2\} = \Pr\{X = 2 \text{ ή } Y = 2\} = \Pr\{X = 2\} + \Pr\{Y = 2\} - \Pr\{X = 2 \text{ και } Y = 2\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$ και $\Pr\{Z = 1\} = 1 - \Pr\{Z = 0\} - \Pr\{Z = 2\} = \frac{3}{9}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} H(Z) &= \frac{1}{9}\log 9 + \frac{1}{3}\log 3 + \frac{5}{9}\log\frac{9}{5} \\ &= \frac{2}{9}\log 3 + \frac{1}{3}\log 3 + \frac{10}{9}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5 \\ &= \frac{15}{9}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5 \approx 1.3516 \text{ bits}. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, από την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας,

$$
\begin{aligned}
H(Z) &= H(Z \stackrel{?}{=} 0) + p_Z(Z > 0)H(Z \stackrel{?}{=} 1|Z \neq 0) \\
&= H\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{8}{9}H\left(\frac{3}{8}\right) \\
&= \frac{1}{9}\log 9 + \frac{8}{9}\log\frac{9}{8} + \frac{8}{9}\left(\frac{3}{8}\log\frac{8}{3} + \frac{5}{8}\log\frac{8}{5}\right) \\
&= \frac{2}{9}\log 3 + \frac{16}{9}\log 3 - \frac{24}{9} + \frac{24}{9} - \frac{1}{3}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5 \\
&= \frac{15}{9}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5 \approx 1.3516 \text{ bits.}
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την $H(Z|X)$ που απαιτείται για τον υπολογισμό της $I(X;Z)$

$$
\begin{aligned}
H(Z|X) &= p_X(0)H(Z|X=0) + p_X(1)H(Z|X=1) + p_X(2)H(Z|X=2) \\
&= \frac{1}{3}H(Y) + \frac{1}{3}H(Y \leq 1) + \frac{1}{3} \times 0 \\
&= \frac{1}{3}\log 3 + \frac{1}{3}H\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\log 3 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\log 3 + \frac{2}{3}\log\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\log 3 + \frac{1}{3}\left(\log 3 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\log 3 - \frac{2}{9} \approx 0.8344 \text{ bits.}
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
I(X;Z) &= H(Z) - H(Z|X) \\
&= \frac{15}{9}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5 - \frac{2}{3}\log 3 + \frac{2}{9} \\
&= \log 3 - \frac{5}{9}\log 5 + \frac{2}{9} \approx 0.5172 \text{ bits.}
\end{aligned}
$$

(γ) Βρείτε ένα βέλτιστο *άμεσο δυαδικό* κώδικα για τη Z και συγκρίνετε το μέσο μήκος του με την $H(Z)$.

Απάντηση:

Ένας τρόπος να βρούμε το βέλτιστο κώδικα είναι με τη χρήση κωδικοποίησης Huffman. Ένας κώδικας Huffman είναι ο $\{0,1,2\} \leftrightarrow \{\texttt{00}, \texttt{01}, \texttt{1}\}$.

Το μέσο μήκος του κώδικα ισούται με $\mathbb{E}[l] = 2 \times \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{9} = \frac{13}{9} \approx 1.4444$ bits. Παρατηρούμε ότι επιτυγχάνεται συμπίεση με 0.0924 bits μακριά από την εντροπία, $H(Z)$.

(δ) Δείξτε ότι $I(X;Y|Z) > 0$ (*όχι* $\geq$). Συγκρίνετε με την $I(X;Y)$ του Ερωτήματος (α).

Υπόδειξη: Η απάντηση προκύπτει πολύ πιο σύντομα αν χρησιμοποιήσετε ιδιότητες εντροπίας ή/και αμοιβαίας πληροφορίας και δείτε τι ισχύει στο συγκεκριμένο πρόβλημα, παρά αν κάνετε πράξεις.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Η $I(X;Y|Z)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $I(X;Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z)$. Επίσης, από τον κανόνα αλυσίδας για την εντροπία,

$$H(X,Y|Z) = H(Y|Z) + H(X|Y,Z) \Rightarrow -H(X|Y,Z) = H(Y|Z) - H(X,Y|Z).$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη σχέση, προκύπτει ότι

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z).$$

Η παραπάνω σχέση είναι ανάλογη της (2.45) του βιβλίου των Cover & Thomas για δεσμευμένη αμοιβαία πληροφορία.

Γνωρίζουμε ότι $H(X,Y|Z) \leq H(X|Z) + H(Y|Z)$ με $=$ όταν οι X και Y είναι ανεξάρτητες *δεδομένης της* Z. Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν $Z = 0$, τότε γνωρίζουμε ότι η μόνη τιμή που επιτρέπεται για το ζεύγος (X,Y) είναι η (0,0). Συνεπώς, $H(X,Y|Z) < H(X|Z) + H(Y|Z)$ και $I(X;Y|Z) > 0$. Επομένως, αν γνωρίζουμε την τιμή της Z, η "αποκάλυψη" της X μας δίνει πληροφορία για την Y και αντιστρόφως (κατά μέσο όρο).

Η (απευθείας) απάντηση ότι $I(X;Y|Z) > 0$ όταν οι X και Y δεν είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δεδομένης της Z γίνεται δεκτή, αρκεί να δείξετε ότι δεν ισχύει η υπό συνθήκη ανεξαρτησία.

(ε) Εάν τόσο ο συμπιεστής όσο και ο αποσυμπιεστής γνωρίζουν, με κάποιο τρόπο, την τιμή της Y (αλλά όχι της X), προτείνετε ένα βέλτιστο *άμεσο δυαδικό* κώδικα για τη συμπίεση της Z. Πόσο αποδοτικός είναι ο κώδικας;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

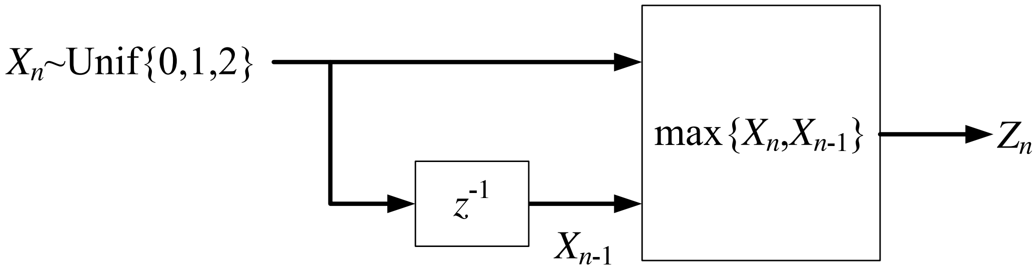
Εδώ πρέπει να δείτε ότι πρέπει να συμπιέσουμε με χρήση της κατανομής $p_{Z|Y}$ και ότι το θεωρητικό κάτω όριο είναι η $H(Z|Y)$. Εάν $Y = 2$, $Z = 2$ με πιθανότητα 1, οπότε δε χρειάζεται να κωδικοποιήσουμε τη Z. Αν $Y = 0$, τότε η Z ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με τιμές $\{0, 1, 2\}$. Ένας βέλτιστος κώδικας είναι ο $\{\texttt{0}, \texttt{10}, \texttt{11}\}$. Τέλος, εάν $Y = 1$, η Z ακολουθεί κατανομή Bern(2/3) με τιμές $\{1, 2\}$. Συνεπώς, αρκεί ο κώδικας $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$. Στην ουσία έχουμε 2 βιβλία κωδίκων (2 "λεξικά"). Το λεξικό που θα χρησιμοποιήσουμε εξαρτάται από την τιμή της Y, την οποία γνωρίζει τόσο ο συμπιεστής όσο και ο αποσυμπιεστής. Στην περίπτωση όπου $Z = 0$ δε χρειάζεται λεξικό γιατί δεν απαιτείται κωδικοποίηση.

Το μέσο μήκος του κώδικα ισούται με

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[l] &= \Pr\{Y=0\}\times 0 + \Pr\{Y=1\}\left(\frac{2}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 1\right)\\ &+ \Pr\{Y=2\}\left(\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{3}\times 2\right)\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{8}{9}\approx 0.8889 \text{ bits.}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι επιτυγχάνεται συμπίεση αρκετά κοντά στην $H(Z|Y)=H(Z|X)$ που υπολογίστηκε στο Ερώτημα (β).

Θεωρήστε, τώρα, το τροποποιημένο σύστημα του Σχήματος 8. Τώρα χρησιμοποιούμε το κύκλωμα $\max\{\cdot\}$ σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Η τ.μ. Y έχει αντικατασταθεί από το δείγμα της X την προηγούμενη χρονική στιγμή, δηλαδή $Z_n=\max\{X_n,X_{n-1}\}$. Θεωρούμε, και πάλι, ότι $X_n \sim$Unif$\{0,1,2\}$. Επίσης, οι X_n είναι ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.). Θεωρούμε (παρόλο που δεν έχει ιδιαίτερη σημασία) ότι ο χρόνος αρχίζει τη στιγμή $n=0$ και ότι $X_{-1}=0$.



Σχήμα 8: Τροποποιημένο σύστημα.

(στ) Υπολογίστε την $H(Z_n)$ για $n>0$ και την $I(X_n;X_{n-1})$ για $n\geq 1$.

Απάντηση:

Η κατανομή της Z_n είναι η ίδια όπως και στο Ερώτημα (α).
Επομένως, $H(Z_n)=\log_2 3$ bits.
Επειδή η $\{X_n\}$ είναι i.i.d., οι X_n και X_{n-1} είναι ανεξάρτητες. Επομένως, $I(X_n;X_{n-1})=0$.

(ζ*) Υπολογίστε την $H(Z_n|Z_{n-1})$ για $n>1$. Είναι η $\{Z_n\}$ i.i.d.;

Απάντηση:

Για να βρούμε την $H(Z_n|Z_{n-1})$ παρατηρούμε ότι:

- Αν $Z_{n-1}=0$ τότε $X_{n-1}=0$.

Επομένως, $Z_n=\max\{X_n,0\}=X_n\sim$ Unif$(\{0,1,2\})$ και $H(Z_n|Z_{n-1}=0)=\log 3$.

• Αν $Z_{n-1} = 1$ τότε $X_{n-1} = 1$ με πιθανότητα $2/3$ ή $X_{n-1} = 0$ με πιθανότητα $1/3$ γιατί υπάρχουν 3 ισοπίθανα ενδεχόμενα που παράγουν $Z_{n-1} = 1$: $(X_{n-1}, X_{n-2}) = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Με χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας,
$p_{Z_n|Z_{n-1}}(Z_n|Z_{n-1} = 1) = \left\{\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, \frac{3}{9}\right\}$.
Συνεπώς, $H(Z_n|Z_{n-1} = 1) = H\left(\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, \frac{3}{9}\right) \approx 1.3516$ bits.

• Αν $Z_{n-1} = 2$ τότε $X_{n-1} = 0$ με πιθανότητα $1/5$ ή $X_{n-1} = 1$ με πιθανότητα $1/5$ ή $X_{n-1} = 2$ με πιθανότητα $3/5$ γιατί υπάρχουν 5 ισοπίθανα ενδεχόμενα που παράγουν $Z_{n-1} = 2$: $(X_{n-1}, X_{n-2}) = \{(0,2),(1,2),(2,2),(2,1),(2,0)\}$. Με χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας,
$p_{Z_n|Z_{n-1}}(Z_n|Z_{n-1} = 2) = \left\{\frac{1}{15}, \frac{3}{15}, \frac{11}{15}\right\}$.
Συνεπώς, $H(Z_n|Z_{n-1} = 2) = H\left(\frac{1}{15}, \frac{3}{15}, \frac{11}{15}\right) \approx 1.0530$ bits.

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω,

$$
\begin{aligned}
H(Z_n|Z_{n-1}) &= \Pr\{Z_{n-1} = 0\}H(Z_n|Z_{n-1} = 0)+ \\
&= \Pr\{Z_{n-1} = 1\}H(Z_n|Z_{n-1} = 1)+ \\
&= \Pr\{Z_{n-1} = 2\}H(Z_n|Z_{n-1} = 2) \\
&\approx \frac{1}{9} \times \log 3 + \frac{1}{3} \times 1.3516 + \frac{5}{9} \times 1.0530 = 1.2116 \text{ bits.}
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι, σε αντίθεση με την περίπτωση όπου οι X και Y προέρχονται από διαφορετικές πηγές (οπότε και $H(Z_n|Z_{n-1}) = H(Z_n) \approx 1.3516$ bits), στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε τη X_{n-1} στη θέση της Y η έξοδος δεν είναι, πλέον, i.i.d. Η τελευταία παρατήρηση μπορεί να γίνει και απευθείας από το γεγονός ότι, τόσο η Z_n όσο και η Z_{n-1} εξαρτώνται από τη X_{n-1}.

(η*) Συγκρίνετε την $H(Z_n|Z_{n-1}, Z_{n-2})$ (για $n > 2$) με την $H(Z_n|Z_{n-1})$. Δε χρειάζεται να βρείτε ακριβή τιμή, απλώς να προσδιορίσετε εάν
$H(Z_n|Z_{n-1}, Z_{n-2}) = H(Z_n|Z_{n-1})$ ή όχι. Είναι η $\{Z_n\}$ αλυσίδα Markov 1ης τάξης;

Απάντηση:

Από το προηγούμενο ερώτημα, εάν $Z_{n-1} = 0$, τότε ξέρουμε ότι $X_{n-1} = 0$ με πιθανότητα 1 και γνώση της Z_{n-2} δε μας δίνει καμια επιπλέον πληροφορία που μπορεί να μας χρησιμεύσει για τη Z_n, αφού δεν μπορούμε να ξέρουμε τίποτα από πριν για τη X_n.

Εάν $Z_{n-1} = 1$, αυτό σημαίνει ότι έχει εμφανιστεί ένα από 3 ισοπίθανα ενδεχόμενα (X_{n-1}, X_{n-2}): (0,1), (1,0) ή (1,1). Εάν, τώρα, μάθουμε ότι $Z_{n-2} = 0$, αυτό σημαίνει ότι $X_{n-2} = 0$. Επομένως, μαθαίνουμε με βεβαιότητα ότι $X_{n-1} = 1$. Αυτό αλλάζει την κατανομή της Z_n σε σχέση με την περίπτωση που ξέραμε μόνο τη Z_{n-1}. Άρα, δεδομένου ότι το ενδεχόμενο $(Z_{n-1}, Z_{n-2}) = (1,0)$ εμφανίζεται με μη μηδενική πιθανότητα, $H(Z_n|Z_{n-1}, Z_{n-2}) \neq H(Z_n|Z_{n-1})$. Γνωρίζουμε, όμως, ότι $H(X|Y) \leq H(X)$. Συνεπώς, $H(Z_n|Z_{n-1}, Z_{n-2}) < H(Z_n|Z_{n-1})$ και η $\{Z_n\}$ δεν είναι αλυσίδα Markov 1ης τάξης!

$\boxed{\text{Παρατηρήσεις:}}$

Γενικά, οι επιδόσεις στην Πρόοδο ήταν καλές. Κάποιοι έχασαν χρόνο για να υπολογίσουν την $p_{Z|X}$ για $X = 0, 1$ και 2 με χρήση του θεωρήματος Bayes. Η προσέγγιση είναι σωστή, απλώς η $p_{Z|X}$ προκύπτει πιο γρήγορα με επισκόπηση του προβλήματος. Το Ερώτημα (ε) προβλημάτισε τους περισσότερους. Κανείς δε μας απαγορεύει να αλλάζουμε τον κώδικα ανάλογα με την τιμή της Y. Ένας κώδικας που εξαρτάται από την τιμή της Y είναι και αυτός ένας κώδικας! Αρκεί κωδικοποιητής και αποκωδικοποιητής να γνωρίζουν ακριβώς τον κώδικα συναρτήσει της Z και της Y.

20. **Επέμβαση σε δυαδική ακολουθία (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2010)**

Σημείωση: Εάν σε κάποια ερωτήματα της άσκησης ο υπολογισμός της εντροπίας δεν είναι τετριμμένος, εάν το επιθυμείτε η απάντησή σας μπορεί να περιέχει όρους της μορφής $H(\mathbf{p})$, αρκεί να διευκρινίσετε ποια είναι η κατανομή $\mathbf{p}$.

Θεωρούμε ακολουθία ανεξάρτητων και ομοίως κατανεμημένων (i.i.d.) τ.μ.

$X_i \sim \text{Bern}(1/2)$. Οι επιτρεπτές τιμές των X_i είναι 0 ή 1.

(α) Υπολογίστε την $H(X_i)$, την $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ (για πεπερασμένο n) και το ρυθμό εντροπίας, $H(\mathcal{X})$, εάν αυτός ορίζεται. Πόσα bits (κατά μέσο όρο) απαιτούνται για τη συμπίεση n διαδοχικών δειγμάτων της στοχαστικής ανέλιξης, $\{X\} = \{\ldots, X_1, X_2, \ldots\}$; Αλλάζει η απάντησή σας αν τα δείγματα που συμπιέζονται δεν είναι, κατ' ανάγκη, διαδοχικά;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Δεδομένου ότι η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή, $H(X_i) = \log_2 2 = 1$ bit.

Επειδή οι X_i είναι ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες, $H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i) = n$ bits.

Η ακολουθία των X_i είναι στάσιμη (κατά την αυστηρή έννοια) και εργοδική. Συνεπώς, ο ρυθμός εντροπίας έχει νόημα. $H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(X_1^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$ bit/symbol. Εναλλακτικά, $H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} H(X_n|X_1^{n-1}) = \lim_{n\to\infty} H(X_n) = 1$ bit/symbol.

Για τη συμπίεση n δειγμάτων της στοχαστικής ανέλιξης $\{X\}$ απαιτούνται κατά μέσο όρο $nH(\mathcal{X}) = n$ bits. Επειδή οι X_i είναι i.i.d. η απάντηση δεν αλλάζει εάν τα δείγματα δεν είναι διαδοχικά.

(β) Έστω, τώρα, ότι, για λόγους συγχρονισμού θέλουμε να είμαστε βέβαιοι ότι η ακολουθία θα παίρνει την τιμή '1' ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Ένας τρόπος για να το διασφαλίσουμε είναι μετά από κάθε 3 σύμβολα της ακολουθίας $\{X\}$ να εισάγουμε και ένα σύμβολο '1', ανεξαρτήτως των τιμών των 3 συμβόλων. Δηλαδή το κύκλωμα που προσθέτει σύμβολα δε χρειάζεται να εξετάζει τις τιμές της ακολουθίας $\{X\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} Y_{4k+j} &= X_{3k+j} \quad && k \in \mathbb{Z}, j \in 0, 1, 2 \\ Y_{4k+3} &= 1 && k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Υπολογίστε την $H(Y_i)$, την $H(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ (για πεπερασμένο n) και το ρυθμό εντροπίας, $H(\mathcal{Y})$, εφόσον αυτός ορίζεται. Πόσα bits (κατά μέσο όρο) απαιτούνται για τη συμπίεση n διαδοχικών δειγμάτων της στοχαστικής ανέλιξης,
$\{Y\} = \{\ldots, Y_1, Y_2, \ldots\}$;

Απάντηση:

Σε αυτήν την περίπτωση, η $H(Y_i)$ εξαρτάται από το δείκτη i. Για $i \mod 4 = 3$, $H(Y_i) = 0$, δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι $Y_i = 1$. Αλλιώς, $H(Y_i) = 1$ bit.

Ομοίως, και η $H(Y_1, Y_2, \ldots, X_n)$ εξαρτάται από την τιμή του n. Εάν $n = 4q + r$ και $s = \min\{r, 2\}$, $H(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 3q + s + 1$ bits.

Η στοχαστική ανέλιξη $\{Y\}$ δεν είναι στάσιμη, επειδή οι ιδιότητές της εξαρτώνται από τη χρονική στιγμή που εξετάζουμε (δεδομένου ότι το 4ο σύμβολο κάθε τετράδας ισούται πάντοτε με 1). Αν υπολογίσουμε το ρυθμό εντροπίας ως
$H(\mathcal{Y}) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(Y_1^n)}{n}$, $H(\mathcal{Y}) = 3/4$ bits/symbol. Ωστόσο, αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\lim_{n\to\infty} H(Y_n|Y_1^{n-1})$ το όριο δεν υπάρχει. Γενικά, παρόλο που η πληροφορία που περιέχεται κατά μέσο όρο σε κάθε σύμβολο της $\{Y\}$ είναι 3/4 bits, η πληροφορία δεν είναι κατανεμημένη ομοιόμορφα στην ακολουθία.

Για τη συμπίεση n διαδοχικών δειγμάτων της στοχαστικής ανέλιξης $\{Y\}$ απαιτούνται κατά μέσο όρο $3n/4$ bits.

(γ) Στο προηγούμενο ερώτημα υποθέσαμε ότι γνωρίζουμε τις θέσεις όπου έχουν τοποθετηθεί οι τιμές '1'. Υποθέστε, τώρα, ότι γνωρίζουμε μεν ότι μετά από κάθε 3 σύμβολα τοποθετείται ένα '1', αλλά δε γνωρίζουμε την αρχή της ακολουθίας, με αποτέλεσμα να μην ξέρουμε το δείκτη του σύμβολου που εξετάζουμε. Δηλαδή, θεωρούμε την ακολουθία $\{\tilde{Y}\}$, όπου, για κάθε i, $\tilde{Y}_i = Y_{i+m}$, με σταθερή, αλλά άγνωστη μετατόπιση m.

Υπολογίστε την $H(\tilde{Y}_i)$. Επίσης, υπολογίστε την $H(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_n)$, αλλά αυτή τη φορά για $n \to \infty$. Πόσα bits (κατά μέσο όρο) απαιτούνται για τη συμπίεση n διαδοχικών δειγμάτων της στοχαστικής ανέλιξης, $\{\tilde{Y}\} = \{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots\}$; Υπενθυμίζεται ότι, σε αντίθεση με τα προηγούμενα ερωτήματα, $n \to \infty$.

Υπόδειξη: Μπορείτε να βρείτε την $H(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_n)$ για $n \to \infty$ με βάση τα μέχρι τώρα ερωτήματα χωρίς να κάνετε πράξεις. Εάν σας χρειαστεί δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και $\log_2 5 = 2.322$.

Απάντηση:

Για να βρούμε την $H(\tilde{Y}_i)$ υπολογίζουμε την κατανομή της $\tilde{Y}_i$. Δεδομένου ότι η μετατόπιση m είναι τυχαία, με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, $m \mod 4 = 3$. Στην περίπτωση αυτή, $\tilde{Y}_i = 1$. Αλλιώς, $\tilde{Y}_i \sim \mathrm{Bern}(1/2)$. Επομένως, από το θεώρημα ολικής πιθανότητας,

$$p_{\tilde{Y}_i}(0) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$
$$p_{\tilde{Y}_i}(1) = 1 - p_{\tilde{Y}_i}(0) = \frac{5}{8}.$$

Συνεπώς, $H(\tilde{Y}_i) = H(3/8) \approx 0.9544$ bits. Παρατηρούμε ότι, παρόλο που δε γνωρίζουμε αν η i είναι θέση στην οποία έχει εισαχθεί σύμβολο '1' ή όχι, η τ.μ. $\tilde{Y}_i$ είναι λιγότερο τυχαία από τη X_i, αφού η πιθανότητα να ισούται με 1 είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να ισούται με 0.

Για να βρούμε την $H(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_n)$ για $n \to \infty$ χρησιμοποιούμε τον κανόνα αλυσίδας για την εντροπία

$$H(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_n) = \sum_{i=1}^{n} H(\tilde{Y}_n | \tilde{Y}_1^{n-1}).$$

Αρχικά, η αβεβαιότητά μας για την Y_1 (το χρονικό σημείο όπου αρχίζουμε να παρατηρούμε την ακολουθία) θα ισούται με $H(3/8)$. Καθώς παρατηρούμε τα δείγματα, η αβεβαιότητα θα μειώνεται και θα αρχίσουμε να "υποψιαζόμαστε" ποια είναι η τιμή του $m \mod 4$. Κάποια στιγμή, θα εμφανιστεί μια ακολουθία από τρία '0' (η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι μη μηδενική), οπότε θα μπορέσουμε να προσδιορίσουμε ακριβώς ποιες είναι οι θέσεις όπου εισάγονται τα '1'. Από εκείνο το σημείο γνωρίζουμε, πλέον, το $m \mod 4$, με αποτέλεσμα η μέση εντροπία να ισούται με 3/4 bits/σύμβολο, όπως στο προηγούμενο ερώτημα. Καθώς το $n \to \infty$, η συμβολή των αρχικών όρων στην από κοινού εντροπία εξαφανίζεται, με αποτέλεσμα $H(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_n) \approx \frac{3}{4}n$ bits και να χρειαζόμαστε κατά μέσο όρο 3/4 bits για να κωδικοποιήσουμε κάθε σύμβολο. Εναλλακτικά, μπορούμε να δοκιμάσουμε τις 4 διαφορετικές τιμές του $m \mod 4$ και να βρούμε για ποια τιμή όλα τα $\tilde{Y}_{i+m}$, $i = 4k$ ισούνται με 1.

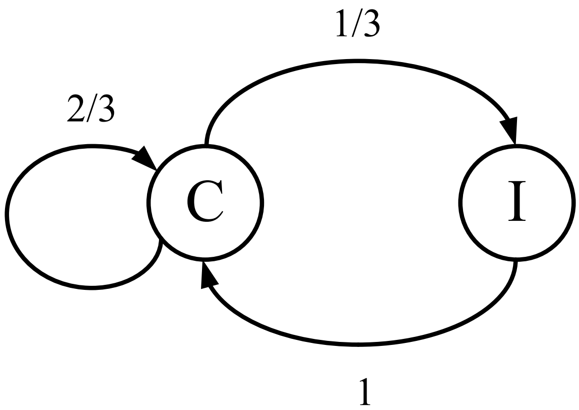
(δ) Υποθέστε, τέλος, ότι, αντί να τοποθετούμε σύμβολα με τιμές '1' πάντοτε στην ίδια θέση, τα εισάγουμε ως εξής: Μετά από κάθε σύμβολο X_i, παίρνουμε μία τυχαία απόφαση (η οποία *δεν* εξαρτάται από την τιμή της X_i). Με πιθανότητα $p = 1/3$ εισάγουμε ένα '1' μετά από το X_i, ενώ με πιθανότητα $1 - p = 2/3$ προχωράμε στο επόμενο σύμβολο, X_{i+1}, της $\{X\}$. Ονομάζουμε την τυχαία διαδικασία που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο $\{Z\}$.

Υπολογίστε την $H(Z_i)$ και την $H(Z_i|Z_{i-1})$. Εάν κωδικοποιούμε τα σύμβολα της ακολουθίας $\{Z\}$ *ανά ζεύγη*, κερδίζουμε κάτι αν φτιάξουμε τον κώδικα με χρήση της $p_{Z_i Z_{i-1}}(z_i, z_{i-1})$ αντί να χρησιμοποιήσουμε την (προσεγγιστική) υπόθεση ότι $p_{Z_i Z_{i-1}}(z_i, z_{i-1}) = p_{Z_i}(z_i) p_{Z_{i-1}}(z_{i-1})$;

Απάντηση:

Παρατηρούμε, κατ' αρχάς, ότι η $\{Z\}$ είναι στάσιμη, γιατί ενεργούμε με τον ίδιο τρόπο για τη δημιουργία της από τη $\{X\}$, ανεξαρτήτως της χρονικής στιγμής, i. Θεωρούμε αλυσίδα Markov με δύο καταστάσεις: Στην κατάσταση C(opy), $Z_j = X_i$, όπου i το πρώτο δείγμα της $\{X\}$ που δεν έχει χρησιμοποιηθεί ακόμα για τη δημιουργία της $\{Z\}$. Στην κατάσταση I(nsert), $Z_j = 1$. Η μετάβαση ή μη από την κατάσταση C στην κατάσταση I καθορίζεται από την τιμή της τυχαίας απόφασης, έστω $U \sim \text{Bern}(1/3)$. Από την κατάσταση I μεταβαίνουμε πάντοτε στην κατάσταση C, δηλαδή αν τοποθετήσουμε ένα σύμβολο '1', την επόμενη φορά θα τοποθετήσουμε ένα σύμβολο X_i κ.ο.κ. Το διάγραμμα της αλυσίδας Markov δίνεται στο Σχήμα 9, ενώ ο πίνακας μετάβασης είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 9: Αλυσίδα Markov για μοντελοποίηση της τοποθέτησης '1' στη $\{Z\}$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να μεταβούμε από οποιαδήποτε κατάσταση της αλυσίδας στην άλλη με πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Επίσης, η αλυσίδα είναι απεριοδική. Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή της $\boldsymbol{\mu} = [\mu_C \ \mu_I]$.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}\mu_C = \mu_I \Rightarrow \mu_C = 3\mu_I \\ &\mu_C + \mu_I = 1 \Rightarrow \mu_I = \frac{1}{4} \Rightarrow \mu_C = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Όταν η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση C τη χρονική στιγμή i, $Z_i \sim \mathrm{Bern}(1/2)$, ενώ όταν βρίσκεται στην κατάσταση I, $Z_i = 1$. Συμβολίζοντας την τ.μ. που υποδηλώνει την κατάσταση της αλυσίδας τη χρονική στιγμή i με S_i και από το θεώρημα ολικής πιθανότητας,

$$\begin{aligned} p_{Z_i}(z_i) &= \sum_{\mathcal{S}} p_{Z_i S_i}(z_i, s_i) = \Pr\{S_i = C\}p(z_i|S_i = C) + \Pr\{S_i = I\}p(z_i|S_i = I) \\ &= \mu_C p(z_i|S_i = C) + \mu_I p(z_i|S_i = I). \end{aligned}$$

Επομένως, $p_{Z_i}(0) = \frac{3}{8}$ και $p_{Z_i}(1) = \frac{5}{8}$. Συνεπώς, $H(Z_i) = H(3/8) \approx 0.9544$ bits. Η πιθανότητα $Z_i = 0$ αν $Z_{i-1} = 0$ ισούται με την πιθανότητα να μην εισάγουμε '1' μετά τη Z_{i-1} επί την πιθανότητα η τιμή της X_j να ισούται με 0, δηλαδή $p_{Z_i|Z_{i-1}}(0|0) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ και $p_{Z_i|Z_{i-1}}(1|0) = 1 - p_{Z_i|Z_{i-1}}(1|0) = \frac{2}{3}$. Η πιθανότητα $Z_i = 0$ αν $Z_{i-1} = 1$ ισούται και πάλι με την πιθανότητα να μην εισάγουμε '1' επί την πιθανότητα η τιμή της X_j να ισούται με 0, δηλαδή $p_{Z_i|Z_{i-1}}(0|1) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ και $p_{Z_i|Z_{i-1}}(1|1) = 1 - p_{Z_i|Z_{i-1}}(0|1) = \frac{2}{3}$. Συνεπώς,

$$H(Z_i|Z_{i-1}) = H(1/3) \approx 0.9183 \text{ bits},$$

η οποία, όπως ήταν αναμενόμενο, είναι μικρότερη από $H(3/8)$.

Για να κωδικοποιήσουμε τα σύμβολα της ακολουθίας κατά ζεύγη, υπολογίζουμε την $p(z_{i+1}, z_i) = p(z_i)p(z_{i+1}|z_i)$

$$p(0,0) = \frac{3}{8}\frac{1}{3} = \frac{1}{8} = \frac{3}{24}$$
$$p(0,1) = \frac{5}{8}\frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$
$$p(1,0) = \frac{3}{8}\frac{2}{3} = \frac{6}{24}$$
$$p(1,1) = \frac{5}{8}\frac{2}{3} = \frac{10}{24}$$

Ο κώδικας Huffman για την $p_{Z_{i+1}Z_i}(z_{i+1}, z_i)$ είναι ο $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \leftrightarrow \{\mathtt{000},\mathtt{001},\mathtt{01},\mathtt{1}\}$ με μέσο μήκος ίσο με

$$\mathbb{E}[l^*] = 1 \times \frac{10}{24} + 2 \times 624 + 3 \times \frac{8}{24} = \frac{46}{24} \approx 1.916 \text{ bits.}$$

Επομένως, μπορούμε να επιτύχουμε συμπίεση με 0.958 bits/σύμβολο κατά μέσο όρο.

Αν χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση $p_{Z_{i+1}}(z_{i+1})p_{Z_i}(z_i)$,

$$p(0)p(0) = \frac{9}{64}$$
$$p(0)p(1) = \frac{15}{64}$$
$$p(1)p(0) = \frac{15}{64}$$
$$p(1)p(1) = \frac{25}{64}$$

Ο (βέλτιστος) κώδικας Huffman που προκύπτει έχει τα ίδια μήκη και, επομένως, και το ίδιο μέσο μήκος, $\mathbb{E}[l^*]$. Επομένως, ακόμα και αν θεωρήσουμε τις Z_i ανεξάρτητες δεν έχουμε απώλεια στην επίδοση της συμπίεσης όταν κωδικοποιούμε ανά ζεύγη συμβόλων.

Παρατηρήσεις:

Γενικά οι επιδόσεις στα Ερωτήματα (α) έως (γ) ήταν καλές, ενώ κανείς δεν έλυσε σωστά το (δ) (με εξαίρεση ένα συνάδελφό σας που έφτασε κοντά). Πολλοί θεώρησαν ότι, σε κάθε χρονική στιγμή, i, της Z αποφασίζουμε αν θα τοποθετήσουμε '1'. Δηλαδή ότι, για κάθε χρονική στιγμή i τοποθετούμε '1' με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ ή τοποθετούμε την πρώτη μη χρησιμοποιημένη X_j με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Ωστόσο, το πρόβλημα του Ερωτήματος (δ) είναι διαφορετικό. Πάντοτε τοποθετούμε ένα X_j και μετά αποφασίζουμε αν θα τοποθετήσουμε '1', η δε απόφαση δεν εξαρτάται από την τιμή της X_j. Αυτό είναι διαφορετικό από το να υποθέσουμε ότι για κάθε δείκτη, i, της $\{Z\}$ αποφασίζουμε αν θα τοποθετήσουμε '1' ή όχι. Συγκεκριμένα, ακολουθώντας τη μέθοδο του Ερωτήματος (δ) αποκλείεται να τοποθετήσουμε δύο διαδοχικά '1'. Φυσικά, ενδέχεται δύο συνεχόμενα σύμβολα της $\{Z\}$ να είναι '1', αλλά δεν μπορεί να έχουν προκύψει από διαδοχικές τοποθετήσεις.

21. **Τυπικότητα και Από Κοινού Τυπικότητα (Τελική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Ιούνιος 2010)**

Θεωρούμε πηγή χωρίς μνήμη που παράγει ζεύγος τιμών (X, Y) (εναλλακτικά, μπορείτε να θεωρήσετε ότι έχουμε δύο εξαρτημένες πηγές χωρίς μνήμη). Η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας, $p_{XY}(x, y)$, δίνεται στον Πίνακα 2.

	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
$Y=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Πίνακας 2: Από κοινού σ.μ.π. για την Άσκηση

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί, $\log_2 3 \approx 1.585$ και $\log_2 5 \approx 2.322$.

(α) Θεωρούμε τις ακολουθίες $\mathbf{x}_1 = 00110$ και $\mathbf{y}_1 = 10010$. Είναι οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ ασθενώς ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.05$; Αν όχι, βρείτε τη μικρότερη τιμή του ϵ για την οποία οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ είναι ασθενώς ϵ-τυπικές.

Απάντηση:

Υπολογίζουμε, αρχικά, τις περιθώριες σ.μ.π. των X και Y: $p_X(0) = \frac{5}{8}$ και $p_X(1) = \frac{3}{8}$. Η p_Y είναι η ίδια με την p_X.
Επομένως,

$$\begin{aligned} H(X) = H(Y) &= \frac{5}{8}\log_2\frac{8}{5} + \frac{3}{8}\log_2\frac{8}{3} \\ &= \log_2 8 - \frac{5}{8}\log_2 5 - \frac{3}{8}\log 3 \\ &= 3 - \frac{5}{8}\log_2 5 - \frac{3}{8}\log_2 3 \approx 0.9544 \text{ bits.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}\log_2 p_{\mathbf{X}}(00110) = -\frac{1}{5}\log_2 p_{\mathbf{Y}}(10010) &= -\frac{3}{5}\log_2\frac{5}{8} - \frac{2}{5}\log_2\frac{3}{8} \\ &= \log_2 8 - \frac{3}{5}\log_2 5 - \frac{2}{5}\log_2 3 \approx 0.9729. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $|0.9729 - 0.9544| < 0.05 = \epsilon$, οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ είναι ασθενώς ϵ-τυπικές.

(β) Είναι οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ *από κοινού* ασθενώς ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.05$; Αν όχι, βρείτε τη μικρότερη τιμή του ϵ για την οποία οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ είναι *από κοινού* ασθενώς ϵ-τυπικές.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Δεδομένου ότι οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ είναι ασθενώς ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.05$, απομένει να εξετάσουμε την από κοινού κατανομή τους σε σχέση με την από κοινού εντροπία, $H(X,Y)$. Η από κοινού εντροπία των X και Y ισούται με

$$H(X,Y) = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{4}\log_2 4 + 2 \times \frac{1}{8}\log_2 8 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 1.75 \text{ bits}.$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}\log p_{\mathbf{XY}}(\texttt{00110}, \texttt{10010}) &= -\frac{2}{5}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\log_2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\log_2\frac{1}{8} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{10}{5} = 2. \end{aligned}$$

Επειδή $2 - 1.75 > 0.05 = \epsilon$, οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ δεν είναι από κοινού τυπικές.

Η μικρότερη τιμή του ϵ για την οποία οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ είναι από κοινού ασθενώς ϵ-τυπικές είναι $\epsilon = 0.25$.

(γ) Για το ϵ που βρήκατε στο Ερώτημα (β) (0.05 ή μεγαλύτερο) βρείτε τις ακολουθίες $\mathbf{x}$ μήκους 5 που είναι ασθενώς τυπικές ως προς την p_X. Βρείτε, επίσης, τις ακολουθίες $\mathbf{y}$ μήκους 5 που είναι ασθενώς τυπικές ως προς την p_Y.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Από την απάντηση του Ερωτήματος (α), γνωρίζουμε ότι όλες οι ακολουθίες $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ που έχουν δύο "1" είναι ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.05$ και, επομένως, και για $\epsilon = 0.25$.

Για τις ακολουθίες με 3 "1",

$$-\frac{1}{5}\log_2 p(3 \text{ “1”}) = -\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{8} - \frac{2}{5}\log_2\frac{5}{8} = 1.1203.$$

Επειδή $1.1203 - 0.9544 = 0.1659 < 0.25$ ακολουθίες με 3 "1" είναι ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.25$.

Για τις ακολουθίες με 4 "1",

$$-\frac{1}{5}\log_2 p(4 \text{ “1”}) = -\frac{4}{5}\log_2\frac{3}{8} - \frac{1}{5}\log_2\frac{5}{8} = 1.2676.$$

Επειδή $1.2676 - 0.9544 = 0.3132 > 0.25$ ακολουθίες με 4 "1" δεν είναι ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.25$.

Δεδομένου ότι η συνάρτηση $-\frac{n}{5}\log\frac{3}{8} - \frac{5-n}{5}\log\frac{5}{8}$ είναι αύξουσα ως προς n δε χρειάζεται να ελέγξουμε την περίπτωση ακολουθιών με 5 "1".

Για τις ακολουθίες με 1 "1",

$$-\frac{1}{5}\log_2 p(4 \text{ “1”}) = -\frac{1}{5}\log_2\frac{3}{8} - \frac{4}{5}\log_2\frac{5}{8} = 0.8255.$$

Συνεπώς και οι ακολουθίες με 1 "1" είναι τυπικές.

Τέλος, για τις ακολουθίες με 0 "1",

$$-\frac{1}{5}\log_2 p(0\ \text{“1”}) = -\log\frac{5}{8} = 0.6781.$$

Επομένως, δεν είναι ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.25$.

Άρα, οι ακολουθίες $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ που είναι ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.25$ είναι αυτές που έχουν 1, 2 ή 3 "1".

Εναλλακτική λύση (από 3 συναδέλφους σας!): Οι πράξεις γίνονται πιο εύκολα αν υπολογίσουμε, πρώτα, το διάστημα $\left(2^{-n(H(X)+\epsilon)},\ 2^{-n(H(X)-\epsilon)}\right) = (0.0154,\ 0.0871)$ στο οποίο πρέπει να βρίσκονται οι συναρτήσεις μάζας πιθανότητας των τυπικών ακολουθιών. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγουμε τον υπολογισμό των $\log_2$ και αρκεί να υπολογίσουμε γινόμενα της μορφής $\left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{5-k}$, όπου k ο αριθμός των "1". Τον τρόπο αυτό μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε και στα Ερωτήματα (α) και (β).

(δ*) Για το ϵ που βρήκατε στο Ερώτημα (β) (0.05 ή μεγαλύτερο) βρείτε τα ζεύγη ακολουθιών $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ μήκους 5 που είναι από κοινού τυπικές.

Απάντηση:

Πρέπει να ελέγξουμε όλους τους συνδυασμούς ακολουθιών με 1, 2 και 3 "1". Δε χρειάζεται να ελέγξουμε άλλες ακολουθίες, γιατί ακολουθίες που είναι από κοινού τυπικές πρέπει να είναι και τυπικές ως προς την αντίστοιχη περιθώρια κατανομή.

Στη συνέχεια θεωρούμε μόνο ακολουθίες με 1 και 2 "1". Οι υπόλοιποι συνδυασμοί αφήνονται ως άσκηση.

i. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ και έχουν 1 "1":

$$-\frac{1}{5}\log_2\frac{1}{4} - \frac{4}{5}\log_2\frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5} = 1.2 = 1.75 - 0.55 \;\Rightarrow\; \text{ΟΧΙ}.$$

ii. $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ και έχουν και οι δύο από 1 "1":

$$-\frac{2}{5}\log_2\frac{1}{8} - \frac{3}{5}\log_2\frac{1}{2} = \frac{6}{5} + \frac{3}{5} = \frac{9}{5} = 1.8 \;\Rightarrow\; \text{ΝΑΙ}.$$

iii. Η $\mathbf{x}$ έχει 1 "1" που ταυτίζεται με έναν "1" της $\mathbf{y}$ που έχει 2 "1":

$$-\frac{1}{5}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\log_2\frac{1}{8} - \frac{3}{5}\log_2\frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1.6 \;\Rightarrow\; \text{ΝΑΙ}.$$

iv. Η $\mathbf{x}$ έχει 1 "1" που δεν ταυτίζεται με κανένα "1" της $\mathbf{y}$ που έχει 2 "1":

$$-\frac{3}{5}\log_2\frac{1}{8} - \frac{2}{5}\log_2\frac{1}{2} = \frac{9}{5} + \frac{2}{5} = \frac{11}{5} = 2.2 \;\Rightarrow\; \text{ΟΧΙ}.$$

v. Η $\mathbf{x}$ έχει 2 "1", ένα από τα οποία ταυτίζεται με ένα "1" της $\mathbf{y}$ που έχει 2 "1": Από το Ερώτημα (β) $\Rightarrow$ ΝΑΙ.

vi. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ και έχουν 2 "1":

$$-\frac{2}{5}\log_2\frac{1}{4} - \frac{3}{5}\log_2\frac{1}{2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = 1.4 \;\Rightarrow\; \text{ΟΧΙ.}$$

vii. $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ έχουν από 2 "1", αλλά κανένας δεν ταυτίζεται:

$$-\frac{4}{5}\log_2\frac{1}{8} - \frac{1}{5}\log_2\frac{1}{2} = \frac{12}{5} + \frac{1}{5} = \frac{13}{5} = 2.6 \;\Rightarrow\; \text{ΟΧΙ.}$$

Σημείωση: Δεν αρκεί να συγκρίνουμε την $p(\mathbf{x},\mathbf{y})$ με το διάστημα $\left(2^{-n(H(X,Y)+\epsilon)},\ 2^{-n(H(X,Y)-\epsilon)}\right)$. Πρέπει και οι $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ να είναι τυπικές ως προς p_X και p_Y, αντίστοιχα.

Εναλλακτική λύση (από συνάδελφό σας!): Για να είναι δύο ακολουθίες $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ από κοινού ϵ-τυπικές, πρέπει $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \left(2^{-n(H(X,Y)+\epsilon)},\ 2^{-n(H(X,Y)-\epsilon)}\right)$. Για $\epsilon = 0.25$, $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (2^{-2\cdot 5},\ 2^{-1.5\cdot 5}) \Rightarrow p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (0.0009766,\ 0.0055)$. Αν συγκρίνουμε τις ακολουθίες ανά ψηφίο, υπάρχουν 3 πιθανά ενδεχόμενα: Και τα δύο ψηφία να είναι 0, και τα δύο να είναι 1 ή το ένα να είναι 0 και το άλλο 1. Αν η πρώτη περίπτωση συμβαίνει a φορές και η δεύτερη b φορές, πρέπει να βρούμε τις τιμές των a και b που ικανοποιούν τη σχέση

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a \left(\frac{1}{4}\right)^b \left(\frac{1}{8}\right)^{5-a-b} \in (0.0009766,\ 0.0055)\,.$$

Αφού βρούμε τις τιμές των a και b (στη χειρότερη περίπτωση θα χρειαστεί να δοκιμάσουμε 36 περιπτώσεις) θα πρέπει να αποκλείσουμε τις ακολουθίες που δεν έχουν 1, 2 και 3 "1".

22. **Τυπικές ακολουθίες (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2010)**

Θεωρούμε πηγή *χωρίς μνήμη* που παράγει ακολουθία δυαδικών τ.μ. $X_i \sim$Bern(p). Δηλαδή, η $X_1, X_2, \ldots$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ομοίως κατανεμημένων (i.i.d.) τ.μ.

(α) Εάν $\left|A_\epsilon^{(n)}\right|$ είναι το πλήθος των ασθενώς $\epsilon-$τυπικών ακολουθιών μήκους n και $|X_1^n|$ είναι όλες οι δυαδικές ακολουθίες μήκους n, τι μπορούμε να πούμε για το λόγο $\left|A_\epsilon^{(n)}\right| / |X_1^n|$ καθώς $n \to \infty$ και $\epsilon \to 0$;

Υπόδειξη: Πρέπει να δείτε αν ο λόγος συγκλίνει στην ίδια τιμή για όλες τις τιμές της παραμέτρου p.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Γνωρίζουμε ότι $|A_\epsilon^{(n)}| \le 2^{n(H(X)+\epsilon)}$. Επομένως,

$$\frac{\left|A_\epsilon^{(n)}\right|}{|X_1^n|} \le \frac{2^{n(H(X)+\epsilon)}}{2^n} = 2^{n(H(X)-1+\epsilon)}.$$

Δεδομένου ότι, για δυαδικές τ.μ., $H(X) < 1$ όταν $p \neq \frac{1}{2}$, ο λόγος συκλίνει στο 0. Δηλαδή, το πλήθος των τυπικών ακολουθιών είναι αμελητέο σε σύγκριση με όλες τις δυαδικές ακολουθίες. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση $p = \frac{1}{2}$, όπου όλες οι ακολουθίες είναι (ασθενώς) τυπικές.

(β) Θεωρούμε, τώρα, ότι οι τιμές της X_i είναι 0 (με πιθανότητα p) ή 1 (με πιθανότητα $1-p$). Ορίζουμε το βάρος Hamming (Hamming weight), $W(X_1^n)$, της ακολουθίας X_1^n ως τον αριθμό των '1' της ακολουθίας.

Δείξτε ότι $\frac{1}{n}W(X_1^n) \to 1 - p$ για $n \to \infty$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών.

Απάντηση:

Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών, στο όριο η ακολουθία θα περιέχει pn '0' και $(1-p)n$ '1'. Επομένως, $W(X_1^n) \to n(1-p) \Rightarrow \frac{1}{n}W(X_1^n) \to 1 - p$.

(γ) Έστω, τώρα, ότι το μήκος, n, της ακολουθίας είναι πεπερασμένο και ότι $\epsilon > 0$. Δείξτε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε αν η ακολουθία X_1^n μήκους n είναι *ασθενώς* $\epsilon-$τυπική αν γνωρίζουμε την τιμή του βάρους Hamming, $W(X_1^n)$, της ακολουθίας.

Απάντηση:

Για να είναι η ακολουθία X_1^n ασθενώς $\epsilon-$τυπική πρέπει να ισχύει

$$H(X) - \epsilon \leq -\frac{1}{n}\log p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq H(X) + \epsilon$$

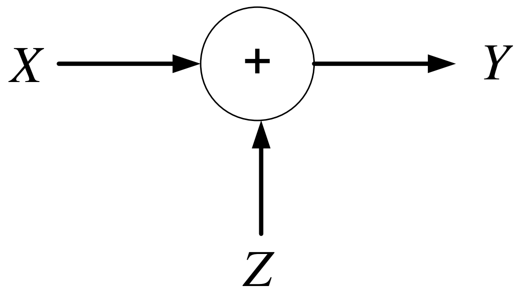
Εάν η ακολουθία περιέχει r '1' και $n - r$ '0', μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
&H(X) - \epsilon \leq -\frac{1}{n}\log\prod_{i=1}^{n} p(x_i) \leq H(X) + \epsilon \Rightarrow \\
&H(X) - \epsilon \leq -\frac{1}{n}\log\left(p^{n-r}(1-p)^r\right) \leq H(X) + \epsilon \Rightarrow \\
&H(X) - \epsilon \leq -\frac{1}{n}\log\left(p^n\left(\frac{1-p}{p}\right)^r\right) \leq H(X) + \epsilon \Rightarrow \\
&H(X) - \epsilon \leq -\log p - \frac{r}{n}\log\left(\frac{1-p}{p}\right) \leq H(X) + \epsilon \Rightarrow \\
&H(X) - \epsilon + \log p \leq \frac{r}{n}\log\left(\frac{p}{1-p}\right) \leq H(X) + \epsilon + \log p \Rightarrow \\
&n\frac{H(X) - \epsilon + \log p}{\log(p/(1-p))} \leq r \leq n\frac{H(X) + \epsilon + \log p}{\log(p/(1-p))}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $r = W(X_1^n)$. Επομένως, με βάση το διάστημα στο οποίο βρίσκεται το βάρος Hamming της ακολουθίας μπορούμε να προσδιορίσουμε αν η ακολουθία είναι ασθενώς $\epsilon-$τυπική.

23. **Κανάλι Προσθετικού Θορύβου – Cover & Thomas 7.2**

Βρείτε τη χωρητικότητα του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη του σχήματος.



Δίνεται ότι $\Pr\{Z = 0\} = \Pr\{Z = \alpha\} = \frac{1}{2}$. Η τ.μ. X παίρνει τιμές στο αλφάβητο $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. Υποθέστε ότι η Z είναι ανεξάρτητη της X.

Παρατηρήστε ότι η χωρητικότητα του καναλιού εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου α.

Απάντηση:

Δικρίνουμε περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή του α

• $\alpha = 0$: $Y = X$ και, συνεπώς, $H(Y|X) = 0$.
Επομένως, $\max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(Y) = \max_{p(x)} H(X) = 1$. Άρα, $C = 1$ bit/μετάδοση.

• $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pm 1$: Η Y μπορεί να πάρει 4 *διακριτές* τιμές 0, 1, α και $1+\alpha$. Εξετάζοντας την τιμή της Y μπορούμε να βρούμε χωρίς σφάλμα την τιμή της X. Επομένως, και πάλι, $H(X|Y) = 0$ και $C = 1$ bit/μετάδοση.

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού είναι παρατηρώντας ότι, για $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pm 1$, το κανάλι είναι ασθενώς συμμετρικό. $C = \log |\mathcal{Y}| - H\left(1/2, 1/2, 0, 0\right) = 2 - 1 = 1$ bit.

• $\alpha = 1$: Η Y μπορεί να πάρει 3 διαφορετικές τιμές: 0, 1 ή 2. Παρατηρούμε ότι το κανάλι είναι ένα Δυαδικό Κανάλι Διαγραφής (Binary Erasure Channel – BEC) με $\alpha = 1/2$. Επομένως, από την έκφραση για τη χωρητικότητα του BEC, $C = 1 - \alpha = 1/2$ bits/μετάδοση.

• $\alpha = -1$: Ομοίως με την περίπτωση $\alpha = 1$, $C = 1/2$ bits/μετάδοση.

24. **Χωρητικότητα καναλιού modulo – Cover & Thomas 7.4**

Θεωρούμε το κανάλι $Y = X + Z \pmod{11}$, και $Z \sim \mathrm{Unif}\{1, 2, 3\}$ και $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 10\}$.

Υπενθύμιση: $X \bmod a$: Το υπόλοιπο της διαίρεσης του X με το a.

(α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού.

Απάντηση:

$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \{H(Y) - H(Y|X)\}$.

$H(Y|X) = H(X + Z \pmod{11}|X) = H(Z|X) = H(Z) = \log 3$.

Επομένως, $C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(Y) - \log 3 = \log 11 - \log 3 = \log \frac{11}{3}$ bits.

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της χωρητικότητας είναι παρατηρώντας ότι το κανάλι είναι συμμετρικό.

(β) Ποια είναι η βέλτιστη κατανομή $p^*(x)$ που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα;

Απάντηση:

Η κατανομή που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα είναι η ομοιόμορφη στο $\mathcal{X}$. Δηλαδή, $p^*(x) = \frac{1}{11}$, $x \in \mathcal{X}$.

25. ►**Ενθόρυβη Γραφομηχανή – Cover & Thomas 7.6 (τροποποιημένη)**

Θεωρούμε γραφομηχανή με 24 πλήκτρα.

(α) Εάν κάθε φορά που πατάμε γιαπλήκτρο τυπώνεται το σωστό γράμμα, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού σε bits;

Απάντηση:

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \{H(Y) - H(Y|X)\}$$
$$\stackrel{(a)}{=} \max_{p(x)} H(Y) \stackrel{(b)}{=} \max_{p(x)} H(X) = \log 24 \text{ bits}.$$

(a) $Y = X \Rightarrow H(Y|X) = 0$. (b) $Y = X \Rightarrow H(Y) = H(X)$.

Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με χρήση ομοιόμορφης κατανομής εισόδου.

(β) Υποθέστε, τώρα, ότι κάθε φορά που πατάμε ένα πλήκτρο τυπώνεται το σωστό γράμμα ή το επόμενό του στο αλφάβητο (με την ίδια πιθανότητα). Δηλαδή, $A \to A$ ή $A \to B$, $B \to B$ ή $B \to \Gamma$, $\ldots$, $\Omega \to \Omega$ ή $\Omega \to A$. Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;

Απάντηση:

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \{H(Y) - H(Y|X)\}$$
$$\stackrel{(a)}{=} \max_{p(x)} H(Y) - \log 2 \stackrel{(b)}{=} \log 24 - \log 2 = \log 12 \text{ bits}.$$

(a) Για δεδομένο X, η Y παίρνει μία από 2 τιμές με την ίδια πιθανότητα $\Rightarrow H(Y|X) = 1$. (b) Το κανάλι είναι συμμετρικό, επομένως μια κατανομή εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα είναι η ομοιόμορφη. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και με πράξεις.

Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, μια κατανομή που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα είναι η ομοιόμορφη.

(γ) Για το κανάλι του Ερωτήματος (β), εάν κωδικοποιούμε κάθε σύμβολο που θέλουμε να στείλουμε στο κανάλι ξεχωριστά, ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορείτε να επιτύχετε για μετάδοση με (ακριβώς) μηδενική πιθανότητα σφάλματος;

Απάντηση:

Έστω ότι χρησιμοποιούμε μόνο τα γράμματα A, Γ, E, H, …, Ψ. Κοιτώντας το σύμβολο που λαμβάνεται στην έξοδο, μπορούμε να προσδιορίσουμε το σύμβολο που μεταδόθηκε με μηδενική πιθανότητα σφάλματος. Επίσης, προκύπτει εύκολα ότι, για οποιόμορφη κατανομή εισόδου (στο σύνολο $\{A, \Gamma, E, H, \ldots, \Psi\}$), $H(Y) = H(X) = \log 12$ bits. Συνεπώς,

$C = \max_{p(x)}\{H(Y) - H(Y|X)\} = \max_{p(x)} H(Y) = \log 12$ bits.

Στην περίπτωση ενθόρυβης γραφομηχανής με 24 πλήκτρα, μπορούμε να μεταδώσουμε με ρυθμό ίσο με τη χωρητικότητα και με πιθανότητα σφάλματος *ακριβώς* ίση με το 0. Στη γενική περίπτωση, δεν είναι δυνατόν να μεταδώσουμε σε ένα κανάλι με μηδενική πιθανότητα σφάλματος, αλλά με πιθανότητα σφάλματος αυθαίρετα κοντά στο 0.

(δ) Επαναλάβετε τα Ερωτήματα (α)-(γ) για γραφομηχανή με 25 πλήκτρα.

Απάντηση:

Τα Ερωτήματα (α) και (β) λύνονται με τον ίδιο τρόπο όπως και για την περίπτωση γραφομηχανής με 24 πλήκτρα. Η χωρητικότητα του καναλιού είναι $\log 25$ bits και $\log \frac{25}{2}$ bits, αντίστοιχα.

Για την περίπτωση (γ), δεδομένου ότι κάθε μήνυμα πρέπει να κωδικοποιηθεί αυτόνομα, χρειαζόμαστε ακέραιο αριθμό μηνυμάτων. Προκειμένου να επιτύχουμε μηδενικό σφάλμα αποκωδικοποίησης στο δέκτη, ο μέγιστος αριθμός συμβόλων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι 12. Επομένως, ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης ισούται με $\log 12$ bits/χρήση καναλιού και είναι μικρότερος από τη χωρητικότητα.

26. **Το κανάλι Z – Cover & Thomas 7.8**

Έστω κανάλι Z με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad X, Y \in \{0, 1\}.$$

Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού, καθώς και την κατανομή εισόδου με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα.

Απάντηση:

Έστω $p = \Pr\{X = 1\}$. Επομένως, με χρήση του πίνακα μετάβασης μπορούμε να γράψουμε:

$H(Y|X) = \Pr\{X = 0\} \cdot H(Y|X = 0) + \Pr\{X = 1\} \cdot H(Y|X = 1) = (1 - p) \cdot 0 + p \cdot H(1/2) = p$.

$\Pr\{Y=1\} = \frac{1}{2}\Pr\{X=1\} = \frac{p}{2} \Rightarrow H(Y) = H(p/2)$.

Συνεπώς,

$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(p/2) - p$.

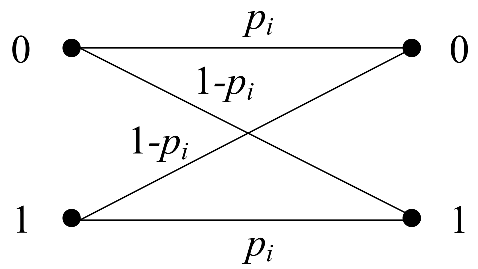
Γνωρίζουμε ότι, για δεδομένη $p(y|x)$, η $I(X;Y)$ είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$. Επομένως, εάν υπάρχει p^* τέτοιο ώστε $\frac{d}{dp}I(X;Y) = 0$, η κατανομή $\{1-p^*, p^*\}$ επιτυγχάνει τη χωρητικότητα. Εάν $\frac{d}{dp}I(X;Y) \neq 0$ για $p \in [0,1]$, η χωρητικότητα επιτυγχάνεται για $p=0$ ή $p=1$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}I(X;Y) &= \frac{d}{dp}\{H(p/2) - p\} \\
&= -\frac{1}{2}\log_2\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\frac{p}{2}\frac{2}{p}\log_2 e + \frac{1}{2}\log_2(1-p/2) + \frac{1}{2}(1-p/2)\frac{1}{1-p/2}\log_2 e - 1 \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{1-p/2}{p/2} - 1 = 0 \Rightarrow \log\frac{1-p/2}{p/2} = 2 \Rightarrow \frac{1-p/2}{p/2} = 4 \\
&\Rightarrow 1 - p/2 = 2p \Rightarrow 5p/2 = 1 \Rightarrow p^* = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Η χωρητικότητα ισούται με $H\left(\frac{2}{10}\right) - 2/5 \approx 0.322$ bits.

27. **Χρονικώς Μεταβαλλόμενα Κανάλια – Cover & Thomas 7.11**

    Θεωρούμε το χρονικώς μεταβαλλόμενο κανάλι του Σχήματος 10. Οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δεδομένων των $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με υπό συνθήκη κατανομή μάζας πιθανότητας $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} p_i(y_i|x_i)$. Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Βρείτε τη $\max_{p(\mathbf{x})} I(\mathbf{X};\mathbf{Y})$. Σχολιάστε την τιμή της χωρητικότητας και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.



Σχήμα 10: Χρονικώς Μεταβαλλόμενο BSC.

Απάντηση:

Δεδομένου ότι το κανάλι μεταβάλλεται, δεν έχει νόημα να χρησιμοποιήσουμε την $I(X;Y)$.[1] Θα χρησιμοποιήσουμε την $I(X^n;Y^n)$. Μπορούμε, δηλαδή, να δούμε το κανάλι ως ένα

[1] Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την $I(X;Y)$ για κάθε τιμή της p αν τα p_i επαναλαμβάνονται, δηλαδή, για παράδειγμα, αν $p_{i+nk} = p_i$. Ωστόσο αυτό δεν ισχύει, απαραίτητα, στην άσκηση.

κανάλι χωρίς μνήμη με n εισόδους και n εξόδους στο οποίο η κάθε είσοδος i συνδέεται μόνο με την έξοδο i μέσω ενός BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p_i.

Για το κανάλι αυτό,

$$
\begin{aligned}
I(X_1^n, Y_1^n) &= H(Y_1^n) - H(Y_1^n|X_1^n) \\
&\overset{(i)}{=} H(Y_1^n) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i) \\
&\overset{(ii)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} H(Y_i) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (H(Y_i) - H(Y_i|X_i)) \\
&\overset{(iii)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} (1 - H(p_i)) = n - \sum_{i=1}^{n} H(p_i(y_i|x_i)).
\end{aligned}
$$

(i) Από το γεγονός ότι οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δεδομένων των $X_1, X_2, \ldots, X_n$. (ii) από το άνω φράγμα για την από κοινού εντροπία (iii) Για BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p_i, $I(X_i; Y_i) \leq 1 - H(p_i) = C_i$.

Η ισότητα στην παραπάνω σχέση ικανοποιείται όταν οι Y_i είναι ανεξάρτητες, όταν, δηλαδή, είναι ανεξάρτητες και οι X_i. Επίσης, πρέπει οι X_i να ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή ($p_i = 1/2$ για όλα τα i). Συνεπώς,

$$
\max I(X_1^n, Y_1^n) = n - \sum_{i=1}^{n} H(p_i(y_i|x_i)).
$$

Επομένως, η χωρητικότητα του καναλιού είναι $n - \sum_{i=1}^{n} H(p_i(y_i|x_i))$ bits/(n μεταδόσεις) ή $1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(p_i(y_i|x_i))$ bits ανά χρήση του καναλιού και επιτυγχάνεται με χρήση βιβλίων κωδίκων που κατασκευάζονται με ρίψη αμερόληπτου και i.i.d. κέρματος.

28. **Κανάλια με εξάρτηση μεταξύ των συμβόλων – Cover & Thomas 7.14**

Θεωρήστε το εξής κανάλι το οποιο χρησιμοποιεί δυαδικό αλφάβητο, παίρνει ως είσοδο σύμβολα των 2 bits και παράγει ως έξοδο σύμβολα των 2 bits σύμφωνα με την ακόλουθη απεικόνιση: `00` → `01`, `01` → `10`, `10` → `11` και `11` → `00`. Επομένως, εάν η είσοδος στο κανάλι είναι η ακολουθία `01`, η έξοδος είναι `10` με πιθανότητα 1. Συμβολίζουμε τα δύο σύμβολα εισόδου με X_1, X_2 και τα δύο σύμβολα εξόδου με Y_1, Y_2.

(α) Υπολογίστε την αμοιβαία πληροφορία $I(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ συναρτήσει της κατανομής εισόδου επάνω στα 4 πιθανά ζεύγη εισόδου.

Απάντηση:

Αν θεωρήσουμε το κανάλι με 4 εισόδους (των 2 bits η καθεμία) και 4 εξόδους (των 2 bits), σε κάθε είσοδο αντιστοιχεί μόνο μια έξοδος. Επομένως, $H(Y_1, Y_2|X_1, X_2) = 0$. Συνεπώς,

$$C = H(Y_1, Y_2) - H(Y_1, Y_2|X_1, X_2) = H(Y_1, Y_2) = H(X_1, X_2) = H(\mathbf{p}),$$

όπου $\mathbf{p}$ η κατανομή των 4 συμβόλων εισόδου.

(β) Δείξτε ότι η χωρητικότητα ανά μετάδοση ζεύγους ψηφίων ισούται με 2 bits.

Απάντηση:

Από το άνω φράγμα για την εντροπία, $H(\mathbf{p}) \leq 2$ bits. Η ισότητα ισχύει όταν $\mathbf{p} = [1/4, 1/4, 1/4, 1/4]$. Συνεπώς, η χωρητικότητα ανά μετάδοση ζεύγους ψηφίων ισούται με 2 bits.

(γ) Δείξτε ότι, για την κατανομή εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα στο προηγούμενο ερώτημα, $I(X_1; Y_1) = 0$. Επομένως, η κατανομή στις ακολουθίες εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα δε μεγιστοποιεί απαραίτητα την αμοιβαία πληροφορία μεταξύ μεμονωμένων συμβόλων εισόδου και των αντίστοιχων εξόδων.

Απάντηση:

Με επισκόπηση (ή με χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, αν θέλουμε να είμαστε πιο αυστηροί), παρατηρούμε ότι, αν εξετάσουμε τη μετάδοση *ανά bit*, αν χρησιμοποιήσουμε και τα 4 σύμβολα των 2 bits με την ίδια πιθανότητα, σε επίπεδο bit το κανάλι συμπεριφέρεται ως BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου ίση με 1/2. Συνεπώς, $I(X; Y) = 1 - H(1/2) = 0$.

29. **Κωδικοποιητής και Αποκωδικοποιητής ως μέρος του καναλιού – Cover & Thomas 7.16**

Θεωρήστε Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου

(crossover probability) 0.1. Ένα πιθανό σχήμα κωδικοποίησης για αυτό το κανάλι το οποίο χρησιμοποιεί δύο κωδικές λέξεις μήκους 3 είναι να κωδικοποιήσουμε το μήνυμα a_1 ως `000` και το μήνυμα a_2 ως `111`. Εάν χρησιμοποιούμε αυτόν τον κώδικα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο συνδυασμός κωδικοποιητή, καναλιού και αποκωδικοποιητή αποτελεί ένα νέο BSC με δύο εισόδους a_1 και a_2 και δύο εξόδους a_1 και a_2.

(α) Βρείτε την πιθανότητα αναστροφής για το νέο κανάλι.

Απάντηση:

Ο αποκωδικοποιητής αποφασίζει ποιο από τα δύο σύμβολα μεταδόθηκε (000 ή 111) μετρώντας τα 0 και τα 1 στη ληφθείσα τριάδα. Αποδεικνύεται ότι ο κανόνας ML είναι η απόφαση να γίνει με βάση την πλειοψηφία των συμβόλων. Δηλαδή όταν λαμβάνονται τρία ή δύο 0 ο δέκτης αποφασίζει 000, αλλιώς αποφασίζει 111 (μπορείτε να το αποδείξετε ή να δείτε π.χ. τις διαλέξεις του 3ου μέρους του μαθήματος "Θεωρία Πληροφορίας"). Συνεπώς, η πιθανότητα σφάλματος ισούται με

$$P_e = \Pr\{000\}P_{e|000} + \Pr\{111\}P_{e|111}.$$

Λόγω συμμετρίας, $P_{e|000} = P_{e|111}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} P_e = P_{e|000} &= \Pr\{111|000\} + \Pr\{110|000\} + \Pr\{101|000\} + \Pr\{011|000\} \\ &= p^3 + 3p^2(1-p) = 0.028. \end{aligned}$$

(β) Ποια είναι η χωρητικότητα του νέου καναλιού σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού;

Απάντηση:

Το νέο κανάλι είναι ένα BSC με πιθανότητα μετάβασης 0.028. Συνεπώς, $C' = 1 - H(0.028)$ bits/3 χρήσεις $= 0.2719$ bits/χρήση καναλιού. Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τα 000 και 111 με την ίδια πιθανότητα.

(γ) Ποια είναι η χωρητικότητα του αρχικού BSC με πιθανότητα αναστροφής 0.1;

Απάντηση:

Η χωρητικότητα του αρχικού BSC ισούται με $C = 1 - H(0.1) = 0.531$ bits/χρήση καναλιού. Συνεπώς, με τη χρήση του σχήματος επανάληψης, η χωρητικότητα μειώνεται.

(δ) Αποδείξτε το εξής γενικό αποτέλεσμα: Για οποιοδήποτε κανάλι, εάν θεωρήσουμε από κοινού τον κωδικοποιητή, το κανάλι και τον αποκωδικοποιητή ως ένα νέο κανάλι με είσοδο μηνύματα και έξοδο εκτιμώμενα μηνύματα, η χωρητικότητα σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού δεν μπορεί να αυξηθεί.

Απάντηση:

Έστω W το μήνυμα στην είσοδο του κωδικοποιητή και η συνάρτηση κωδικοποίησης $f(W)$ που αντιστοιχίζει το W στην n-άδα X_1^n. Στο δέκτη, έστω συνάρτηση $g(Y_1^n)$ που παράγει την εκτίμηση $\hat{W}$. Επομένως, $W \to X_1^n \to Y_1^n \to \hat{W}$. Από την ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων, $I(W;\hat{W}) \leq I(X_1^n;Y_1^n)$. Άρα, για οποιοδήποτε κανάλι, εάν θεωρήσουμε από κοινού τον κωδικοποιητή, το κανάλι και τον αποκωδικοποιητή ως ένα νέο κανάλι με είσοδο μηνύματα και έξοδο εκτιμώμενα μηνύματα, η χωρητικότητα σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού δεν μπορεί να αυξηθεί.

30. ***Χωρητικότητα καναλιού Ταχυδρομικών περιστεριών (Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας) – Cover & Thomas 7.19 (τροποποιημένη) – Σχετικά Δύσκολη**

Μια ομάδα αποκλεισμένων μαχητών επικοινωνεί με τους συμμάχους τους με χρήση ταχυδρομικών περιστεριών. Θεωρούμε ότι κάθε ταχυδρομικό περιστέρι μπορεί να μεταφέρει ένα σύμβολο ASCII (8 bits), ότι ένα περιστέρι στέλνεται κάθε 5 λεπτά της ώρας και ότι χρειάζεται πάντα 3 ακριβώς λεπτά της ώρας για να φτάσει στον προορισμό του.

(α) Εάν όλα τα περιστέρια καταφέρνουν να φτάσουν στον προορισμό τους, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού σε bits/ώρα;

Απάντηση:

Δεδομένου ότι κάθε 5 λεπτά λαμβάνουμε 8 bits, η χωρητικότητα του καναλιού ισούται με $8 \times 60/5 = 96$ bits/ώρα. Ο χρόνος που χρειάζεται το περιστέρι για να φτάσει στον προορισμό του δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα γιατί, μετά από την αρχική μεταβατική περίοδο, ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας θα είναι σταθερός.

(β) Έστω ότι ο παραλήπτης γνωρίζει ότι τα περιστέρια στέλνονται με σταθερό ρυθμό, οπότε μπορεί να ανιχνεύσει εάν ένα περιστέρι δε φτάσει στον προορισμό του. Εάν οι αντίπαλοι καταφέρνουν να σκοτώνουν ποσοστό α των περιστεριών, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού; Πώς θα μοντελοποιούσατε το κανάλι;

Απάντηση:

Πρόκειται για 256-αδικό κανάλι διαγραφής (erasure channel). Καθένα από τα 256 σύμβολα ASCII είτε φτάνει στον προορισμό με πιθανότητα $1-\alpha$, είτε διαγράφεται με πιθανότητα α. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα ξεκινώντας από τις κατανομές των X και Y. Έστω $p_i = \Pr\{X = i\}$. Επομένως, $\Pr\{Y = i\} = (1-\alpha)p_i$ για $i = 0, \ldots, 255$ και $\Pr\{Y = E\} = \left(\sum p_i\right) \alpha = \alpha$, όπου E το ενδεχόμενο διαγραφής (δηλαδή να σκοτωθεί το περιστέρι). Παρατηρούμε ότι $H(Y|X) = H(\alpha)$. Για την $H(Y)$,

$$
\begin{aligned}
H(Y) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\log p(Y)}\right] &= -\sum_{i=0}^{255}(1-\alpha)p_i \log(1-\alpha)p_i - \alpha \log \alpha \\
&= -(1-\alpha)\sum_i p_i \left(\log(1-\alpha) + \log p_i\right) - \alpha \log \alpha \\
&= -(1-\alpha)\left[\log(1-\alpha) + \sum_i p_i \log p_i\right] - \alpha \log \alpha \\
&= -(1-\alpha)\log(1-\alpha) - \alpha \log \alpha + (1-\alpha)H(\mathbf{p}) \\
&= H(\alpha) + (1-\alpha)H(\mathbf{p}).
\end{aligned}
$$

Το αποτέλεσμα θα μπορούσε να προκύψει κατευθείαν και με αρχή διαχωρισιμότητας εντροπίας, χρησιμοποιώντας μια βοηθητική τ.μ. E η οποία ισούται με 1 όταν συμβαίνει διαγραφή, και με 0 όταν τα περιστέρια φτάνουν στον προορισμό τους.

Δεδομένου ότι η κατανομή που μεγιστοποιεί την $H(\mathbf{p})$ είναι η ομοιόμορφη, $\max H(\mathbf{p}) = (1-\alpha)8$ bits/περιστέρι. Συνεπώς,

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(Y) - H(Y|X) = 8(1-\alpha) + H(\alpha) - H(\alpha)$$
$$= 8(1-\alpha) \text{ bits/περιστέρι} = 96(1-\alpha) \text{ bits/ώρα}$$

Εναλλακτικά, η χωρητικότητα μπορεί να βρεθεί μεγιστοποιώντας την $H(X)$: $C = \max_{p(x)}(H(X) - H(X|Y))$ (δοκιμάστε το ως άσκηση).

(*γ) Θεωρούμε, τώρα, ότι οι αντίπαλοι γνωρίζουν Θεωρία Πληροφορίας και, αφού πιάσουν ένα περιστέρι με πιθανότητα α, αντί να το σκοτώσουν, αντικαθιστούν το σύμβολο ASCII που στέλνει το περιστέρι με ένα διαφορετικό (από τα 255 πιθανά). Το σύμβολο αντικατάστασης επιλέγεται με βάση ομοιόμορφη κατανομή. Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού; Πώς θα μοντελοποιούσατε το κανάλι;

Απάντηση:

Κάθε σύμβολο παραμένει το ίδιο με πιθανότητα $1-\alpha$ ή μεταβαίνει σε ένα από τα άλλα σύμβολα με πιθανότητα $\alpha/255$. Επομένως, $\Pr\{Y = i|X\} = 1-\alpha$ εάν $X = i$, αλλιώς $\Pr\{Y = i|X\} = \alpha/255$. Όμοια με το Ερώτημα (β),

$$H(Y|X) = -(1-\alpha)\log(1-\alpha) - (\alpha/255)\sum_{i=0}^{254}\log(\alpha/255)$$
$$= -(1-\alpha)\log(1-\alpha) - \alpha\log(\alpha/255).$$

Η $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$ μεγιστοποιείται όταν η $H(Y)$ είναι ομοιόμορφη. Ωστόσο, πρέπει να εξετάσουμε εάν υπάρχει τρόπος να επιτύχουμε ομοιόμορφη κατανομή στην έξοδο για κάποια $p(X)$. Αν επιλέξουμε ομοιόμορφη X,

$$p(y) = \sum_{i=0}^{255} p(x_i, y) = \sum_{i=0}^{255} p(x_i)p(y|x_i) = \frac{1}{256}\sum_{i=0}^{255} p(y|x_i) = \frac{1}{256},$$

δεδομένου ότι, αν $y = x_i$, $p(y|x_i) = 1-\alpha$, ενώ αν $y \neq x_i$, $p(y|x_i) = \frac{\alpha}{255}$. Συνεπώς, $\sum_{i=0}^{255} p(y|x_i) = 1 - \alpha + 255\frac{\alpha}{255} = 1$ (Προσοχή! Γενικά, $\sum_x p(y|x) \neq 1$). Συνεπώς, για ομοιόμορφη X,

$$I(X;Y) = 8 - H(Y|X) = 8 + (1-\alpha)\log(1-\alpha) + \alpha\log(\alpha/255) \text{ bits/περιστέρι}.$$

Η χωρητικότητα μεγιστοποιείται όταν $\alpha = 0$ ($C = 8$ bits/περιστέρι $= 96$ bits/ώρα). Παρατηρήστε ότι η χωρητικότητα ισούται με 0 για $\alpha = \frac{255}{256}$ και όχι για $\alpha = 1$! Όταν $\alpha = 1$, ξέρουμε ότι ο εχθρός πάντα αλλοιώνει το μήνυμα και αυτό μας δίνει κάποια (μικρή) πληροφορία. Δηλαδή, ξέρουμε ότι αποκλείεται το σύμβολο που λάβαμε να είναι το ίδιο με αυτό που στείλαμε. Εάν ο εχθρός γνωρίζει Θεωρία Πληροφορίας θα πρέπει να αλλάζει το μήνυμα σχεδόν πάντα, αλλά όχι πάντα (κατά μέσο όρο πρέπει να αφήνει 1 στα 256 περιστέρια να περάσουν ως έχουν).

Το κανάλι είναι ένα 256-δικό συμμετρικό κανάλι, όπου οι μεταβάσεις σε διαφορετικό σύμβολο έχουν πιθανότητα $\frac{\alpha}{255}$, ενώ οι μεταβάσεις στο ίδιο σύμβολο έχουν πιθανότητα $1-\alpha$. Επομένως, ένας άλλος τρόπος να βρεθεί η χωρητικότητα είναι με χρήση της σχέσης $C = \log|\mathcal{Y}| - H\left(1-\alpha, \frac{\alpha}{255}, \frac{\alpha}{255}, \ldots, \frac{\alpha}{255}\right)$.

(*δ) Αν οι αντίπαλοι μπορούν να πιάνουν όλα τα περιστέρια, αλλά δε θέλουν να ξέρουμε ότι τα έπιασαν (δηλαδή δεν τα σκοτώνουν, αλλά μπορούν να αλλάξουν το σύμβολο ASCII, αν θέλουν, πριν τα αφήσουν) τι είναι το χειρότερο (για εμάς) που μπορούν να κάνουν;

Απάντηση:

Δεδομένου ότι $C = 0$ όταν $\alpha = \frac{255}{256}$, το χειρότερο που μπορούν να κάνουν οι αντίπαλοι είναι να μην αλλάζουν το σύμβολο του περιστεριού κατά μέσο όρο μια κάθε 256 φορές.

31. **Υπάρχει περίπτωση η προσθήκη περισσότερων εισόδων στο κανάλι να ελαττώσει τη χωρητικότητά του; – Cover & Thomas 7.22**

Δείξτε ότι η προσθήκη μιας οποιασδήποτε γραμμής στον πίνακα μετάβασης ενός διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη δεν μπορεί να ελαττώσει τη χωρητικότητά του.

Απάντηση:

Η προσθήκη μιας οποιασδήποτε γραμμής στον πίνακα μετάβασης ενός διακριτού καναλιού, δηλαδή η προσθήκη μιας ακόμα εισόδου δεν μπορεί να ελαττώσει τη χωρητικότητα του καναλιού, επειδή μπορούμε να επιτύχουμε ρυθμό μετάδοσης ίσο με τη χωρητικότητα πριν προστεθεί η γραμμή απλώς αγνοώντας τη νέα είσοδο (δηλαδή θέτοντας μηδενική πιθανότητα εισόδου στο νέο σύμβολο).

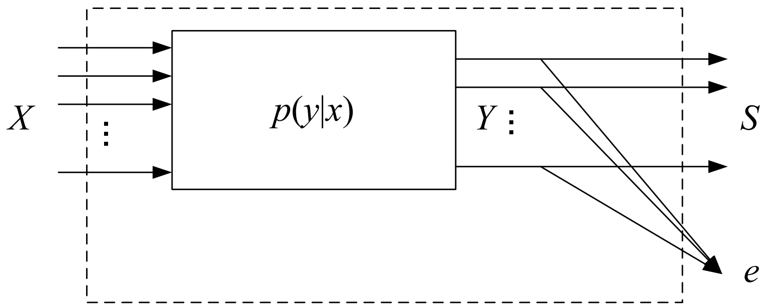
Έστω C_m η χωρητικότητα του καναλιού πριν προστεθεί η νέα είσοδος και C_{m+1} η χωρητικότητά του μετά την προσθήκη της νέας γραμμής.

$$\begin{aligned} C_{m+1} &= \max_{p(x_1,x_2,\ldots,x_m,x_{m+1})} I(X;Y) \\ &\geq \max_{p(x_1,x_2,\ldots,x_m,0)} I(X;Y) = C_m. \end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέσαμε ότι η γραμμή προστέθηκε στο τέλος του πίνακα μετάβασης.

32. **Κανάλι διαγραφής – Cover & Thomas 7.27**

Έστω $\{\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y}\}$ ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με χωρητικότητα C. Υποθέστε ότι στην έξοδο του καναλιού συνδέεται ένα κανάλι διαγραφής $\{\mathcal{Y}, p(s|y), \mathcal{S}\}$ το οποίο διαγράφει την έξοδο του πρώτου καναλιού με πιθανότητα α.



Σχήμα 11: Κανάλι για το Πρόβλημα 7.27 των Cover & Thomas.

Συγκεκριμένα, $\mathcal{S} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m, e\}$, και

$$\begin{aligned} \Pr\{S = y|X = x\} &= \bar{\alpha} p(y|x), \quad y \in \mathcal{Y}, \\ \Pr\{S = e|X = x\} &= \alpha. \end{aligned}$$

Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού από το X στο S.

Απάντηση:

Ένας γρήγορος τρόπος για να λυθεί το πρόβλημα είναι με χρήση της αρχής διαχωρισιμότητας της εντροπίας. Έστω τ.μ. E που υποδηλώνει εάν έχει γίνει διαγραφή. $H(S) = H(S) + H(E|S) = H(S, E) = H(E) + H(S|E) \Rightarrow H(S) = H(E) + \Pr\{E \neq e\}H(S|E \neq e) = H(\alpha) + (1 - \alpha)H(Y)$.

Ομοίως, $H(S|X) = H(S|X) + H(E|S, X) = H(S, E|X) = H(E|X) + H(S|E, X) \Rightarrow H(S|X) = H(E) + \Pr\{E \neq e\}H(S|X, E \neq e) = H(\alpha) + (1 - \alpha)H(Y|X)$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} C' = \max I(X; S) &= \max\{(1 - \alpha)H(Y) - (1 - \alpha)H(Y|X)\} \\ &= (1 - \alpha)\max\{H(Y) - H(Y|X)\} = (1 - \alpha)C. \end{aligned}$$

33. **Κανάλια (Τελικό Διαγώνισμα Θ. Π., Φεβρουάριος 2008)**

Έστω

$$P(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix}$$

ο πίνακας μετάβασης ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα σφάλματος ϵ.

Επίσης, ορίζεται η πράξη $*$ ως εξής:

$$a * b = (1 - a)b + a(1 - b).$$

(α) Να αποδείξετε ότι το κανάλι το οποίο έχει για πίνακα μετάβασης το γινόμενο $P(\epsilon_1)P(\epsilon_2)$ είναι ισοδύναμο με ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι του οποίου η πιθανότητα σφάλματος ισούται με $\epsilon_1 * \epsilon_2$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Η γενική μορφή του πίνακα μετάβασης ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$P(\epsilon^*) = \begin{bmatrix} 1-\epsilon^* & \epsilon^* \\ \epsilon^* & 1-\epsilon^* \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Από τον πολλαπλασιασμό των πινάκων $P(\epsilon_1)$ και $P(\epsilon_2)$ προκύπτει ότι

$$P(\epsilon_1)P(\epsilon_2) = \begin{bmatrix} 1-[(1-\epsilon_1)\epsilon_2+\epsilon_1(1-\epsilon_2)] & (1-\epsilon_1)\epsilon_2+\epsilon_1(1-\epsilon_2) \\ (1-\epsilon_1)\epsilon_2+\epsilon_1(1-\epsilon_2) & 1-[(1-\epsilon_1)\epsilon_2+\epsilon_1(1-\epsilon_2)] \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2),

$$P(\epsilon_1)P(\epsilon_2) = P(\epsilon_1 * \epsilon_2) = \begin{bmatrix} 1-\epsilon_1*\epsilon_2 & \epsilon_1*\epsilon_2 \\ \epsilon_1*\epsilon_2 & 1-\epsilon_1*\epsilon_2 \end{bmatrix},$$

όπου $\epsilon_1 * \epsilon_2 = (1-\epsilon_1)\epsilon_2 + \epsilon_1 * (1-\epsilon_2)$.

(β) Δώστε μια φυσική ερμηνεία της παρακάτω ανισότητας, καθώς και την απόδειξή της

$$1 - H(\epsilon_1 * \epsilon_2) \leq \min\left(1 - H(\epsilon_1), 1 - H(\epsilon_2)\right),$$

εάν γνωρίζετε ότι ισχύουν οι ανισότητες: $|0.5-\epsilon_1*\epsilon_2| \leq |0.5-\epsilon_1|$ και $|0.5-\epsilon_1*\epsilon_2| \leq |0.5-\epsilon_2|$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Γνωρίζουμε ότι η χωρητικότητα ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου ϵ ισούται με $1 - H(\epsilon)$. Άρα, η ανισότητα $1 - H(\epsilon_1 * \epsilon_2) \leq \min\left((1 - H(\epsilon_1), 1 - H(\epsilon_2)\right)$ υποδηλώνει ότι η χωρητικότητα του δυαδικού συμμετρικού καναλιού $\epsilon_1 * \epsilon_2$ είναι μικρότερη ή ίση από την ελάχιστη χωρητικότητα των επιμέρους δυαδικών συμμετρικών καναλιών, ϵ_1 και ϵ_2, αντίστοιχα. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το κανάλι $\epsilon_1 * \epsilon_2$ συμπεριφέρεται ισοδύναμα με τα κανάλια ϵ_1 και ϵ_2 σε σειρά και ότι η χωρητικότητα του συνδυασμού τους εξαρτάται από το κανάλι με τη μικρότερη χωρητικότητα. Για να αποδείξουμε, τώρα, ότι ισχύει η ανισότητα με δεδομένη τη σχέση της άσκησης, αρκεί να δείξουμε, ισοδύναμα, ότι ισχύει

$$H(\epsilon_1 * \epsilon_2) \geq \max\left(H(\epsilon_1), H(\epsilon_2)\right).$$

Για $\epsilon_1, \epsilon_2 \leq 0.5$, $\epsilon_1 * \epsilon_2 \leq 0.5$ και αρκεί να δείξουμε ότι $\epsilon_1 * \epsilon_2 \geq \max(\epsilon_1, \epsilon_2)$, αφού η εντροπία είναι αύξουσα συνάρτηση του ορίσματος (όταν το όρισμα είναι ≤ 0.5). Αυτή, όμως, η σχέση μεταξύ των πιθανοτήτων ϵ_1, ϵ_2 και $\epsilon_1 * \epsilon_2$ ισχύει, όπως μπορούμε να συμπεράνουμε με μία απλή επισκόπηση των σχέσεων που δίνονται από την άσκηση. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η σχέση για την περίπτωση που οι ϵ_1 και ϵ_2 είναι ≥ 0.5 και για την περίπτωση που ένα ϵ είναι ≤ 0.5 και το άλλο ϵ είναι ≥ 0.5.

(γ) Να αποδείξετε ότι το κανάλι το οποίο έχει για πίνακα μετάβασης το γινόμενο $P^\nu(\epsilon)$ είναι ισοδύναμο με ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι του οποίου η πιθανότητα σφάλματος δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^\nu\right]$. Σε αυτήν την περίπτωση, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;

Απάντηση:

Για να αποδείξουμε τη σχέση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική μέθοδο. Δείξαμε ήδη ότι ισχύει για $n=2$. Έστω ότι ισχύει για $n-1$, δηλαδή,

$$P^{n-1}(\epsilon) = P\left(\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right).$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$P^{n}(\epsilon) = P(\epsilon)\cdot P^{n-1}(\epsilon) = P\left(\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n}\right]\right).$$

Πράγματι, από το γινόμενο των πινάκων $P(\epsilon)\cdot P^{n-1}(\epsilon)$ προκύπτει ότι

$$P(\epsilon)\cdot P^{n-1}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] & \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] \\ \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] & 1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (1-\epsilon)\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\}+\epsilon\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] & (1-\epsilon)\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]+\epsilon\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\} \\ (1-\epsilon)\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]+\epsilon\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\} & (1-\epsilon)\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\}+\epsilon\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] \end{bmatrix}.$$

Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι

$$(1-\epsilon)\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]+\epsilon\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n}\right].$$

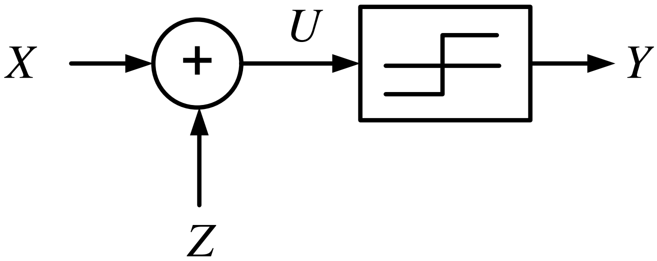
Πράγματι,

$$\begin{aligned}
&(1-\epsilon)\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]+\epsilon\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}(1-\epsilon)-\frac{1}{2}(1-\epsilon)(1-2\epsilon)^{n-1}+\epsilon-\frac{1}{2}\epsilon\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\epsilon)^{n-1}+\frac{1}{2}\epsilon(1-2\epsilon)^{n-1}+\frac{1}{2}\epsilon(1-2\epsilon)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}+2\epsilon(1-2\epsilon)^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)(1-2\epsilon)^{n-1}\right] = \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n}\right].
\end{aligned}$$

34. **Κατανομή πηγής (Επαναληπτική Εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2008)**

Θεωρούμε το κανάλι προσθετικού θορύβου του Σχήματος 12.

Η (διακριτή) πηγή X παίρνει τιμές στο σύνολο $\{-1,+1\}$ και οι X_i που αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές i είναι ανεξάρτητες ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) $\sim$



Σχήμα 12: Κανάλι προσθετικού θορύβου με κύκλωμα απόφασης (slicer)

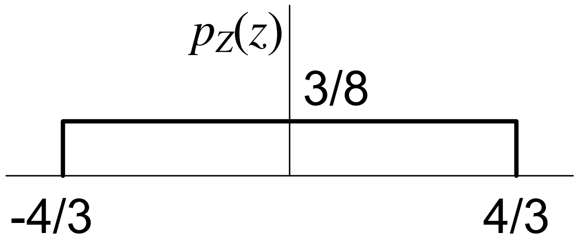
Bern(p). Ο θόρυβος Z_i είναι συνεχής ανεξάρτητη ομοίως κατανεμημένη τ.μ. (δηλαδή μια λευκή τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου με συνεχείς τιμές) και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-4/3, 4/3]$. Το κύκλωμα απόφασης παράγει μια εκτίμηση Y_i της X_i με βάση την τιμή του αθροίσματος $U_i = X_i + Z_i$. Όταν $U_i > \alpha$, $Y_i = +1$, αλλιώς $Y_i = -1$. $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι $\log_2 7 \approx 2.8074$.

(α) Σχεδιάστε ή δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z_i.

Απάντηση:

$p_Z(z) = \frac{3}{8}$, $z \in [-4/3, 4/3]$. Η σ.π.π. της Z_i φαίνεται στο Σχήμα 13.



Σχήμα 13: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της Z_i

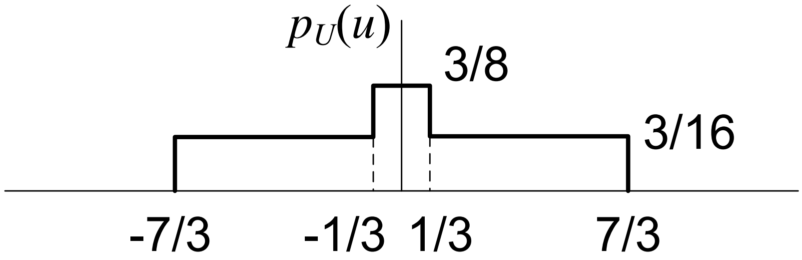
(β) Σχεδιάστε ή δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της U_i εάν $p = 1/2$.

Απάντηση:

Με απλή επισκόπηση προκύπτει ότι

$$p_U(u) = \begin{cases} \frac{3}{16} & \text{για } u \in \left[-\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right] \\ \frac{3}{8} & \text{για } u \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \\ 0 & \text{για } u \in \left[-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, +\infty\right] \end{cases}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορείτε να οδηγηθείτε με πράξεις ή με χρήση του ότι η σ.π.π. του αθροίσματος τ.μ. ισούται με τη συνέλιξη των σ.π.π. των τ.μ. Η $p_U(u)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 14.



Σχήμα 14: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της U_i

(γ) Έστω, ότι $\alpha \in [-0.5, 0.5]$. Υπολογίστε τις δεσμευμένες πιθανότητες σφάλματος $P_{e,-1} = \Pr\{Y = +1|X = -1\}$ και $P_{e,+1} = \Pr\{Y = -1|X = +1\}$ ως συνάρτηση του α. $p \in [0,\ 1]$ (και όχι, κατ' ανάγκη, $p = 1/2$ όπως προηγουμένως).

Απάντηση:

• $P_{e,-1} = \Pr\{Y = +1|X = -1\} = \Pr\{U > \alpha|X = -1\} = \Pr\{Z > \alpha + 1\}$.

• $P_{e,+1} = \Pr\{Y = -1|X = +1\} = \Pr\{U < \alpha|X = +1\} = \Pr\{Z < \alpha - 1\}$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις και χρησιμοποιούμε τη σ.π.π. του Ερωτήματος (α):

• $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$: $P_{e,-1} = \left(\frac{1}{3} - \alpha\right)\frac{3}{8}$, $P_{e,+1} = 0$.

• $\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$: $P_{e,-1} = \left(\frac{1}{3} - \alpha\right)\frac{3}{8}$, $P_{e,+1} = \left(\frac{1}{3} + \alpha\right)\frac{3}{8}$.

• $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$: $P_{e,-1} = 0$, $P_{e,+1} = \left(\frac{1}{3} + \alpha\right)\frac{3}{8}$.

Οι $P_{e,-1}$ και $P_{e,+1}$ έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 15.

(δ) Έστω, τώρα, ότι $\alpha = 0$. Υπολογίστε τις πιθανότητες σφάλματος $P_{e,-1}$ και $P_{e,+1}$.

Απάντηση:

Από το προηγούμενο ερώτημα, ή απευθείας από τις σχέσεις $P_{e,-1} = \Pr\{Z > 1\}$ και $P_{e,+1} = \Pr\{Z < -1\}$, $P_{e,-1} = P_{e,+1} = \frac{1}{8}$.

(ε) Για $\alpha = 0$, δώστε ένα διακριτό μοντέλο για το κανάλι με είσοδο τη X και έξοδο την Y. Πρόκειται για κανάλι με η χωρίς μνήμη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

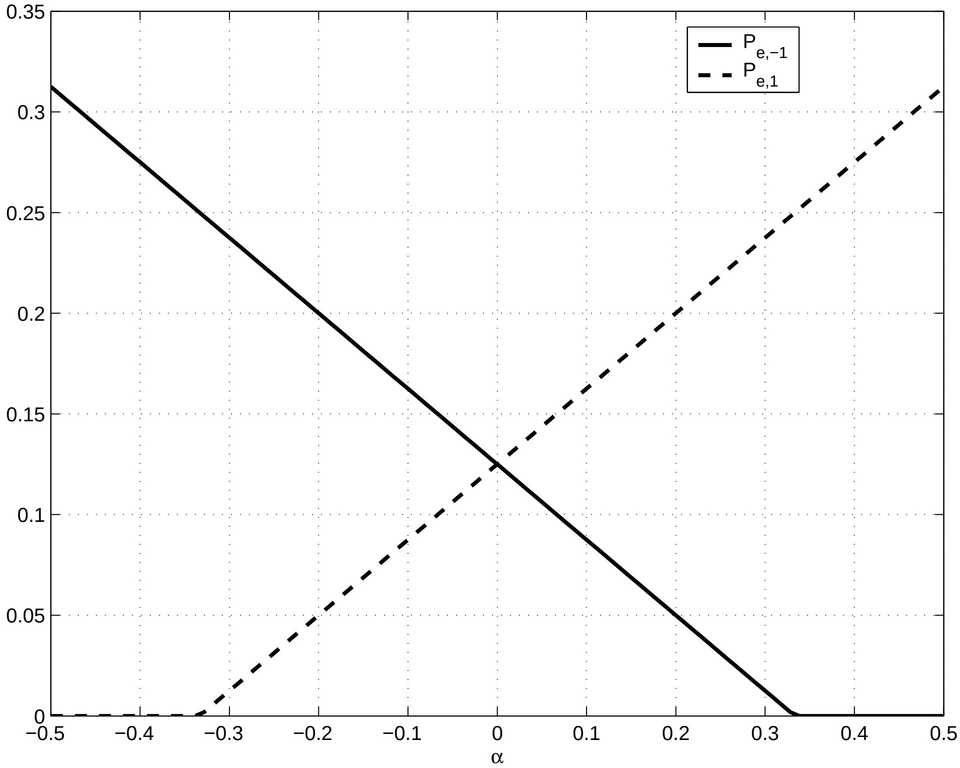
Απάντηση:

Το κανάλι μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυαδικό συμμετρικό κανάλι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 16. Το κανάλι δεν έχει μνήμη γιατί η τιμή της Y_i εξαρτάται (στατιστικά) μόνο από την τιμή της X_i.

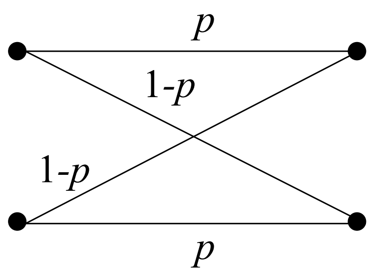
(στ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού που μοντελοποιήσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Για ποια τιμή της p επιτυγχάνεται η χωρητικότητα;

Απάντηση:

Κατά τα γνωστά για τη χωρητικότητα δυαδικού συμμετρικού καναλιού, $C = 1 -$



Σχήμα 15: Δεσμευμένες πιθανότητες σφάλματος $P_{e,-1}$ και $P_{e,1}$ συναρτήσει του $\alpha \in [-0.5,\ 0.5]$



Σχήμα 16: Μοντέλο για το κανάλι της άσκησης, για $\alpha = 0$.

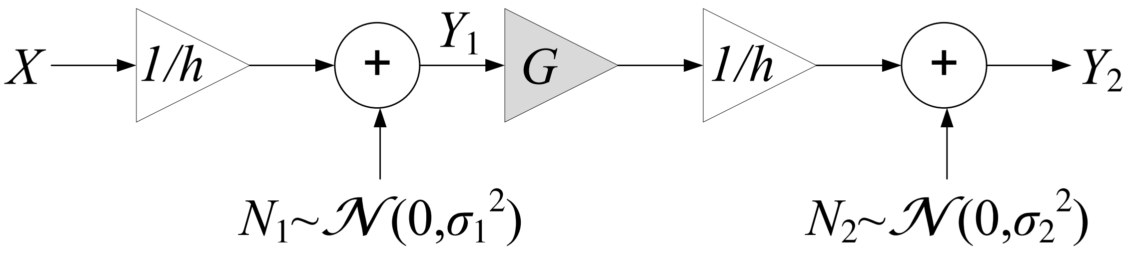
$H(f)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} C &= 1 - H(7/8) \\ &= 1 + \frac{7}{8}\log_2\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} \\ &= 1 + \frac{7}{8}\log_2 7 - 3\frac{7}{8} - 3\frac{1}{8} \\ &\approx 3.8074 - 3 = 0.8074 \text{ bits.} \end{aligned}$$

Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη κατανομή των συμβόλων πηγής: $\Pr\{X = -1\} = \Pr\{X = +1\} = \frac{1}{2}$.

35. **Κανάλι με αναμεταδότη (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2009)**

Προκειμένου να μεταδώσουμε πληροφορία σε μεγάλη απόσταση χρησιμοποιούμε το κανάλι με αναμεταδότη του Σχήματος 17.



Σχήμα 17: Κανάλι με αναμεταδότη που ενισχύει το σήμα.

Τα δύο κανάλια πριν και μετά τον αναμεταδότη εισάγουν απόσβεση $|h| > 1$ και Γκαουσιανό θόρυβο N_i μηδενικής μέσης τιμής. Δηλαδή, για το σήμα Y_1 στην είσοδο του αναμεταδότη ισχύει $Y_1 = \frac{1}{h}X + N_1$. Ο αναμεταδότης (στην ουσία ένας ενισχυτής) πολλαπλασιάζει το Y_1 με $|G| > 1$. Θεωρήστε ότι η μέση ισχύς του σήματος X στην είσοδο του καναλιού ισούται με P. Επίσης, θεωρήστε ότι θόρυβοι N_i είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ανεξάρτητοι της X.

Θεωρούμε ότι ο δέκτης γνωρίζει τις τιμές των h και G, καθώς και τις τιμές της διασποράς των Γκαουσιανών θορύβων N_1 και N_2, σ_1^2 και σ_2^2, αντίστοιχα.

(α) Βρείτε το μέγιστο αριθμό bits που μπορούμε να μεταδώσουμε κάθε φορά που χρησιμοποιούμε το κανάλι με είσοδο X και έξοδο Y_2 (συναρτήσει των P, h, G, σ_1 και σ_2), καθώς και την κατανομή εισόδου που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Πρέπει να αιτιολογήσετε επαρκώς την απάντησή σας.

Απάντηση:

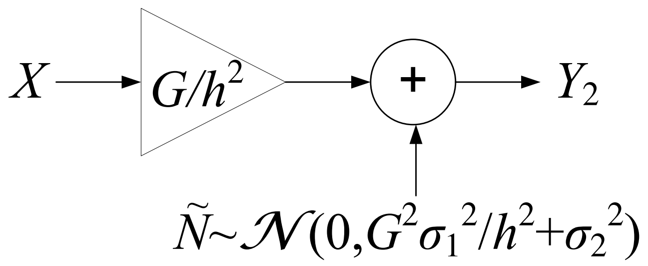
Για το σήμα στην έξοδο του καναλιού μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{1}{h}G\left(\frac{1}{h}X + N_1\right) + N_2 \\ &= \frac{G}{h^2}X + \frac{G}{h}N_1 + N_2 \\ &= \frac{G}{h^2}X + \tilde{N}. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός Γκαουσιανών τ.μ. είναι Γκαουσιανή τ.μ., η τ.μ. $\tilde{N}$ είναι Γκαουσιανή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\frac{G^2}{h^2}\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ (επειδή οι θόρυβοι είναι ανεξάρτητοι).

Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ισοδύναμο μοντέλο καναλιού του Σχήματος 18.

Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης ισούται με τη χωρητικότητα του καναλιού. Δεδομένου ότι το αρχικό κανάλι ισοδυναμεί με αυτό του Σχήματος 18, η χωρητικότητά

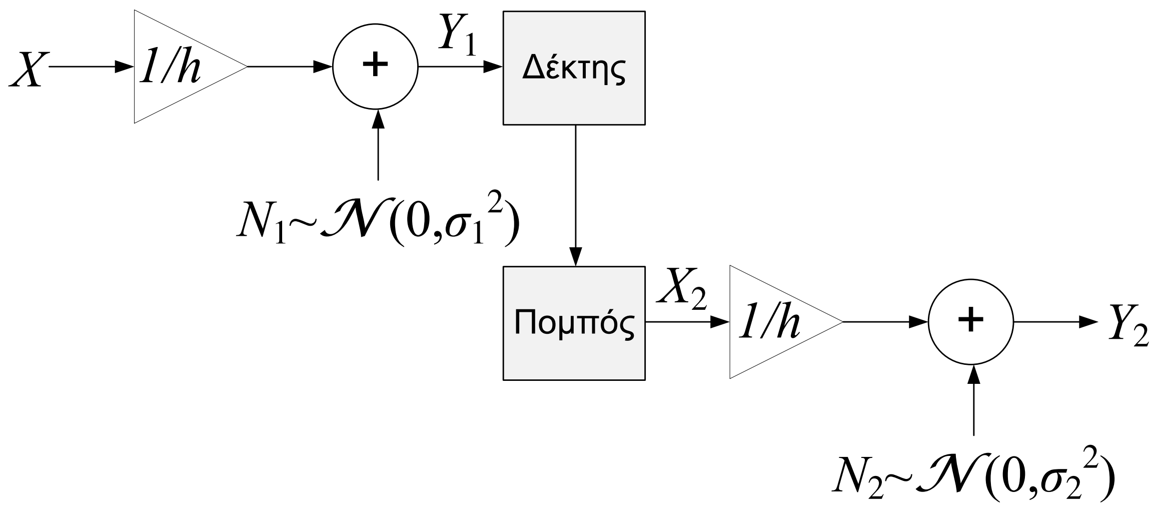


Σχήμα 18: Ισοδύναμο μοντέλο καναλιού με αναμεταδότη που ενισχύει το σήμα.

του μπορεί να επιτευχθεί με χρήση Γκαουσιανής κατανομής εισόδου: $X \sim \mathcal{N}(0, P)$. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι η χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού ισούται με $\frac{1}{2}\log_2(1 + \mathsf{SNR})$. Επομένως,

$$\begin{aligned} C_{\text{amplify-and-forward}} &= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[\tilde{N}^2]}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\frac{G^2}{h^4}P}{\frac{G^2}{h^2}\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{h^2(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2/G^2)}\right). \end{aligned}$$

(β) Έστω, τώρα, ότι, αντί για ενισχυτή, ο αναμεταδότης αποτελείται από ένα δέκτη και ένα πομπό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 19.



Σχήμα 19: Κανάλι με αναμεταδότη που αποκωδικοποιεί, επανακωδικοποιεί και επαναμεταδίδει.

Ο δέκτης του αναμεταδότη αποκωδικοποιεί το μήνυμα και ο πομπός του το επανακωδικοποιεί και το επαναμεταδίδει, πάλι με ισχύ P. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός bits που μπορούμε να μεταδώσουμε σε αυτήν την περίπτωση και ποιες κατανομές πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για τις X και X_2;

Απάντηση:

Ο μέγιστος ρυθμός με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε από την είσοδο του καναλιού έως το δέκτη του αναμεταδότη ισούται με τη χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού έως τον αναμεταδότη

$$C_{\text{left}} = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\frac{P}{h^2}}{\sigma_1^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{h^2\sigma_1^2}\right)$$

και επιτυγχάνεται με χρήση Γκαουσιανής κατανομής: $X \sim \mathcal{N}(0, P)$.

Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε από τον πομπό του αναμεταδότη έως την έξοδο του καναλιού ισούται με τη χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού από την έξοδο του αναμεταδότη έως την έξοδο του καναλιού

$$C_{\text{right}} = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\frac{P}{h^2}}{\sigma_2^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{h^2\sigma_2^2}\right).$$

Η X_2 πρέπει να ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή: $X_2 \sim \mathcal{N}(0, P)$.

Ο μέγιστος επιτεύξιμος ρυθμός στο κανάλι θα καθοριστεί από το κομμάτι του καναλιού που έχει τη μικρότερη χωρητικότητα. Επομένως,

$$\begin{aligned} C_{\text{decode-and-reencode}} &= \min\left\{C_{\text{left}}, C_{\text{right}}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\min\left\{\log\left(1 + \frac{P}{h^2\sigma_1^2}\right), \log\left(1 + \frac{P}{h^2\sigma_2^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

(γ) Εάν η πολυπλοκότητα του αναμεταδότη δεν αποτελεί περιοριστικό παράγοντα και $G = h$ (ώστε το σήμα πληροφορίας στην έξοδο του αναμεταδότη-ενισχυτή να έχει ενέργεια P και να είναι δίκαιη η σύγκριση με τον αναμεταδότη-πομποδέκτη), ποια από τις δύο υλοποιήσεις του αναμεταδότη οδηγεί στο μέγιστο επιτεύξιμο ρυθμό μετάδοσης;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Παρατηρούμε ότι, για $G = h$, ισχύει πάντοτε $C_{\text{amplify-and-forward}} < C_{\text{decode-and-reencode}}$ για οποιαδήποτε τιμή του G (εκτός από την ακραία περίπτωση όπου $\sigma_2 = 0$, οπότε οι δύο χωρητικότητες ισούνται). Όταν $\sigma_1 < \sigma_2$, προφανώς $C_{\text{decode-and-reencode}} = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{h^2\sigma_2^2}\right) > \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{h^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) = C_{\text{amplify-and-forward}}$. Παρομοίως, όταν $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $C_{\text{decode-and-reencode}} = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{h^2\sigma_1^2}\right) > \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{h^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) = C_{\text{amplify-and-forward}}$.

Ο αναμεταδότης-ενισχυτής, εκτός από το ωφέλιμο σήμα ενισχύει και το θόρυβο. Επομένως, παρόλο που βελτιώνει τη "σθεναρότητα" του σήματος X_2 που θα μεταδοθεί στο δεύτερο κανάλι, δε συμβάλλει καθόλου στην ανάκτηση πληροφορίας από το σήμα που λαμβάνει. Αντίθετα, εφόσον ο ρυθμός μετάδοσης στο πρώτο κανάλι δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα, ο αναμεταδότης-αποκωδικοποιητής ανακτά το αρχικό σήμα με πιθανότητα σφάλματος αυθαίρετα κοντά στο 0. Δηλαδή, αφαιρεί το θόρυβο N_1 από το σήμα πριν το στείλει στο δεύτερο κανάλι. Φυσικά, μπορεί να αφαιρέσει το θόρυβο μόνο εάν είναι σε θέση να αποκωδικοποιήσει την πληροφορία χωρίς σφάλμα το οποίο απαιτεί η μετάδοση να γίνεται με ρυθμό που δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα. Το κέρδος είναι μεγάλο όταν τα κανάλια έχουν συγκρίσιμο θόρυβο. Όταν ο θόρυβος στο ένα κανάλι είναι δυσανάλογα μεγάλος σε σχέση με το άλλο κανάλι, η χρήση του αναμεταδότη-πομποδέκτη δεν οδηγεί σε σημαντική αύξηση της χωρητικότητας. Μπορεί να αποδειχτεί εύκολα ότι το μεγαλύτερο κέρδος εμφανίζεται όταν $C_{\text{left}} = C_{\text{right}}$.

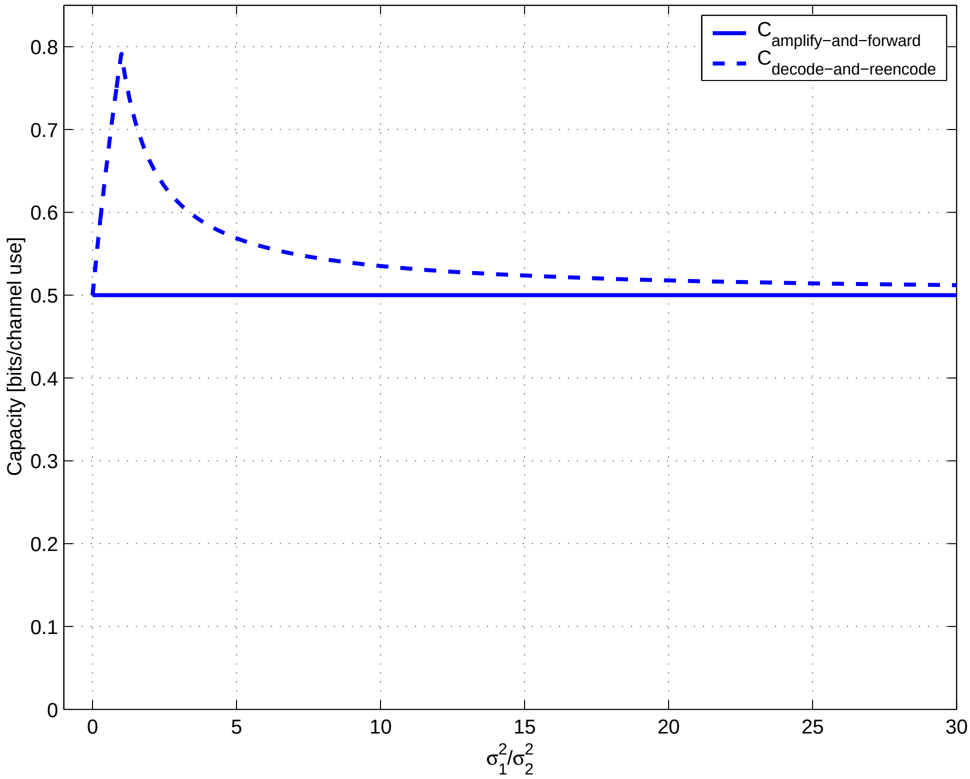
Στο Σχήμα 20 έχουν σχεδιαστεί οι $C_{\text{amplify-and-forward}}$ και $C_{\text{decode-and-reencode}}$ συναρτήσει του σ_1^2/σ_2^2 για $P = 1$, $G = h = 1$ και $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$. Η $C_{\text{amplify-and-forward}}$ είναι σταθερή δεδομένου ότι $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$. Η μεγαλύτερη διαφορά με τη $C_{\text{decode-and-reencode}}$ εμφανίζεται όταν $\sigma_1 = \sigma_2$, οπότε $C_{\text{left}} = C_{\text{right}}$.

Ένα πλεονέκτημα της μεθόδου amplify-and-forward είναι ότι απαιτείται μόνο ένα (τεράστιο) βιβλίο κωδίκων και ένας αποκωδικοποιητής, ενώ η μέθοδος decode-and-reencode απαιτεί 2 (τεράστια) βιβλία κωδίκων και δύο αποκωδικοποιητές, με αποτέλεσμα η καθυστέρηση μετάδοσης και οι απαιτήσεις σε μνήμη και υπολογισμούς να είναι μεγαλύτερες.

36. **Κανάλι (Επαναληπτική εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

Έστω $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2, 3\}$ τα σύμβολα εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα, διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & 1-\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta & \delta \\ 0 & 0 & \delta & 1-\delta \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 20: Σύγκριση χωρητικοτήτων των καναλιών που αντιστοιχούν στις δύο υλοποιήσεις του αναμεταδότη.

Παρατηρήστε ότι όταν η είσοδος του καναλιού ανήκει στο $\mathcal{X}_1 = \{0, 1\}$ η έξοδος ανήκει στο $\mathcal{Y}_1 = \{0, 1\}$. Ομοίως, για $\mathcal{X}_2 = \{2, 3\}$, η έξοδος ανήκει στο $\mathcal{Y}_2 = \{2, 3\}$.

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα μετάβασης του καναλιού.

Απάντηση:

Το διάγραμμα μετάβασης του καναλιού έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 21.

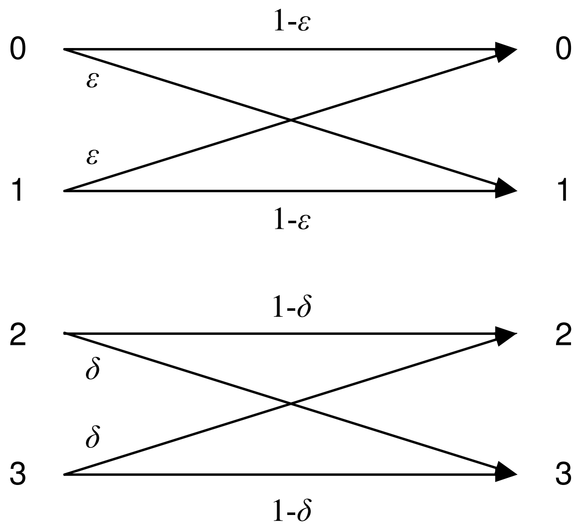
(β) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού για $\epsilon = \delta = 1/2$.

Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι, για $\epsilon = \delta = 1/2$, το κανάλι είναι συμμετρικό. Επομένως,

$$C = \log |\mathcal{Y}| - H([1/2, 1/2, 0, 0]) = 2 - 1 = 1 \text{ bit}.$$

Το αποτέλεσμα είναι διαισθητικά λογικό. Το κανάλι αποτελείται από δύο BSC, το καθένα με πιθανότητα αντιστροφής ίση με 1/2. Επομένως, ο δέκτης μπορεί να ξεχωρίσει ποιο BSC χρησιμοποιούμε, αλλα όχι το σύμβολο που στέλνουμε σε κάθε BSC. Δεδομένου ότι ο πομπός μπορεί να επιλέξει ένα από δύο BSC, μπορούμε να μεταδώσουμε 1 bit πληροφορίας. Παρατηρήστε, επίσης, ότι με τον τρόπο, αυτόν, μετάδοσης, επιτυγχάνουμε πιθανότητα σφάλματος ακριβώς ίση με 0.



Σχήμα 21: Διάγραμμα μετάβασης καναλιού.

Τέλος, υπάρχουν διάφοροι συνδυασμοί κατανομών εισόδου που επιτυγχάνουν τη χωρητικότητα, αρκεί να ισχύει $p(0)+p(1)=p(2)+p(3)=1/2$.

(γ) Στη συνέχεια της άσκησης θεωρούμε ότι τα δ και ϵ μπορούν να πάρουν *οποιεσδήποτε* τιμές (όχι, πλέον, 1/2).

Έστω ότι, για την κατανομή εισόδου, $p(x)$, ισχύει $p(0)+p(1)=\alpha$ και $p(2)+p(3)=1-\alpha$. Δείξτε ότι για την αμοιβαία πληροφορία, $I(X;Y)$, μεταξύ της εισόδου, X, και της εξόδου, Y, του καναλιού P ισχύει

$$I(X;Y)=H(\alpha)+\alpha I(X;Y|X\in\mathcal{X}_1)+(1-\alpha)I(X;Y|X\in\mathcal{X}_2).$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τ.μ. V η οποία υποδηλώνει εάν $X\in\mathcal{X}_1$ ή $X\in\mathcal{X}_2$ και χρησιμοποιήστε τη για να βρείτε εκφράσεις για την $H(X)$ και $H(X|Y)$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Από τον ορισμό της αμοιβαίας πληροφορίας,

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y).$$

Επίσης,

$$H(X,V)=H(X)+H(V|X)=H(X),$$

δεδομένου ότι η V είναι ντετερμινιστική συνάρτηση της X. Επίσης, $H(X,V)=H(V)+H(X|V)$. Επομένως,

$$H(X)=H(V)+H(X|V)=H(\alpha)+\alpha H(X|V=0)+(1-\alpha)H(X|V=1),$$

όπου $V=0$ όταν $X\in\mathcal{X}_1$ και $V=1$ όταν $X\in\mathcal{X}_2$.

Ομοίως, για την $H(X|Y)$,

$$H(X,V|Y) = H(X|Y) + H(V|X,Y) = H(X|Y) = H(V|Y) + H(X|V,Y).$$

Παρατηρούμε ότι $H(V|Y) = 0$. Επίσης, $H(V|X,Y) = \alpha H(X|V=0,Y) + (1-\alpha)H(X|V=1,Y)$.
Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω,

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(\alpha) + \alpha H(X|V=0) + (1-\alpha)H(X|V=1) \\ &- \alpha H(X|V=0,Y) - (1-\alpha)H(X|V=1,Y) \\ &= H(\alpha) + \alpha I(X;Y|V=0) + (1-\alpha)I(X;Y|V=1) \\ &= H(\alpha) + \alpha I(X;Y|X\in\mathcal{X}_1) + (1-\alpha)I(X;Y|X\in\mathcal{X}_2). \end{aligned}$$

(δ) Δείξτε ότι η μεγιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας προκειμένου να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του καναλιού μπορεί να γίνει σε δύο βήματα: Στο πρώτο βήμα βρίσκουμε τις κατανομές $p_1(x|X\in\mathcal{X}_1)$ και $p_2(x|X\in\mathcal{X}_2)$ που μεγιστοποιούν τις $I(X;Y|X\in\mathcal{X}_1)$ και $I(X;Y|X\in\mathcal{X}_2)$, αντίστοιχα. Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε την παράμετρο α που μεγιστοποιεί την $I(X;Y)$. Εάν C_1 είναι η χωρητικότητα του καναλιού

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix}$$

και C_2 η χωρητικότητα του καναλιού

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1-\delta & \delta \\ \delta & 1-\delta \end{bmatrix},$$

εξηγήστε γιατί

$$C \triangleq \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{\alpha} \{H(\alpha) + \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2\}.$$

Απάντηση:

Για οποιαδήποτε συνάρτηση ισχύει

$$\max_{x_1,x_2,\ldots,x_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \max_{x_1}\left\{\max_{x_2}\left\{\cdots\left\{\max_{x_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right\}\right\}\right\}.$$

Επομένως, μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε πρώτα ως προς $p_1(x|X\in\mathcal{X}_1)$ και $p_1(x|X\in\mathcal{X}_2)$ για δεδομένη τιμή της παραμέτρου α και μετά ως προς α. Παρατηρούμε, επίσης ότι

• Η $I(X;Y|X\in\mathcal{X}_1)$ δεν εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου α, αλλά μόνο από την υπό συνθήκη σ.μ.π. $p_1(x|X\in\mathcal{X}_1)$. Επίσης, δεν εξαρτάται από την $p_2(x|X\in\mathcal{X}_2)$ για το συγκεκριμένο κανάλι, P, που θεωρούμε.

• Ομοίως, η $I(X;Y|X \in \mathcal{X}_2)$ εξαρτάται μόνο από την υπό συνθήκη σ.μ.π. $p_2(x|X \in \mathcal{X}_2)$.

Συνεπώς, η μεγιστοποίηση ως προς τις p_1, p_2 και α μπορεί να γίνει ξεχωριστά. Παρατηρούμε, επίσης, ότι $\max_{p_i} I(X;Y|X \in \mathcal{X}_i) = C_i$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} C \triangleq \max_{p(x)} I(X;Y) &= \max_{\alpha} \left\{ H(\alpha) + \alpha \left\{ \max_{p_1} I(X;Y|X \in \mathcal{X}_1) \right\} \right. \\ &= \left. +(1-\alpha) \left\{ \max_{p_2} I(X;Y|X \in \mathcal{X}_2) \right\} \right\} \\ &= \max_{\alpha} \left\{ H(\alpha) + \alpha C_1 + (1-\alpha) C_2 \right\}. \end{aligned}$$

(ε) Δείξτε ότι η χωρητικότητα, C, του καναλιού με πίνακα μετάβασης P ισούται με $C = \log\left(2^{C_1} + 2^{C_2}\right)$.

Απάντηση:

Από το προηγούμενο ερώτημα παρατηρούμε ότι η $I(X;Y)$ είναι άθροισμα μιας γραμμικής συνάρτησης ως προς α και μιας κοίλης ($H(\alpha)$) και, επομένως, είναι κοίλη ως προς α. Συνεπώς, για να βρούμε την τιμή της α που μεγιστοποιεί την $I(X;Y)$, αρκεί να βρούμε την τιμή της α για την οποία μηδενίζεται η $\partial I(X;Y)/\partial\alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(X;Y)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha} + C_1 - C_2 \\ &= -\log_2 \alpha + \alpha \frac{1}{\alpha} \log_2 e + \log_2(1-\alpha) - (1-\alpha)\frac{1}{1-\alpha} \log_2 e + C_1 - C_2 \\ &= \log_2 \frac{1-\alpha}{\alpha} + C_1 - C_2 = 0 \\ \Rightarrow \log_2 \frac{\alpha}{1-\alpha} &= C_1 - C_2 \Rightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha} = 2^{C_1}/2^{C_2} \Rightarrow \alpha 2^{C_2} = (1-\alpha) 2^{C_1} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{2^{C_1}}{2^{C_1} + 2^{C_2}}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας,

$$\begin{aligned} C = &-\frac{2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}} \log_2 \frac{2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}} - \frac{2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}} \log_2 \frac{2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}} \\ &+ \frac{C_1 2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}} + \frac{C_2 2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}} \\ = &-\frac{C_1 2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}} + \frac{\log_2\left(2^{C_1}+2^{C_2}\right) 2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}} - \frac{C_2 2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}} + \frac{\log_2\left(2^{C_1}+2^{C_2}\right) 2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}} \\ &+ \frac{C_1 2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}} + \frac{C_2 2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}} = \log_2\left(2^{C_1}+2^{C_2}\right). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $2^C = 2^{C_1} + 2^{C_2}$ το οποίο είναι διαισθητικά αναμενόμενο. Δεδομένου ότι τα υπο-κανάλια είναι ανεξάρτητα, ο συνολικός αριθμός διακριτών μηνυμάτων που μπορούμε να μεταδώσουμε στο κανάλι ισούται με τον άθροισμα των διακριτών μηνυμάτων που μπορούμε να μεταδώσουμε σε κάθε επιμέρους υπο-κανάλι.

37. ***Κανάλι – Cover & Thomas 7.12 (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

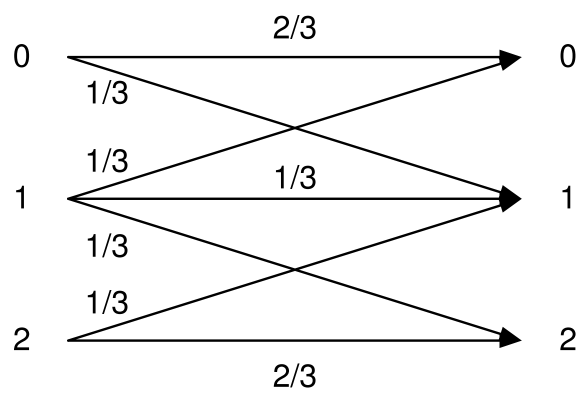
Θεωρούμε το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα του καναλιού.

Απάντηση:

Το διάγραμμα του καναλιού δίνεται στο Σχήμα 22. Σημειώνεται ότι το αλφάβητο εισόδου και εξόδου έχει επιλεγεί τυχαία.



Σχήμα 22: Διάγραμμα καναλιού με 3 εισόδους και 3 εξόδους.

(β) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Εξηγήστε διαισθητικά γιατί μία από τις εισόδους του καναλιού (ποια;) δε χρησιμοποιείται όταν μεταδίδουμε με ρυθμό αυθαίρετα κοντά στη χωρητικότητα.

Υπόδειξη: Εκμεταλλευτείτε κάποια συμμετρία στο κανάλι για να απλοποιήσετε τις πράξεις.

Απάντηση:

Ο πιο εύκολος τρόπος να λυθεί το πρόβλημα είναι παρατηρώντας ότι το κανάλι συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο για τις εισόδους 0 και 2. Επομένως, για να επιτύχουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα, πρέπει $p(0) = p(2)$.

Ένας άλλος τρόπος για να δικαιολογηθεί αυτή η επιλογή είναι ο εξής. Στο μάθημα Προχωρημένα Θέματα Θ. Π. είδαμε ότι, για όλες τις εισόδους, x_i, ενός καναλιού που χρησιμοποιούνται πρέπει να ισχύει $I(X = x_i; Y) = C$, όπου C η χωρητικότητα του καναλιού. Επομένως, πρέπει να ισχύει $I(X = 0; Y) = I(X = 2; Y)$ ή $H(Y) - H(Y|X = 0) = H(Y) - H(Y|X = 2)$ η $H(Y|X = 0) = H(Y|X = 2)$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι η ισότητα ισχύει εάν και μόνο εάν $p(X = 0) = p(X = 2)$.

Εάν, λοιπόν, θέσουμε $p(0) = p(2) = \alpha$ και $p(1) = 1 - \alpha$, η λύση προκύπτει εύκολα εκφράζοντας την $I(X; Y)$ συναρτήσει του α και παραγωγίζοντας.

Στη συνέχεια δίνεται η γενικότερη λύση, όπου $p_X = \{\alpha, 1 - \alpha - \beta, \beta\}$.

$$\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= -\frac{1}{3}(1+\alpha-\beta)\log\frac{1}{3}(1+\alpha-\beta) - \frac{1}{3}(1-\alpha+\beta)\log\frac{1}{3}(1-\alpha+\beta) \\
&- \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} \\
&- \alpha H\left(\frac{1}{3}\right) - \beta H\left(\frac{1}{3}\right) - (1-\alpha-\beta)\log 3 \\
&= -\frac{1}{3}(1+\alpha-\beta)\log(1+\alpha-\beta) + \frac{1}{3}(1+\alpha-\beta)\log 3 \\
&- \frac{1}{3}(1-\alpha+\beta)\log(1-\alpha+\beta) + \frac{1}{3}(1-\alpha+\beta)\log 3 + \frac{1}{3}\log 3 \\
&- \alpha H\left(\frac{1}{3}\right) - \beta H\left(\frac{1}{3}\right) - (1-\alpha-\beta)\log 3 \\
&= -\frac{1}{3}(1+\alpha-\beta)\log(1+\alpha-\beta) - \frac{1}{3}(1-\alpha+\beta)\log(1-\alpha+\beta) + \frac{1}{3}\log 3 \\
&+ (\alpha+\beta)\left(\log 3 - H\left(\frac{1}{3}\right)\right) - \frac{1}{3}\log 3.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη γραμμή μεγιστοποιείται όταν $\alpha = \beta$ (πρόκειται για την εντροπία μιας κατανομής με 3 μάζες), ενώ η 2η γραμμή μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται το $(\alpha+\beta)$. Δεδομένου ότι $\alpha+\beta \leq 1$, θέλουμε $\alpha+\beta = 1$. Συνεπώς, $\alpha = \beta = 0.5$.

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε ότι $C = \log_2 3 - H\left(\frac{1}{3}\right)$. Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας μόνο τα σύμβολα 0 και 2.

Διαισθητικά, ο λόγος για τον οποίο δε χρησιμοποιείται η είσοδος 1 είναι ότι οδηγεί σε όλες τις εξόδους με την ίδια πιθανότητα.

(γ) Επαληθεύστε ότι η χωρητικότητα του καναλιού είναι η ίδια με αυτή του καναλιού διαγραφής (Binary Erasure Channel).

Απάντηση:

Η επαλήθευση μπορεί να γίνει αριθμητικά ή παρατηρώντας ότι, όταν χρησιμοποιούμε μόνο τις εισόδους 0 και 2, το κανάλι εκφυλίζεται σε κανάλι διαγραφής με πιθανότητα διαγραφής 1/3.

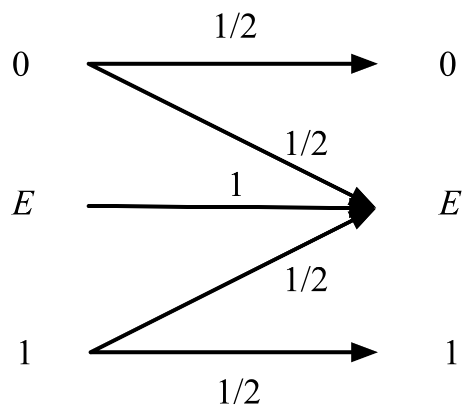
Αριθμητικά,

$$C = \log 3 - H\left(\frac{1}{3}\right) = \log 3 - \frac{1}{3}\log 3 - \frac{2}{3}\log 3 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3} = C_{\mathrm{BEC}}.$$

38. **Χρήση διαγραφής από τον πομπό (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2010)**

Όπως είδαμε στο μάθημα, η χωρητικότητα του *δυαδικού* καναλιού διαγραφής (binary erasure channel - BEC) ισούται με $C = 1 - \alpha$ και επιτυγχάνεται με χρήση ομοιόμορφης κατανομής στον πομπό (Bern(1/2)). Στην άσκηση αυτή θα εξετάσουμε εάν έχει νόημα, εφόσον αυτό είναι εφικτό, ο πομπός να στέλνει όχι μόνο δύο σύμβολα (π.χ. 0 και 1), αλλά και ένα τρίτο σύμβολο διαγραφής. Στην άσκηση αυτή δε θα μας απασχολήσει σε τι αντιστοιχεί ένα σύμβολο διαγραφής στην πράξη και απλώς θα το δούμε ως ένα τρίτο σύμβολο εισόδου που έχουμε στη διάθεσή μας για τη μετάδοση.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε το διακριτό κανάλι *χωρίς μνήμη* του Σχήματος 23. Τα σύμβολα 0 και 1 διαγράφονται με πιθανότητα 1/2, ενώ, αν στείλουμε διαγραφή, θεωρούμε ότι φτάνει πάντοτε στο δέκτη ως διαγραφή.



Σχήμα 23: Τροποποιημένο Κανάλι Διαγραφής με 3 εισόδους.

(α) Είναι το κανάλι συμμετρικό; Είναι το κανάλι ασθενώς συμμετρικό;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης του καναλιού είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Το κανάλι δεν είναι ούτε συμμετρικό ούτε ασθενώς συμμετρικό, αφού η δεύτερη γραμμή του P δεν προκύπτει από αναδιάταξη της πρώτης.

(β) Δώστε ένα άνω φράγμα, C_{UB}, και ένα κάτω φράγμα, C_{LB}, για τη χωρητικότητα του καναλιού. Το κάτω φράγμα που ζητείται πρέπει να είναι *αυστηρώς* μεγαλύτερο του 0.5: $C_{\text{LB}} > 0.5$ bits. Με βάση τα όρια που βρήκατε, αν μας δίνεται η δυνατότητα, κερδίζουμε σε χωρητικότητα αν χρησιμοποιήσουμε και το 3ο σύμβολο διαγραφής στον πομπό;

Υπόδειξη: Αν δυσκολεύεστε να βρείτε $C_{\text{LB}} > 0.5$ bits, πιθανώς να σας βοηθήσει η απάντησή σας στο επόμενο Ερώτημα (γ).

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί, δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και ότι $H(1/3) \triangleq -\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\log\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.9183$ bits.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Αν δε χρησιμοποιήσουμε καθόλου την είσοδο E, χρησιμοποιούμε το κανάλι ως δυαδικό κανάλι διαγραφής και, επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε έως $1-\alpha = 1/2$ bits. Συνεπώς, $C \geq 1/2$ bits. Ωστόσο, μπορούμε να βρούμε καλύτερο φράγμα ως εξής: Για οποιαδήποτε κατανομή εισόδου, $p(x)$, η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου αποτελεί κάτω φράγμα για τη χωρητικότητα του καναλιού. Εάν χρησιμοποιήσουμε ομοιόμορφη κατανομή $X \sim \text{Unif}[1/3, 1/3, 1/3]$ προκύπτει εύκολα ότι $p(y) = \{1/6, 4/6, 1/6\}$. Συνεπώς, $H(Y) = H(1/3) + 2\times 1/6 \times H(1/2) = H(1/3) + 1/3$ bits. Επίσης, $H(Y|X) = 2 \times \frac{1}{3}H(1/2) = 2/3$. Άρα, $C_{\text{LB}} = I(X;Y) = H(1/3) - 1/3 \approx 0.585$ bits.

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι $C \leq |\mathcal{Y}|$ και $C \leq |\mathcal{X}|$. Επομένως, $C \leq \log_2 3 \approx 1.585 \text{ bits} = C_{\text{UB}}$.

Ένα καλύτερο άνω φράγμα (το οποίο δε χρειαζόταν να βρείτε για το διαγώνισμα) μπορεί να βρεθεί ως εξής: Θεωρούμε το κανάλι του Σχήματος 24. Από την Άσκηση της Επαναληπτικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου (ή από Cover & Thomas Άσκηση 7.28), αν θεωρήσουμε 2 υπο-κανάλια, ένα κανάλι Z με $f = 0.5$ και χωρητικότητα C_1 και ένα τετριμμένο κανάλι με 1 είσοδο και 1 έξοδο), η χωρητικότητα του καναλιού του Σχήματος 24 ισούται με

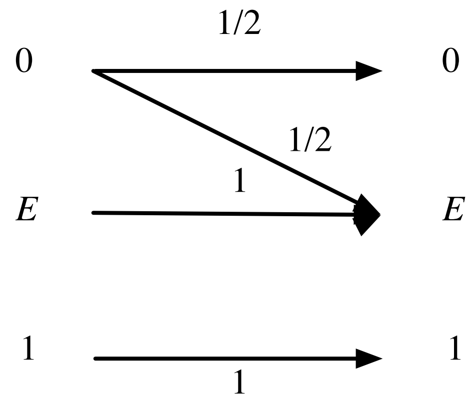
$$C' = \log_2\left(2^{C_1} + 2^{C_2}\right) \approx \log_2(2^{0.322} + 2^0) \approx 1.17 \text{ bits}.$$

Θεωρούμε, τώρα, το Κανάλι του Σχήματος 25. Πρόκειται για ένα κανάλι Z με $f = 0.5$, δεδομένου ότι δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις εισόδους E και 1.

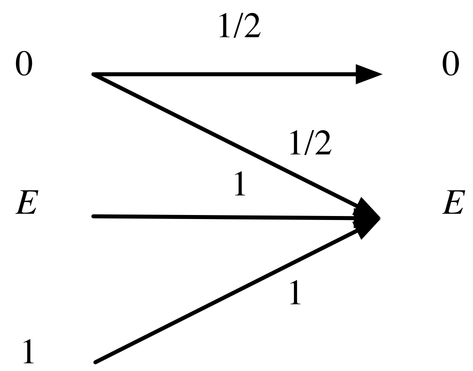
Συνεπώς,

$$C'' \approx 0.322 \text{ bits}.$$

Για δεδομένη $p(x)$, η $I(X;Y)$ είναι *κυρτή* $\cup$ συνάρτηση της $p(y|x)$. Δηλαδή, αν για δύο κατανομές μετάβασης $p_1(y|x)$ και $p_2(y|x)$ και για δεδομένη κατανομή εισόδου, $p(x)$, η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου ισούται με I_1 και I_2, αντίστοιχα, για την αμοιβαία πληροφορία, I, που επιτυγχάνεται με την κατανομή $\theta p_1(y|x) + (1-\theta)p_2(y|x)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $I \leq \theta I_1 + (1-\theta)I_2$. Παρατηρήστε, τώρα, ότι η $p(y|x)$ του καναλιού του Σχήματος 23 αποτελεί κυρτό συνδυασμό (convex combination) των κατανομών των καναλιών των Σχημάτων 24 και 25 με $\theta = 0.5$.



Σχήμα 24: Κανάλι για υπολογισμό C_{UB}.



Σχήμα 25: Κανάλι για υπολογισμό C_{UB}.

Συνεπώς, για οποιαδήποτε $p(x)$, $I(X;Y) \leq \theta I_1 + (1-\theta)I_2 \leq \theta C' + (1-\theta)C''$. Επομένως, και για την $p^*(x)$ η οποία επιτυγχάνει τη χωρητικότητα του καναλιού, $C \leq \theta C' + (1-\theta)C''$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $C \leq C' \approx 1.17$ bits.

Τέλος, ένας άλλος τρόπος να βρούμε ένα άνω φράγμα για τη C είναι με χρήση της σχέσης $C \leq \max H(Y)$. Ωστόσο, πρέπει να προσέξουμε το εξής: Η κατανομή εισόδου, $p(x)$, που μεγιστοποιεί την $H(Y)$ δεν είναι, κατ' ανάγκη ίδια με την κατανομή που μεγιστοποιεί την $I(X;Y)$. Θέτοντας $p_X(0) = p_X(1) = p$ (δείτε την αιτιολόγηση για αυτήν την επιλογή στο Ερώτημα (γ)), $H(Y) = H(p) + 2 \times \frac{p}{2} \times H(1/2) = H(p) + p$. Πρέπει, τώρα, να μεγιστοποιήσουμε την $H(p) + p$. Απλή παραγώγιση δίνει $p = 2/3$, τιμή η οποία δεν είναι αποδεκτή γιατί πρέπει $2p \leq 1$. Πρέπει, λοιπόν, να μεγιστοποιήσουμε την $H(p) + p$ υπό τον περιορισμό $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$. Στη γενική περίπτωση, απαιτείται χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange. Ωστόσο, στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την κυρτότητα της $H(Y)$ και το γεγονός ότι, αν δεν έχουμε περιορισμό, η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται για $p > \frac{1}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι η $H(p) + p$ μεγιστοποιείται σε ένα από τα άκρα του διαστήματος επιτρεπτών τιμών της p. Επειδή $H(0) + 0 = 0$, $\max\{H(p) + p\} = H(1/2) + 1/2 = 1.5$ bits. Άρα, η $H(Y)$ μεγιστοποιείται για $p_X(0) = p_X(1) = 1/2$ και $P_X(E) = 0$. Παρατηρήστε ότι, παρόλο που η ομοιόμορφη κατανομή εισόδου οδηγεί σε μεγαλύτερη αμοιβαία πληροφορία απ' ό,τι η κατανομή $p_X(0) = p_X(1) = 1/2$ και $P_X(E) = 0$ (και, μάλιστα, επιτυγχάνει τη χωρητικότητα, όπως θα δούμε στο Ερώτημα (γ)), η $H(Y)$ σε αυτήν την περίπτωση ισούται με 1.2516 bits.

Δεδομένου ότι $C_{\text{LB}} > 0.5 = C_{\text{BEC}}$, συμφέρει να μεταδίδουμε και διαγραφές από τον πομπό, εφόσον μας δίνεται η δυνατότητα.

(γ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα, C, του καναλιού του Σχήματος 23, καθώς και την κατανομή πομπού, $p^*(x)$, με την οποία επιτυγχάνεται.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συμμετρία του διαγράμματος μετάβασης του καναλιού για να απλοποιήσετε τις πράξεις (Προσοχή: Δε σημαίνει, απαραίτητα, ότι το κανάλι είναι συμμετρικό ή ασθενώς συμμετρικό).

Απάντηση:

Από τη συμμετρία του διαγράμματος μετάβασης, $p_X(0) = p_X(1) = p$ και $p_X(E) = 1 - 2p$. Επομένως, $p_Y(0) = p_Y(1) = p/2$ και $p_Y(E) = 1 - p$. Αυτό μπορούμε να το δικαιολογήσουμε ως εξής: Κατ' αρχάς, διαισθητικά, δεδομένου ότι αν "αναποδογυρίσουμε" το κανάλι θα είναι το ίδιο, δεν υπάρχει λόγος να χρησιμοποιήσουμε μια είσοδο με μεγαλύτερη πιθανότητα από μία άλλη. Πιο αυστηρά, αν η χωρητικότητα επιτυγχάνεται από την κατανομή $p_X(0) = p$, $p_X(1) = q$ και $p_X(E) = 1 - p - q$, τότε μπορούμε να επιτύχουμε τη χωρητικότητα και με την κατανομή $p_X(0) = q$, $p_X(1) = p$ και $p_X(E) = 1 - p - q$. Δεδομένου ότι, για δεδομένες $p(y|x)$, η αμοιβαία πληροφορία είναι κοίλη $\cap$ συνάρτηση της $\mathbf{p}$, οποιοσδήποτε κυρτός συνδυασμός των δύο κατανομών οδηγεί σε αμοιβαία πληροφορία τουλάχιστον ίση με την αμοιβαία πληροφορία που επιτυγχάνει κάθε μία από τις δύο κατανομές. Άρα, με χρήση της $p_X(0) = (p + q)/2$, $p_X(1) = (p + q)/2$ και $p_X(E) = 1 - p - q$ μπορούμε να επιτύχουμε τη χωρητικότητα. Ένας άλλος τρόπος είναι με χρήση του εξής θεωρήματος (που δεν έχουμε αναφέρει σε αυτό το μάθημα): Για τις κατανομές εισόδου $p_X(x)$ που επιτυγχάνουν τη χωρητικότητα ισχύει $I(Y; X = x) = C$ για όλα τα x για τα οποία $p_X(x) > 0$. Άρα, αν χρησιμοποιηθούν οι είσοδοι 0 και 1, θα ισχύει $I(Y; X = 0) = I(Y; X = 1) = C$. Δεδομένης της συμμετρίας του καναλιού, για να επιτύχουμε $I(Y; X = 0) = I(Y; X = 1)$ χρειαζόμαστε και ίσες πιθανότητες εισόδου. Τέλος, ένας σαφώς πιο πολύπλοκος τρόπος είναι να μη χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρία του διαγράμματος και να μεγιστοποιήσουμε συνάρτηση 2 μεταβλητών.

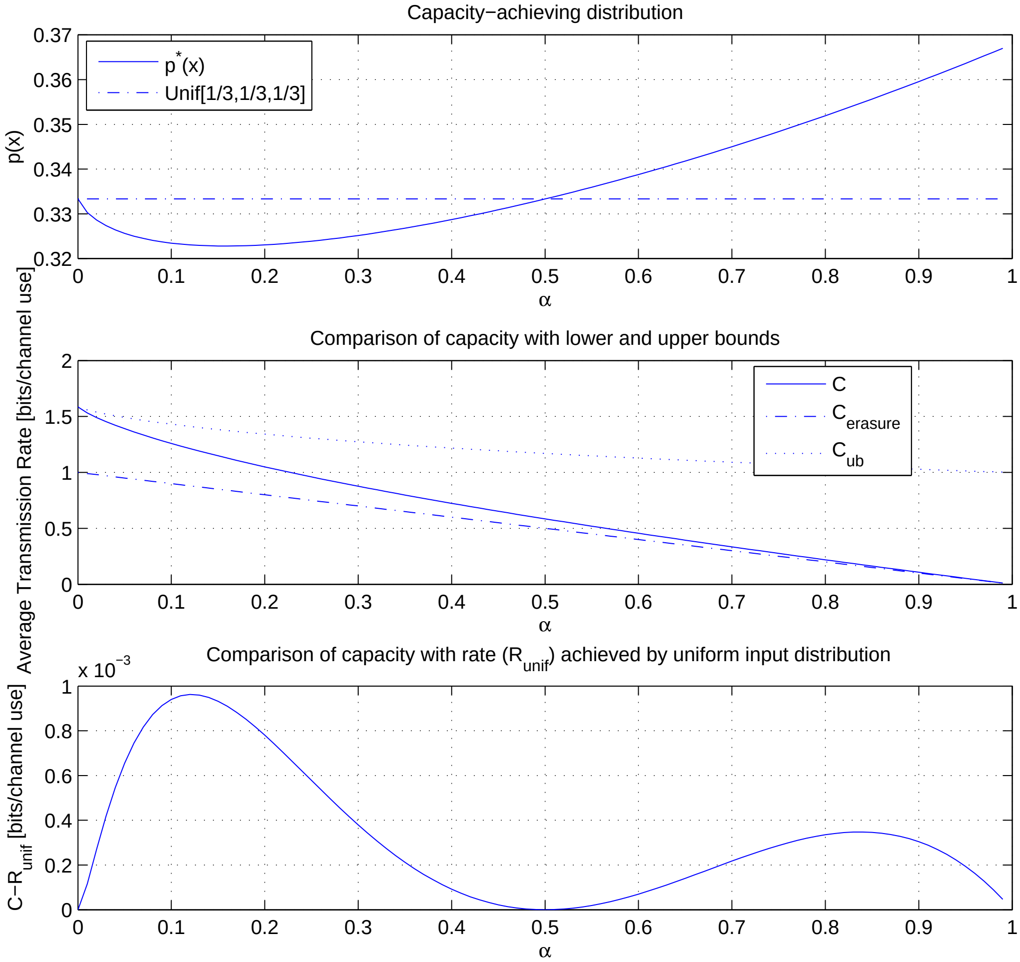
Συνεπώς, χρησιμοποιώντας $p_X(0) = p_X(1) = p$, $H(Y) = H(p) + 2 \times \frac{p}{2} \times H(1/2) = H(p) + p$. $H(Y|X) = 2 \times p \times H(1/2) = 2p$. Άρα, $I(X; Y) = H(p) - p$. Δεδομένου ότι η $I(X; Y)$ είναι κοίλη $\cap$ συνάρτηση της $p(x)$ για δεδομένη $p(y|x)$, μπορούμε να βρούμε το μέγιστο της $I(X;Y)$ παραγωγίζοντας ως προς p:

$$I(X;Y) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) - p \Rightarrow$$
$$\frac{dI(X;Y)}{dp} = -\log_2 p - p\frac{1}{p}\log_2 e + \log_2(1-p) - (1-p)\cdot(-1)\frac{1}{1-p}\log_2 e - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\log_2\frac{1-p}{p} = 1 \Rightarrow \frac{1-p}{p} = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{3}.$$

Επομένως, παρόλο που το κανάλι δεν είναι συμμετρικό η κατανομή που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα είναι η ομοιόμορφη: $p^*(x) = \{1/3, 1/3, 1/3\}$.
Η χωρητικότητα του καναλιού ισούται με $C = H(p) - p = H(1/3) - 1/3 \approx 0.585$ bits.
Σημείωση: Είναι δελεαστικό να δουλέψουμε με φυσικούς λογαρίθμους (δηλαδή να εκφράσουμε την εντροπία σε nats) για να απλοποιήσουμε τις παραγωγίσεις. Ωστόσο, σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να προσέξουμε, γιατί $H(1/2) = \ln 2$ nats! (και όχι 1).

Στη συνέχεια δίνεται ένα πρόγραμμα σε MATLAB το οποίο σχεδιάζει τη χωρητικότητα του καναλιού για διαφορετικές πιθανότητες μετάβασης α και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Επίσης, η χωρητικότητα συγκρίνεται με τη χωρητικότητα του αντίστοιχου BEC, με τη χωρητικότητα του καναλιού του Σχήματος 24, καθώς και με το ρυθμό μετάδοσης που επιτυγχάνεται με την ομοιόμορφη κατανομή (Σχήμα 26). Παρατηρούμε ότι η βέλτιστη κατανομή εισόδου έχει αρκετά ενδιαφέρουσα συμπεριφορά: Είναι σχεδόν ομοιόμορφη και ταυτίζεται με την ομοιόμορφη για $\alpha = 0$ και $\alpha = 0.5$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι η απώλεια ρυθμού μετάδοσης όταν χρησιμοποιείται ομοιόμορφη κατανομή εισόδου σε σχέση με τη χωρητικότητα είναι πολύ μικρή για όλες τις τιμές του α (και μηδενική για $\alpha = 0$ και 0.5). Τέλος, όπως περιμέναμε, η χωρητικότητα μεγιστοποιείται όταν $\alpha = 0$ οπότε το κανάλι δεν έχει θόρυβο ($C = \log 3$) και ισούται με 0 όταν $\alpha = 1$, οπότε όλες οι είσοδοι οδηγούν στην Έξοδο E.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% EE676 - Information Theory              %
% Sample code for Problem 3 of 2010 Final %
%                                         %
% Dimitris Toumpakaris, 20/01/2010        %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all;

% transition probability values of the channel
alpha = linspace(0,0.99,100);

% Calculate intermediate parameters
```



Σχήμα 26: Κανάλι για υπολογισμό C_{UB}.

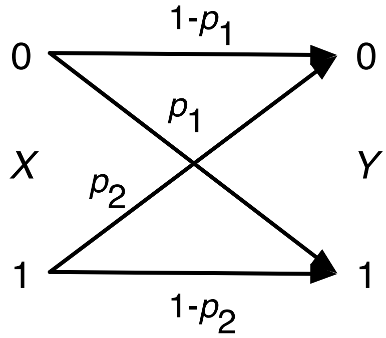
```
H_alpha = -alpha.*log2(alpha) - (1-alpha).*log2(1-alpha);

% Set H_alpha corresponding to alpha=0 manually
% to avoid numerical problems
H_alpha(1) = 0;

% calculate distribution that achieves capacity
p = 1/2./(1-alpha)./(1.+2.^((H_alpha+alpha-1)./(1-alpha)));
clf;
subplot(3,1,1);
plot(alpha,p);
grid on;
hold on;
```

```
% show intersection with uniform distribution
unif = 1/3*ones(1,100);
plot(alpha,unif,'-.');

title('Capacity-achieving distribution')
xlabel('\alpha')
ylabel('p(x)')
legend('p^*(x)','Unif[1/3,1/3,1/3]');

% find corresponding capacity
beta = 2.*(1-alpha).*p;
C = -beta.*log2(beta)-(1-beta).*log2(1-beta) + 2.*p.*(1-alpha-H_alpha);

% generate plot comparing capacity with corresponding erasure channel
subplot(3,1,2);
plot(alpha,C);
grid on;
hold on;

% plot capacity of erasure channel with alpha
plot(alpha,1-alpha,'-.');

% plot capacity of combined Z channel and trivial channel
% with one input and one output
C_ub = log2(2+(1-alpha).*alpha.^(alpha./(1-alpha)));
plot(alpha,C_ub,':');

title('Comparison of capacity with lower and upper bounds');
xlabel('\alpha');
ylabel('Average Transmission Rate [bits/channel use]');
legend('C','C_{erasure}','C_{ub}');

% generate plot comparing capacity with lower bound achieved
% with uniform input distribution
subplot(3,1,3);

% plot lower bound assuming that the uniform input distribution is used
p_lb = 1/3*ones(1,100);
beta_lb = 2.*(1-alpha).*p_lb;
C_lb = -beta_lb.*log2(beta_lb)-(1-beta_lb).*log2(1-beta_lb) +...
  2.*p_lb.*(1-alpha-H_alpha);
plot(alpha,C-C_lb);
```

```
title('Comparison of capacity with rate (R_{unif})...
       achieved by uniform input distribution');
xlabel('\alpha');
ylabel('C-R_{unif} [bits/channel use]');
grid on;
hold on;
```

39. **Μη συμμετρικό Δυαδικό Κανάλι (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2010)**

Θεωρούμε το *μη συμμετρικό* δυαδικό κανάλι του Σχήματος 27.



Σχήμα 27: Το μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι.

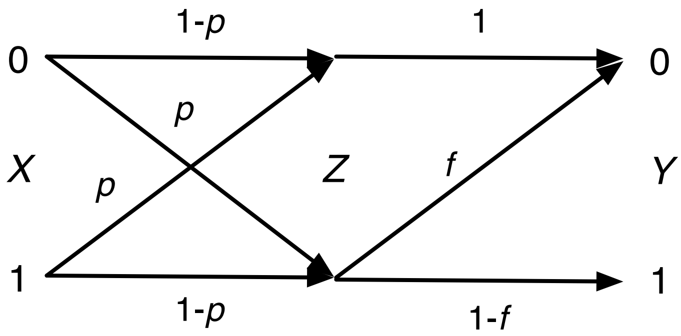
Σε περίπτωση που σας χρειαστεί στην άσκηση, δίνεται ότι η χωρητικότητα του καναλιού Z ισούται με $C \leq \log\left(1 + (1-f) f^{f/(1-f)}\right)$, όπου f η πιθανότητα μετάβασης από το 1 στο 0.

(α) Δείξτε ότι το μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι μπορει να γραφτεί ως διαδοχή ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p και ενός καναλιού Z με πιθανότητα μετάβασης από το 1 στο 0 ίση με f. Δώστε εκφράσεις για τις παραμέτρους p και f συναρτήσει των p_1 και p_2.

Απάντηση:

Θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $p_2 \geq p_1$. Αν $p_1 \geq p_2$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το κανάλι Z που αναστρέφει το ψηφίο εισόδου 0. Από το Σχήμα 28,

$$\begin{aligned}
&\Pr\{Y=0|X=0\} = 1-p_1 = 1-p+pf = 1-p(1-f),\\
&\Pr\{Y=1|X=0\} = p_1 = p(1-f),\\
&\Pr\{Y=1|X=1\} = 1-p_2 = (1-p)(1-f) \text{ και}\\
&\Pr\{Y=0|X=1\} = p_2 = p+(1-p)f.
\end{aligned}$$

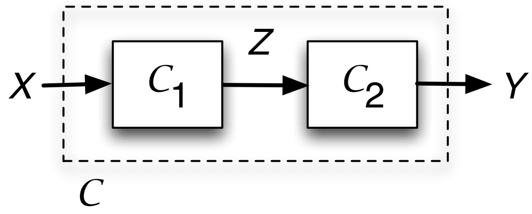


Σχήμα 28: Το δυαδικό μη συμμετρικό κανάλι ως διαδοχή BSC και καναλιού Z.

Επομένως, $f = p_2 - p_1$ και $p = \frac{p_1}{1+p_1-p_2}$.
Παρατηρήστε ότι όταν $p_1 = p_2$, $f = 0$ και $p = p_1 = p_2$.

(β) Δείξτε ότι για *οποιοδήποτε* κανάλι $\mathcal{C}$ που μπορεί να γραφτεί ως διαδοχή δύο καναλιών $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, $C \leq \min\{C_1, C_2\}$, όπου C, C_1 και C_2 είναι οι χωρητικότητες των καναλιών $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, αντίστοιχα.
Επίσης, δώστε μια ικανή συνθήκη για να ισχύει η ισότητα, δηλαδή
$C = \min\{C_1, C_2\}$.

Απάντηση:



Σχήμα 29: Διαδοχή καναλιών.

Από την ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων γνωρίζουμε ότι

$$I(X;Y) \leq I(X;Z) \text{ και}$$
$$I(X;Y) \leq I(Z;Y).$$

Επομένως,

$$C = \max I(X;Y) \leq \max I(X;Z) = C_1 \text{ και}$$
$$C = \max I(X;Y) \leq \max I(Z;Y) = C_2.$$

Συνεπώς, $C \leq \min\{C_1, C_2\}$.

Η ισότητα ισχύει όταν τουλάχιστον ένα από τα κανάλια είναι ντετερμινιστικό και αντιστρέψιμο (1-προς-1).

(γ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα Ερωτήματα (α) και (β) βρείτε ένα *άνω* φράγμα για τη χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού. Το άνω φράγμα πρέπει να είναι συνάρτηση των p_1 και p_2.

Απάντηση:

Η χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα του δυαδικού συμμετρικού καναλιού με παράμετρο p. Επίσης, δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα του καναλιού Z με παράμετρο f.

Επομένως,

$$C \leq 1 - H(p) = 1 - H\left(\frac{p_1}{1+p_1-p_2}\right)$$

και

$$C \leq \log\left(1 + (1-f)f^{f/(1-f)}\right) = \log\left(1 + (1+p_1-p_2)(p_2-p_1)^{\frac{p_2-p_1}{1+p_1-p_2}}\right).$$

(δ) Βρείτε ένα *κάτω* φράγμα για τη χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού (χωρίς να χρησιμοποιήσετε, κατ' ανάγκη, τα προηγούμενα ερωτήματα). Δε χρειάζεται να δώσετε αναλυτικές εκφράσεις. Αρκεί να εξηγήσετε πώς μπορεί να υπολογιστεί το κάτω φράγμα.

Απάντηση:

Μπορούμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα αν υπολογίσουμε την αμοιβαία πληροφορία, $I(X;Y)$, για ομοιόμορφη κατανομή εισόδου.

$\mathbf{p}_X = (1/2, 1/2) \Rightarrow \mathbf{p}_Y = (1/2 + 1/2(p_2-p_1), 1/2 - 1/2(p_2-p_1))$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} I(X;Y)\big|_{\mathbf{p}_X=(1/2,1/2)} &= H(Y) - H(Y|X) = \\ &= H\left(1/2 + 1/2(p_2-p_1), 1/2 - 1/2(p_2-p_1)\right) \\ &- \frac{1}{2}H(p_1) - \frac{1}{2}H(p_2) \leq C. \end{aligned}$$

40. **Δυαδικό συμμετρικό κανάλι με μεταβαλλόμενη πιθανότητα αναστροφής ψηφίου (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2011)**

Θεωρούμε ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου $p \leq \frac{1}{2}$. Ωστόσο, η πιθανότητα αναστροφής ψηφίου μεταβάλλεται με το χρόνο, n. Συγκεκριμένα, η p_n μπορεί να πάρει δύο πιθανές τιμές, p_A και p_B. Θεωρούμε, επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $0 \leq p_A \leq p_B \leq \frac{1}{2}$. Η διαδικασία p_n είναι ανεξάρτητη και ομοίως κατανεμημένη (i.i.d.), δηλαδή η τιμή της τη χρονική στιγμή n δεν εξαρτάται από προηγούμενες χρονικές στιγμές και δεν επηρεάζει επόμενες χρονικές στιγμές.

Έστω ότι $\Pr\{p_n = p_A\} = \alpha = 1 - \Pr\{p_n = p_B\}$.

(α) Εάν γνωρίζουμε την τιμή της p_n τη χρονική στιγμή n, με τι ισούται η χωρητικότητα, C, του καναλιού τη χρονική στιγμή n; Θα ονομάσουμε την τιμή αυτή $C(S_n)$ όπου $S_n = A$ ή B, ανάλογα με την τιμή της p_n (p_A ή p_B, αντίστοιχα).

Με ποια κατανομή εισόδου επιτυγχάνεται η χωρητικότητα;

Απάντηση:

Εάν γνωρίζουμε την τιμή της p_n, κατά τα γνωστά από το δυαδικό συμμετρικό κανάλι, $C(S) = 1 - H(p_S)$. Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη κατανομή εισόδου.

(β) Εάν χρησιμοποιήσουμε το κανάλι πάρα πολλές φορές ($n \to \infty$) και κάθε φορά γνωρίζουμε την τιμή της p_n στον πομπό (η οποία, όμως, εξακολουθεί να μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο) ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε; Δηλαδή, με τι ισούται η ποσότητα

$$C_{perfect} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C(S_n);$$

Απάντηση:

Με πιθανότητα α το κανάλι θα βρίσκεται στήν κατάσταση A, ενώ με πιθανότητα $1-\alpha$ στην κατάσταση B. Επομένως, στο όριο,

$$C_{perfect} = \alpha C(A) + (1-\alpha)C(B) = 1 - \alpha H(p_A) - (1-\alpha)H(p_B).$$

Δηλαδή, στο όριο, θα χρησιμοποιήσουμε το κανάλι ως κανάλι A $n_A \approx \alpha n$ φορές (οπότε θα στείλουμε $\alpha C(A)n$ bits) και ως κανάλι B $n_B \approx (1-\alpha)n$ φορές.

(γ) Έστω, τώρα, ότι δε γνωρίζουμε την τιμή της p_n στον πομπό. Δείξτε ότι μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κανάλι ως ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με παράμετρο $\bar{p}$. Δώστε μια έκφραση για την $\bar{p}$ συναρτήσει των α, p_A και p_B, καθώς και για τη χωρητικότητα, $C_{no\ state\ info}$, εάν υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε το κανάλι n φορές με $n \to \infty$.

Απάντηση:

Με χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, η πιθανότητα το ψηφίο 0 να αντιστραφεί στο 1 μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}\bar{p} = \Pr\{0 \to 1\} &= \Pr\{S = A\}\Pr\{0 \to 1|S = A\} + \Pr\{S = B\}\Pr\{0 \to 1|S = B\}\\ &= \alpha p_A + (1-\alpha)p_B.\end{aligned}$$

Αντίστοιχα μπορούμε να εξαγάγουμε και τις υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης. Επομένως, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κανάλι ως BSC με $\bar{p} = \alpha p_A + (1-\alpha)p_B$.

Η χωρητικότητα ισούται με $C_{no\ state\ info} = 1 - H(\bar{p}) = 1 - H(\alpha p_A + (1-\alpha)p_B)$ και επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη κατανομή εισόδου.

(δ) Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός, $R_{conservative}$, με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε αν είμαστε συντηρητικοί και υποθέσουμε ότι η p_n παίρνει πάντοτε τη (χειρότερη) τιμή p_B; Τι κατανομή εισόδου πρέπει να χρησιμοποιήσουμε; Συγκρίνετε με τη $C_{no\ state\ info}$ του προηγούμενου ερωτήματος. Υπάρχει περίπτωση να ισχύει $R_{conservative} = C_{no\ state\ info}$;

Απάντηση:

$$R_{conservative} = 1 - H(p_B),$$

με χρήση ομοιόμορφης κατανομής. Για $0 < p_A \le p_B \le \frac{1}{2}$, $p_B \ge (1-\alpha)p_A + \alpha p_B$ για οποιοδήποτε $\alpha > 0$, οπότε και $H(p_B) \ge H((1-\alpha)p_A + \alpha p_B) \Rightarrow 1 - H(p_B) \le 1 - H((1-\alpha)p_A + \alpha p_B)$. Η μόνη περίπτωση όπου ισχύει η ισότητα είναι όταν $p_A = p_B$ ή όταν $\alpha = 1$, οπότε, στην ουσία, το κανάλι δεν αλλάζει και $R_{conservative} = C_{no\ state\ info}$. Για οποιαδήποτε μη τετριμμένη περίπτωση, $R_{conservative} < C_{no\ state\ info}$.

(ε) Αποδείξτε ότι $C_{no\ state\ info} \le C_{perfect}$. Επομένως, γνώση της κατάστασης του καναλιού στον πομπό αυξάνει τη χωρητικότητα. Εάν $\alpha > 0$, για ποιες τιμές των p_A και p_B ισχύει η ισότητα;

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι η εντροπία είναι κυρτή συνάρτηση της κατανομής. Επιπλέον, η εντροπία δυαδικής τ.μ. είναι αυστηρώς κυρτή. Επομένως, για $0 < \lambda < 1$, $\lambda H(p_1) + (1-\lambda)H(p_2) \le H(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2)$. Η ισότητα ισχύει όταν $p_1 = p_2$. Θέτοντας $\alpha = \lambda$, $p_1 = p_A$ και $p_2 = p_B$ προκύπτει το ζητούμενο. Παρατηρήστε ότι δεν είναι απαραίτητο οι p_A και p_B να ισούνται με $\frac{1}{2}$.

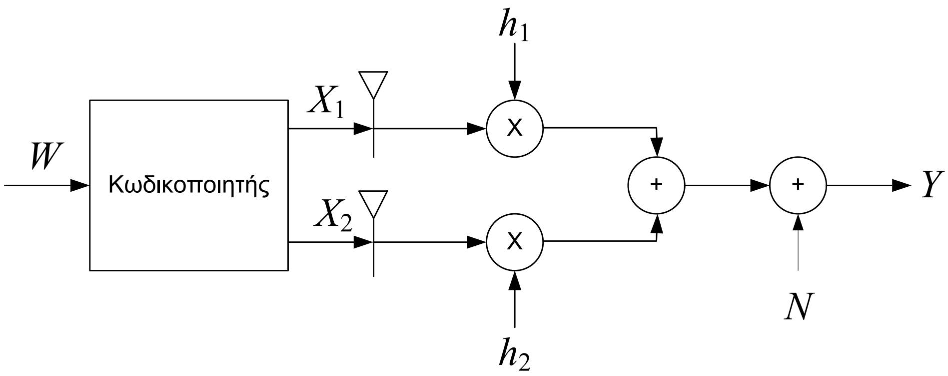
Παρατηρήσεις:

Ένα λάθος που έκαναν κάποιοι ήταν να υποθέσουν ότι, στο Ερώτημα (β), το κανάλι παραμένει σε μία από τις καταστάσεις (p_A ή p_B). Αυτό δεν είναι σωστό. Το κανάλι μεταβαίνει μεταξύ των δύο καταστάσεων με τυχαίο (και i.i.d.) τρόπο. Ένα άλλο λάθος που έκαναν κάποιοι ήταν να γράψουν $C = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, όπου S_n η κατάσταση του καναλιού. Και αυτό δεν είναι σωστό. Επειδή η κατάσταση του καναλιού μας είναι γνωστή, $C(S_n) = 1 - H(p_n)$ όπου p_n είναι η τιμή της πιθανότητας μετάβασης στην κατάσταση S_n και όχι η κατανομή της κατάστασης S_n (η οποία είναι Bernoulli(α)).

41. **Μία ή δύο κεραίες; (Τελική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π. – Ιούνιος 2008)**

Στο σύστημα του Σχήματος 30 ο πομπός χρησιμοποιεί 2 κεραίες προκειμένου να στείλει μηνύματα W στο δέκτη.

Για κάθε χρήση καναλιού, k, το σήμα στο δέκτη ισούται με $Y_k = h_1 X_{1,k} + h_2 X_{2,k} + N_k$, όπου h_1 και h_2 (πραγματικές) σταθερές γνωστές τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη και N i.i.d. γκαουσιανός θόρυβος $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες από το θόρυβο N, αλλά όχι απαραίτητα ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης, υπάρχει περιορισμός



Σχήμα 30: Μετάδοση με χρήση 2 κεραιών και κοινό κωδικοποιητή.

ισχύος στον πομπό: Το άθροισμα των ισχύων των σημάτων που εκπέμπονται από τις δύο κεραίες δεν πρέπει να υπερβαίνει μια τιμή P. Πιο συγκεκριμένα, $\mathbb{E}[X_1^2]+\mathbb{E}[X_2^2] \leq P$. Θέλουμε να βρούμε ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού και πώς πρέπει να σχεδιαστεί ο κωδικοποιητής προκειμένου να επιτύχουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα.

(α) Θεωρήστε το κανάλι με είσοδο (X_1, X_2) και έξοδο Y. Εξηγήστε γιατί το κανάλι δεν έχει μνήμη και δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση μετάβασης $f(y|x_1, x_2)$. Υπενθυμίζεται ότι οι παράμετροι h_1 και h_2 θεωρούνται γνωστές και σταθερές.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Η τιμή της Y_k για δεδομένη είσοδο $(X_{1,k}, X_{2,k})$ εξαρτάται μόνο από την τιμή του θορύβου N_k. Ο θόρυβος είναι λευκός, επομένως οι προηγούμενες τιμές του είναι ασυσχέτιστες με την τρέχουσα τιμή N_k. Συνεπώς, το κανάλι δεν έχει μνήμη. Η συνάρτηση μετάβασης $f(y|x_1, x_2)$ ισούται με

$$f(y|x_1, x_2) = f_N(y - h_1x_1 - h_2x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-h_1x_1-h_2x_2)^2}{2\sigma^2}}.$$

(β) Δώστε μια έκφραση για την αμοιβαία πληροφορία $I(Y; X_1, X_2)$. Ποια πρέπει να είναι η κατανομή της Y ώστε να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$; Αναφέρετε απλώς την κατανομή, δε χρειάζονται περισσότερες λεπτομέρειες (προς το παρόν).

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

$$\begin{aligned} I(Y; X_1, X_2) &= h(Y) - h(Y|X_1, X_2) \\ &= h(Y) - \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι η Y έχει περιορισμό ισχύος (ως άθροισμα $h_1X_1+h_2X_2+N$), η $h(Y)$ και, επομένως η $I(Y; X_1, X_2)$, μεγιστοποιείται όταν η Y ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή.

(γ) Θεωρούμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$. Δείξτε ότι η $\mathbb{E}[Y^2]$ μεγιστοποιείται όταν $X_1 = cX_2$, όπου c σταθερά. Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: $(\mathbb{E}[X_1X_2])^2 \leq \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[X_2^2]$ με $=$ όταν $X_1 = cX_2$ (γενικά $X_1 = cX_2 + d$; Εδώ $d = 0$ λόγω της υπόθεσης $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$).

Απάντηση:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^2] &= \mathbb{E}[(h_1X_1 + h_2X_2 + N)^2] \\ &\overset{(i)}{=} h_1^2\mathbb{E}[X_1^2] + h_2^2\mathbb{E}[X_2^2] + 2h_1h_2\mathbb{E}[X_1X_2] + \mathbb{E}[N^2] \\ &\overset{(ii)}{\leq} h_1^2\mathbb{E}[X_1^2] + h_2^2\mathbb{E}[X_2^2] + 2h_1h_2\sqrt{\mathbb{E}[X_1]}\sqrt{\mathbb{E}[X_2]} + \mathbb{E}[N^2].\end{aligned}$$

(i) $\mathbb{E}[X_1N] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N] = 0$, και $\mathbb{E}[X_2N] = \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[N] = 0$, δεδομένου ότι ο θόρυβος είναι ανεξάρτητος της εισόδου. (ii) Ανισότητα Cauchy-Schwarz.

(δ) Δώστε μια έκφραση για την $\mathbb{E}[Y^2]$ όταν $X_1 = cX_2$ (συναρτήσει των c, P, h_1 και h_2). (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον περιορισμό ισχύος στον πομπό). Τι κατανομή πρέπει να ακολουθούν οι X_1 και X_2 για να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$;

Απάντηση:

Όταν $X_1 = cX_2$, $Y = (ch_1 + h_2)X_2 + N \Rightarrow \mathbb{E}[Y^2] = (ch_1 + h_2)^2\mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[N^2] = (ch_1 + h_2)^2\mathbb{E}[X_2^2] + \sigma^2$.

Από τον περιορισμό ισχύος στον πομπό, $\mathbb{E}[X_1^2] + \mathbb{E}[X_2^2] = P \Rightarrow (c^2 + 1)\mathbb{E}[X_2^2] = P \Rightarrow \mathbb{E}[X_2^2] = P/(c^2 + 1)$.

Αντικαθιστώντας, $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{(ch_1+h_2)^2P}{c^2+1} + \sigma^2$.

Δεδομένου ότι $Y = (ch_1+h_2)X_2+N$ και οι Y και N είναι γκαουσιανές (προκειμένου να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$, και η X_2 (και, επομένως, και η X_1) πρέπει να είναι γκαουσιανές. Παρατηρήστε ότι οι X_1 και X_2 είναι πλήρως συσχετισμένες γκαουσιανές, δεδομένου ότι $X_2 = cX_1$.

Επομένως, προκειμένου να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$ (για δεδομένο c), $X_1 \sim \mathcal{N}(0, c^2P/(c^2 + 1))$, και $X_2 \sim \mathcal{N}(0, P/(c^2 + 1))$ και, επίσης, $X_1 = cX_2$.

(ε) Βρείτε την τιμή της c η οποία μεγιστοποιεί την $\mathbb{E}[Y^2]$. Βεβαιωθείτε ότι λαμβάνετε υπόψη σας τον περιορισμό ισχύος $\mathbb{E}[X_1^2]+\mathbb{E}[X_2^2] \leq P$. Ένας τρόπος είναι να βρείτε το c που μεγιστοποιεί την έκφραση για την $\mathbb{E}[Y^2]$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Εναλλακτικά, μπορείτε να θεωρήσετε ότι $X_1 = \alpha X$ και $X_2 = \beta X$, όπου $\mathbb{E}[X^2] = 1$ και $\alpha^2 + \beta^2 = P$ και να βρείτε τη σχέση μεταξύ α και β.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dc}\mathbb{E}[Y^2] &= P\frac{2h_1(ch_1+h_2)(c^2+1)-2c(ch_1+h_2)^2}{(c^2+1)^2} = 0 \\
&\Rightarrow h_1(c^2+1) = c(ch_1+h_2) \\
&\Rightarrow c = \frac{h_1}{h_2}.
\end{aligned}
$$

Για να αποδείξουμε ότι το $c = \frac{h_1}{h_2}$ είναι βέλτιστο αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbb{E}[Y^2]$ είναι κοίλη ($\cap$) με χρήση π.χ. της 2ης παραγώγου. Αυτό είναι αρκετά χρονοβόρο. Μια άλλη μέθοδος, και δεδομένου ότι η $[Y^2]$ είναι συνεχής και δεν υπάρχει άλλη τιμή του c στην οποία μηδενίζεται η 1η παράγωγος, είναι να δείξουμε ότι για $c = 0$ και $c \to \infty$ η τιμή της $[Y^2]$ είναι μικρότερη. Για $c = 0$, $\mathbb{E}[Y^2] = h_2^2P + \sigma^2$, ενώ για $c \to \infty$, $\mathbb{E}[Y^2] \to h_1^2P + \sigma^2$.

Ένας άλλος, απλούστερος τρόπος απόδειξης, είναι ο εξής: Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα $ch_1+h_2 = [c\ 1][h_1\ h_2]^T$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz (και πάλι!), το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ μεγιστοποιείται όταν $\mathbf{a} = c\mathbf{b}$. Επομένως, $[c\ 1]^T = [bh_1\ bh_2]^T = b[h_1/h_2\ 1]^T \Rightarrow b = 1,\ c = h_1/h_2$.

(στ) Με βάση τα παραπάνω, καθώς και τη βέλτιστη τιμή της c που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού. Συγκρίνετε με την περίπτωση που χρησιμοποιείται μόνο μια κεραία για τη μετάδοση (χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορείτε να θεωρήσετε ότι $h_1 \geq h_2$).

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Από το Ερώτημα (δ), $X_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{Ph_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)$, $X_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{Ph_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)$ και $\frac{X_1}{X_2} = c = \frac{h_1}{h_2}$.

Η Y ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή με $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{(c^*h_1+h_2)^2P}{c^{*2}+1} + \sigma^2 = \frac{(h_1^2+h_2^2)^2P}{h_1^2+h_2^2} + \sigma^2 = (h_1^2+h_2^2)P + \sigma^2$.

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{f(x):(1+h_1^2/h_2^2)E[X^2]\leq P} I(Y;X_1,X_2) \\
&= \frac{1}{2}\log 2\pi e\left((h_1^2+h_2^2)P+\sigma^2\right) - \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2 \\
&= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{(h_1^2+h_2^2)P}{\sigma^2}\right).
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, η χωρητικότητα του καναλιού ισούται με τη χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού με SNR $= \frac{(h_1^2+h_2^2)P}{\sigma^2}$.

Εάν χρησιμοποιήσουμε μόνο 1 κεραία, αυτή που αντιστοιχεί στο καλύτερο κανάλι, $Y = h_1X_1 + N$ με $\mathbb{E}[X^2] = P$. Η $I(Y;X_1)$ μεγιστοποιείται με χρήση γκαουσιανής

X_1 και $\max I(Y;X_1) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h_1^2 P}{\sigma^2}\right) \leq C$, με = όταν $h_2 = 0$. Επομένως αποδείξαμε το όχι και τόσο διαισθητικά προφανές αποτέλεσμα: Όταν έχουμε 2 διαθέσιμες κεραίες για να μεταδώσουμε σε ένα δέκτη, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και τις 2 κεραίες. Κάθε κεραία μεταδίδει το <u>ίδιο</u> σήμα, αλλά με διαφορετική ισχύ. Η κεραία που βλέπει το καλύτερο κανάλι μεταδίδει με μεγαλύτερη ισχύ. Επίσης, η αναλογία ισχύων των μεταδιδόμενων σημάτων ισούται με την αναλογία κερδών (ή αποσβέσεων) των καναλιών.

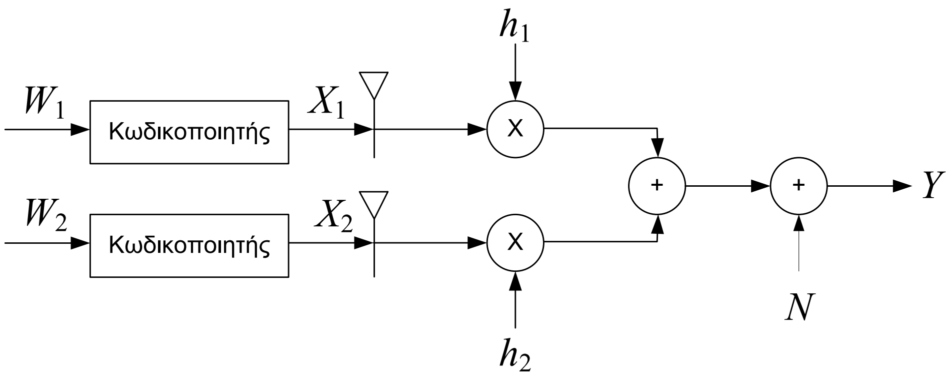
Αποδεικνύεται ότι το δυϊκό πρόβλημα όπου ο πομπός έχει μια κεραία και ο δέκτης δύο κεραίες έχει την ίδια λύση (Maximal Ratio Combining - MRC): Ο βέλτιστος δέκτης πολλαπλασιάζει το σήμα από την κάθε κεραία με συντελεστή h_i όπου $h_i = h_i/\sigma_i$ και προσθέτει τα δύο σήματα. Εμείς αποδείξαμε ότι όταν χρησιμοποιούνται 2 κεραίες στον πομπό και 1 στο δέκτη, ο βέλτιστος πομπός δημιουργεί τα εκπεμπόμενα σήματα με χρήση MRC.

(ζ) Περιγράψτε πολύ συνοπτικά πώς θα κατασκευάζατε το βιβλίο κωδίκων σε αυτό το κανάλι και τι μεταδίδεται από κάθε κεραία εάν ακολουθήσουμε τη μέθοδο (του Shannon) που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του θεωρήματος κωδικοποίησης για το γκαουσιανό κανάλι.

Απάντηση:

Ο πομπός δημιουργεί βιβλίο κωδίκων για μετάδοση σε γκαουσιανό κανάλι με SNR $= \frac{(h_1^2+h_2^2)P}{\sigma^2}$ με περιορισμό ισχύος $\mathbb{E}[X^2] \leq P$. Σε κάθε μετάδοση, με βάση το μήνυμα W_k, επιλέγει κωδική λέξη $X^n(W_k)$. Η κεραία 1 στέλνει σήμα $\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}X^n(W_k)$, η δε κεραία 2 σήμα $\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}X^n(W_k)$. Ο δέκτης αποκωδικοποιεί τη ληφθείσα ακολουθία Y_k^n σε ένα από τα πιθανά μηνύματα W_k με χρήση από κοινού τυπικότητας.

(η) Υποθέστε, τώρα, ότι η κάθε κεραία ανήκει σε διαφορετικό πομπό (χρήστη) και ότι οι δύο πομποί δεν επικοινωνούν μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 31. Ωστόσο, και οι δύο πομποί γνωρίζουν τα h_1 και h_2. Υποθέστε, επίσης, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $h_1 \geq h_2$. Οι πομποί πρέπει να μοιραστούν μεταξύ τους συνολική ισχύ P. Δηλαδή, παρόλο που, σε αντίθεση με πριν, οι κεραίες συνδέονται σε διαφορετικούς πομπούς, πρέπει $\mathbb{E}[X_1^2]+\mathbb{E}[X_2^2] \leq P$. Τέλος, θεωρούμε ότι, με χρήση καναλιού ελέγχου, υποδεικνύεται σε κάθε πομπό με πόση ισχύ πρέπει να εκπέμψει. Εάν R_1 και R_2 είναι οι ρυθμοί μετάδοσης από την κεραία 1 και 2, αντίστοιχα, πώς πρέπει να μοιραστεί η ισχύς P μεταξύ των 2 πομπών και ποιο είναι το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης $R_1 + R_2$ που μπορούμε να επιτύχουμε; Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα του Ερωτήματος (στ) και σχολιάστε.



Σχήμα 31: Μετάδοση με χρήση 2 κεραιών και ανεξάρτητο κωδικοποιητή σε κάθε κεραία.

Απάντηση:

Το κανάλι του σχήματος είναι ένα γκαουσιανό MAC για το οποίο γνωρίζουμε ότι

$$R_1 < \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h_1^2 P_1}{\sigma^2}\right),$$
$$R_2 < \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h_2^2 P_2}{\sigma^2}\right),$$
$$R_1 + R_2 < \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h_1^2 P_1 + h_2^2 P_2}{\sigma^2}\right).$$

Προσέξτε την προσθήκη των κερδών καναλιού h_1 και h_2 στις εκφράσεις.
Δεδομένου ότι $P_1 + P_2 = P$, μπορούμε να γράψουμε $P_1 = \alpha P$ και $P_2 = (1-\alpha)P$, $0 \le \alpha \le 1$.
Μπορουμε να δούμε εύκολα ότι

$$R_{1,\max} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h_1^2 P}{\sigma^2}\right) \text{ και}$$
$$R_{2,\max} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h_2^2 P}{\sigma^2}\right).$$

Δεδομένου ότι $h_1 \ge h_2$, $R_{1,\max} \ge R_{2,\max}$. Απομένει να συγκρίνουμε το $R_{1,\max}$ με το $\max(R_1+R_2) = \max_\alpha \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h_1^2\alpha P + h_2^2(1-\alpha)P}{\sigma^2}\right)$. Η $\log(1+x)$ είναι γνησίως αύξουσα, επομένως αρκεί να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα $h_1^2\alpha P + h_2^2(1-\alpha)P = h_2^2 P + \alpha P(h_1^2 - h_2^2)$, $0 \le \alpha \le 1$. Πρόκειται για μια γραμμική συνάρτηση του α, και, δεδομένου ότι $h_1 \ge h_2$, μεγιστοποιείται θέτοντας $\alpha = 1$. Συνεπώς, το άθροισμα των ρυθμών μετάδοσης μεγιστοποιείται μεταδίδοντας μόνο από την κεραία που ‘‘βλέπει’’ το καλύτερο κανάλι!
Στην περίπτωση που οι δύο κεραίες ελέγχονται από τον ίδιο πομπό ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης ισούται με $C_{\text{MISO}} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{(h_1^2+h_2^2)P}{\sigma^2}\right)$ και επιτυγχάνεται με

χρήση και των δύο κεραιών σε συνδυασμό με MRC. Αντίθετα, όταν η μετάδοση από κάθε κεραία γίνεται ανεξάρτητα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μόνο το καλύτερο κανάλι και ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης ισούται με $\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h_1^2 P}{\sigma^2}\right) \leq C_{\text{MISO}}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $h_2 = 0$.

Γιατί αυτή η διαφορά; Η απάντηση βρίσκεται στο ότι, στην πρώτη περίπτωση, η μετάδοση είναι <u>σύμφωνη</u> (coherent): Οι δύο κεραίες ελέγχονται από τον ίδιο πομπό, με αποτέλεσμα να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η βέλτιστη από κοινού κατανομή των X_1 και X_2. Όπως είδαμε, πρέπει τα X_1 και X_2 να διαφέρουν μόνο κατά μια πολλαπλασιαστική σταθερά. Αντίθετα, στην περίπτωση όπου οι κεραίες ελέγχονται από ανεξάρτητους πομπούς, η μετάδοση είναι, αναγκαστικά, <u>ασύμφωνη</u> (non-coherent). $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$, κατανομή που ενδέχεται να οδηγεί σε μικρότερη $I(Y; X_1, X_2)$ από τη βέλτιστη $f^*(x_1, x_2)$. Ακριβώς αυτό συμβαίνει στο συγκεκριμένο κανάλι που χρησιμοποιήθηκε στην άσκηση.

42. **Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο (Επαναληπτική εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

Στο κανάλι του Σχήματος 32, δύο χρήστες (1 και 2) επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα δέκτη. Ο δέκτης λαμβάνει το άθροισμα των σημάτων X_1 και X_2 του χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα. Ωστόσο, όταν η *απόλυτη* τιμή του αθροίσματος είναι μεγαλύτερη από 1, ο δέκτης ψαλιδίζει το σήμα. Δηλαδή, $Y = \max\{-1, \min\{1, X_1 + X_2\}\}$. Και οι δύο χρήστες χρησιμοποιούν το ίδιο αλφάβητο $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \{-1, 0, 1\}$. Οι χρήστες δε συνεννοούνται μεταξύ τους πριν μεταδώσουν. Ωστόσο, θεωρούμε ότι γνωρίζουν την κατανομή $p_{X_i}(x_i)$ με την οποία πρέπει να μεταδώσουν (για παράδειγμα, μπορεί να τους την έχει γνωστοποιήσει ο δέκτης πριν αρχίσει η μετάδοση).

Δίνεται, επίσης, ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και $\log_2 5 \approx 2.3219$.

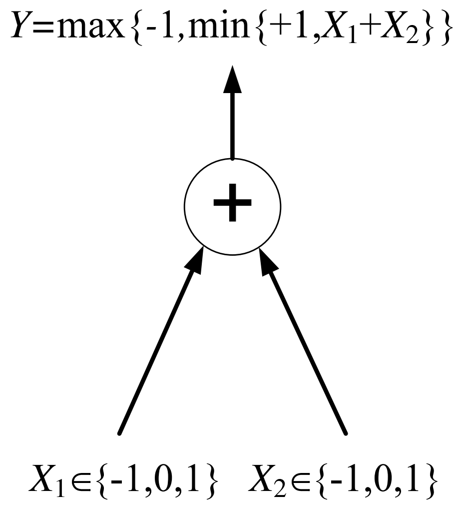
(α) Βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ρυθμός μετάδοσης R_1 του χρήστη 1. Επαναλάβετε για το ρυθμό μετάδοσης R_2 του χρήστη 2. Βρείτε, επίσης, την κατανομή $p_{X_i}(x_i)$ που επιτυγχάνει το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, R_i, σε κάθε περίπτωση.

Απάντηση:

Από το θεώρημα κωδικοποίησης καναλιού για το MAC,

$$\begin{aligned}
\max_{p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)} R_1 &= \max_{p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)} I(X_1; Y|X_2) \\
&= \max_{p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)} \{H(Y|X_2) - H(Y|X_1, X_2)\} \\
&\overset{(i)}{=} \max_{p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)} H(Y|X_2)
\end{aligned}$$

(i) Αν γνωρίζουμε τα X_1 και X_2 μπορούμε να υπολογίσουμε το Y.



Σχήμα 32: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο και δίπλευρο ψαλιδισμό.

Εύκολα βλέπουμε ότι $H(Y|X_2 = 0) = \log_2 3$, τιμή η οποία επιτυγχάνεται για ομοιόμορφα κατανεμημένη X_1. Όταν $X_2 = -1$ η Y παίρνει μόνο δύο τιμές, -1 ή 0. Η μέγιστη εντροπία επιτυγχάνεται όταν η είσοδος $X_1 = -1$ χρησιμοποιείται με διπλάσια συχνότητα από τις εισόδους $X_1 = +1$ και $X_1 = 0$. Ωστόσο, ακόμα και σε αυτήν την περίπτωση, $H(Y|X_2 = -1) = 1$ bit. Ομοίως, $\max H(Y|X_2 = +1) = 1$.

Επομένως, η $H(Y|X_2)$ μεγιστοποιείται όταν η X_2 τίθεται μόνιμα στην τιμή 0, οπότε $R_1 = \log_2 3$ bits και $R_2 = 0$.

Ο μέγιστος ρυθμός επιτυγχάνεται με ομοιόμορφα κατανεμημένη X_1. Επομένως, $p^*_{X_1} = \{1/3, 1/3, 1/3\}$.

Ομοίως (ή από τη συμμετρία του προβλήματος), $R_2 \leq \log 3$ bits και
$p^*_{X_2} = \{1/3, 1/3, 1/3\}$ με τη X_1 στην τιμή 0.

(β) Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή του *αθροίσματος* $R_1 + R_2$ των ρυθμών με τους οποίους μπορούν να μεταδώσουν *ταυτόχρονα* οι δύο χρήστες (sum capacity του καναλιού). Για ποια κατανομή $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ μεγιστοποιείται το άθροισμα; Σχεδιάστε την περιοχή χωρητικότητας (capacity region), $\mathcal{C}$, του καναλιού.

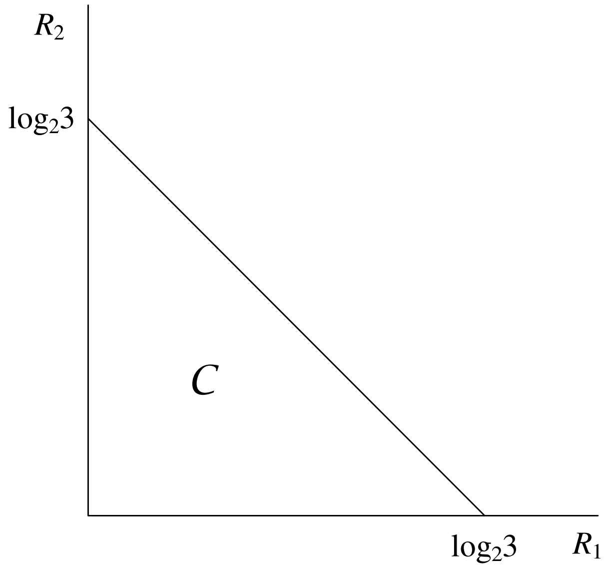
Απάντηση:

Από το θεώρημα κωδικοποίησης καναλιού για το MAC, $R_1 + R_2 < I(X_1, X_2; Y)$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} C_{\text{sum}} \triangleq \max\{R_1 + R_2\} &= \max_{p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)} I(X_1, X_2; Y) \\ &= \max_{p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)} \{H(Y) - H(Y|X_1, X_2)\} \\ &\overset{(i)}{=} \max_{p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)} H(Y) \overset{(ii)}{\leq} \log 3. \end{aligned}$$

(i) Δεδομένου ότι το κανάλι δεν έχει θόρυβο, αν γνωρίζουμε τη X_1 και τη X_2 μπορούμε να βρούμε την τιμή της Y.
(ii) Η Y μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές -1, 0 ή 1.
Απομένει να δούμε εάν υπάρχει κατανομή $p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ για την οποία $H(Y) = \log 3$.
Θέτοντας $p_{X_1} = \{1/3, 1/3, 1/3\}$ και $p_{X_2} = \{1/3, 1/3, 1/3\}$ παρατηρούμε ότι η $p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ είναι ομοιόμορφη στις τιμές $\{-1, 0, 1\}$ και, επομένως, $H(Y) = \log_2 3$ bits.
Με βάση τα παραπάνω σχεδιάζουμε την περιοχή χωρητικότητας στο Σχήμα 33.



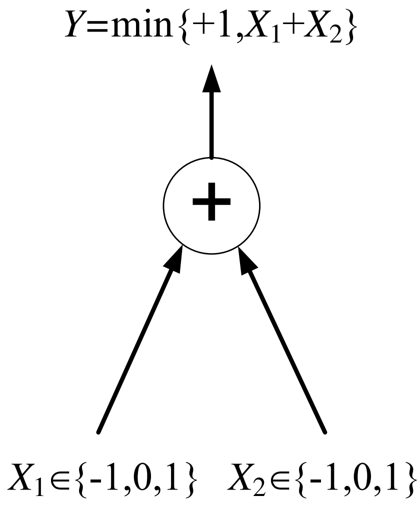
Σχήμα 33: Περιοχή χωρητικότητας του διακριτού MAC χωρίς θόρυβο και δίπλευρο ψαλιδισμό.

(γ) Περιγράψτε έναν τρόπο με τον οποίο μπορείτε να επιτύχετε μετάδοση με *οποιοδήποτε* ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) που ανήκει στην περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}$.

Απάντηση:

Ο πιο εύκολος τρόπος είναι με timesharing. Έστω ότι $R_1 = \alpha \log_2 3$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Τότε, $R_2 = \beta \log_2 3 \leq (1 - \alpha) \log_2 3$ ($\beta \leq 1 - \alpha$ γιατί ενδέχεται να μη βρισκόμαστε επάνω στο όριο της περιοχής χωρητικότητας). Για $100\alpha\%$ του χρόνου μεταδίδει μόνο ο χρήστης 1, για $100\beta\%$ του χρόνου μόνο ο χρήστης 2 και για $100(1-\alpha-\beta)\%$ του χρόνου κανείς.

(δ) Έστω, τώρα, ότι ο δέκτης ψαλιδίζει το άθροισμα μόνο στο $+1$, δηλαδή $Y = \min\{1, X_1 + X_2\}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 34.



Σχήμα 34: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο και μονόπλευρο ψαλιδισμό.

Τι περιμένετε για τη νέα περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}'$, σε σχέση με την προηγούμενη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Περιμένουμε ότι $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$. Αν θέσουμε $Y_2 = \max\{-1, \min\{1, X_1 + X_2\}\}$ και $Y_1 = \min\{1, X_1 + X_2\}$, $Y_2 = \max\{-1, Y_1\}$. Επομένως, $(X_1, X_2) \to Y_1 \to Y_2$ και, από την ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων, $I(X_1, X_2; Y_2) \leq I(X_1, X_2; Y_1)$. Επίσης, $I(X_1; Y_2|X_2) = H(X_1) = I(X_1; Y_1|X_2)$ και $I(X_2; Y_2|X_1) = H(X_2) = I(X_2; Y_1|X_1)$. Επομένως, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$.

(ε) Ποιό είναι το άνω φράγμα για το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης (sum capacity) $C_{\text{sum}} = R_1 + R_2$;

Απάντηση:

$$I(X_1, X_2; Y) = H(Y) - H(Y|X_1, X_2) \Rightarrow C_{\text{sum}} \leq 2,$$

δεδομένου ότι, τώρα, η Y μπορεί να πάρει 4 τιμές.

(στ) Σχεδιάστε την περιοχή ρυθμών μετάδοσης, $\mathcal{R}$, που επιτυγχάνεται με χρήση των κατανομών που βρήκατε στα ερωτήματα (α) και (β). Συγκρίνετε με την περιοχή χωρητικότητας του Ερωτήματος (β). Μπορείτε να πείτε κάτι περισσότερο σε σχέση με αυτά που συμπεράνατε στο Ερώτημα (δ);

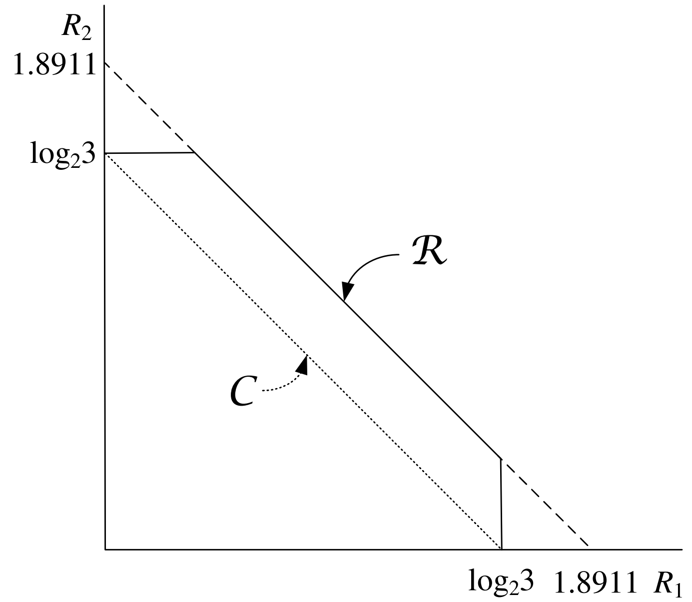
$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Θέτοντας $p_{X_1} = \{1/3, 1/3, 1/3\}$, $R_1 \leq I(X_1; Y|X_2) = H(X_1) = \log_2 3$ bits. Ομοίως, $R_2 = \log_2 3$ bits. Τέλος, παρατηρούμε ότι, για X_1 και X_2 ομοιόμορφες, $p_Y(y) = \{1/9, 2/9, 1/3, 1/3\}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 = I(X_1, X_2; Y) &= H(Y) \\ &= \frac{1}{9}\log 9 + \frac{2}{9}\log\frac{9}{2} + 2 \times \frac{1}{3}\log 3 \\ &= \frac{2}{9}\log 3 + \frac{4}{9}\log 3 - \frac{2}{9} + \frac{2}{3}\log 3 \\ &= \frac{4}{3}\log 3 - \frac{2}{9} \approx 1.8911 \text{ bits.} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{4}{3}\log 3 - \frac{2}{9} > \frac{4}{3}\log 3 - \frac{2}{9}\log 3 > \frac{4}{3}\log 3 - \frac{1}{3}\log 3 = \log 3$ και, επομένως, δεδομένου ότι η περιοχή ρυθμών μετάδοσης που βρήκαμε είναι υποσύνολο της $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}'$.

Η περιοχή ρυθμών μετάδοσης $\mathcal{R}$ σχεδιάζεται στο Σχήμα 35 όπου και συγκρίνεται με την περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}$.



Σχήμα 35: Σύγκριση περιοχής επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης $\mathcal{R}$ με τη $\mathcal{C}$.

(*ζ) Δείξτε ότι ένα *κάτω* φράγμα για τη sum capacity είναι το 1.9772. Με βάση αυτό το φράγμα και την περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης του Ερωτήματος (στ) σχεδιάστε μια περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης που είναι πιο κοντά στην περιοχή χωρητικότητας $\mathcal{C}'$ από αυτήν του Ερωτήματος (στ).

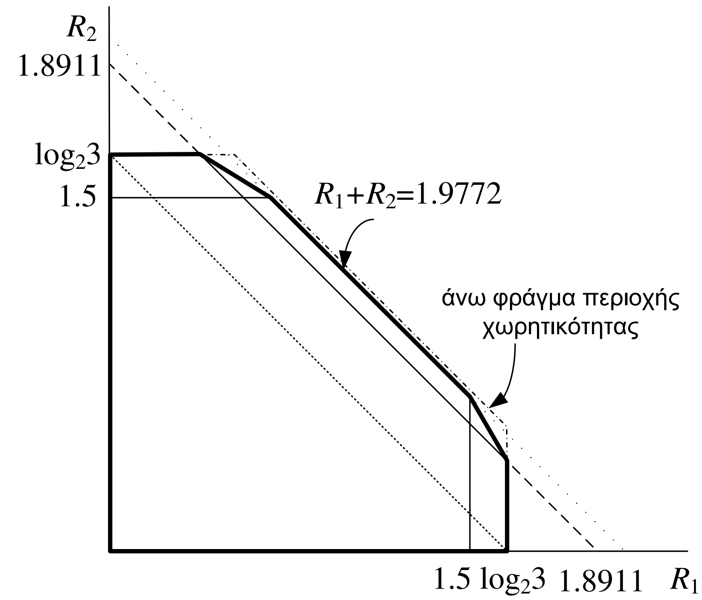
Υπόδειξη: Βρείτε μια κατανομή $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ για την οποία $R_1 + R_2 = 1.9772$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Δεδομένου ότι $H(Y) = 2$ bits όταν $p_Y(y) = \{1/4, 1/4, 1/4, 1/4\}$ προσπαθούμε να "ισορροπήσουμε" τις πιθανότητες των 4 ενδεχομένων. Επιλέγοντας $p_{X_1} = p_{X_2} = \{1/2, 1/4, 1/4\}$, $p_Y(y) = \{1/4, 1/4, 5/16, 3/16\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= I(X_1, X_2; Y) = H(Y) \\ &= 2 \times \frac{1}{4} \log 4 + \frac{5}{16} \log \frac{16}{5} + \frac{3}{16} \log \frac{16}{3} \\ &= 1 + \frac{20}{16} - \frac{5}{16} \log 5 + \frac{12}{16} - \frac{3}{16} \log 3 \\ &= 3 - \frac{5}{16} \log 5 - \frac{3}{16} \log 3 \approx 1.9772 \text{ bits.} \end{aligned}$$

Με χρήση time sharing, μπορούμε να επιτύχουμε οποιοδήποτε σημείο μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των περιοχών του Ερωτήματος (στ) και του Ερωτήματος (ζ). Η νέα περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης φαίνεται στο Σχήμα 36.



Σχήμα 36: Βελτιωμένη περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης και σύγκριση με άνω φράγμα.

43. **Κανάλι πολλαπλής πρόσβασης (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2010)**

Θεωρούμε το κανάλι πολλαπλής πρόσβασης 2 χρηστών, η έξοδος του οποίου δίνεται από τη σχέση

$$Y = |X_1| \cdot X_2,$$

όπου X_i είναι τα σύμβολα του χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα. $|X|$ είναι η απόλυτη τιμή της X.

Θεωρούμε, επίσης, ότι $X_1 \in \{-1, 0, 1\}$ και $X_2 \in \{-1, 0, 1\}$.

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.

(α) Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης, $R_{1,\max}$, που μπορεί να επιτύχει ο χρήστης 1 αν δε μας ενδιαφέρει ο ρυθμός μετάδοσης του χρήστη 2;

Βρείτε μια από κοινού κατανομή $p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ με την οποία επιτυγχάνεται μετάδοση του χρήστη 1 με το μέγιστο ρυθμό.

Απάντηση:

Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτύχει ο χρήστης είναι 1 bit δεδομένου ότι, για σταθερή X_2 η Y μπορεί να πάρει το πολύ δύο τιμές (0 και 1). Αν ο χρήστης 2 μεταδίδει πάντοτε την τιμή 1 (η -1),

$$\begin{aligned} R_1 &\leq I(X_1;Y|X_2) \leq I(X_1;Y|X_2=1) \\ &= H(Y|X_2=1) - H(Y|X_1, X_2=1) = H(|X_1|). \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι η $|X_2|$ ισούται με 0 ή 1, $R_{1,\max} = 1$ bit.

Για να μεγιστοποιήσουμε το ρυθμό μετάδοσης του χρήστη 1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε $p_{X_1} = \{\alpha, 1/2, 1/2-\alpha\}$, $0 \leq \alpha \leq 1/2$ και $p_{X_2} = \{1,0,0\}$ ή $\{0,0,1\}$.

(β) Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης, $R_{2,\max}$, που μπορεί να επιτύχει ο χρήστης 2 αν δε μας ενδιαφέρει ο ρυθμός μετάδοσης του χρήστη 1;

Βρείτε μια από κοινού κατανομή $p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ με την οποία επιτυγχάνεται μετάδοση του χρήστη 2 με το μέγιστο ρυθμό.

Απάντηση:

Παρόμοια με το προηγούμενο ερώτημα, $R_{2,\max} = \log_2 3$ bits. $p_{X_1} = \{\beta, 0, 1-\beta\}$, $0 \leq \beta \leq 1$ και $p_{X_2} = \{1/3, 1/3, 1/3\}$.

(γ) Βρείτε το μέγιστο ρυθμό με τον οποίο μπορεί να μεταδώσει ο χρήστης 2 όταν ο χρήστης 1 μεταδίδει με το μέγιστο ρυθμό, $R_{1,\max}$, του Ερωτήματος (α). Ποια είναι η από κοινού κατανομή, $p_{X_1}p_{X_2}$ που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

Υπόδειξη: Βρείτε τη μορφή που πρέπει να έχει η p_{X_2} ώστε ο χρήστης 1 να μεταδίδει με $R_{1,\max}$ και προσπαθήστε να μεγιστοποιήσετε τον R_2.

Απάντηση:

Έστω $p_{X_1} = \{\gamma, \delta, 1-\gamma-\delta\}$ και $p_{X_2} = \{\epsilon, \zeta, 1-\epsilon-\zeta\}$.

$$\begin{aligned} R_1 &\leq I(X_1;Y|X_2) = \zeta I(X_1;Y|X_2=0) + (1-\zeta) I(X_1;Y|X_2\neq 0) \\ &= \zeta \left[H(Y|X_2=0) - H(Y|X_1, X_2=0)\right] \\ &+ (1-\zeta)\left[H(Y|X_2\neq 0) - H(Y|X_1, X_2\neq 0)\right] \\ &= (1-\zeta) H(|X_1|). \end{aligned}$$

Ο R_1 μεγιστοποιείται (στην τιμή 1) όταν $1-\zeta = 1$ και $X_1 \sim \{\gamma, 1/2, 1/2-\gamma\}$, δηλαδή $\delta = 1/2$ και $\zeta = 0$. Επομένως, ο χρήστης 2 δε χρησιμοποιεί ποτέ την είσοδο 0.

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι, για δεδομένη από κοινού κατανομή $p_{X_1}p_{X_2}$,
$R_2 \leq I(X_2; Y|X_1)$. Για τις κατανομές $p_{X_1} = \{\gamma, 1/2, 1/2-\gamma\}$ και $p_{X_2} = \{\epsilon, 0, 1-\epsilon\}$

$$
\begin{aligned}
R_2 \leq I(X_2; Y|X_1) &= H(Y|X_1) - H(Y|X_1, X_2) = H(Y|X_1) \\
&= \frac{1}{2}H(Y|X_1 = 0) + \frac{1}{2}H(Y|X_1 \neq 0) = \frac{1}{2}H(Y|X_1 \neq 0) \\
&= \frac{1}{2}H(X_2) = \frac{1}{2}H(\epsilon) \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Επίσης,

$$
\begin{aligned}
R_1 + R_2 \leq I(X_1, X_2; Y) &= I(X_2; Y) + I(X_1; Y|X_2) = I(X_2; Y) + 1 \Rightarrow \\
R_2 \leq I(X_2; Y) &= H(Y) - H(Y|X_2) = H(Y) - H(|X_1|) = H(Y) - 1.
\end{aligned}
$$

Όπως προκύπτει εύκολα, $Y \sim \{\epsilon/2, 1/2, 1/2-\epsilon/2\}$. Συνεπώς, από την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας, $H(Y) = 1 + \frac{1}{2}H(\epsilon) \leq \frac{3}{2}$.
Επομένως, $R_2 \leq \frac{1}{2}$ bits, τα οποία επιτυγχάνονται με $X_2 \sim \{1/2, 0, 1/2\}$.

(δ) Βρείτε το μέγιστο ρυθμό με τον οποίο μπορεί να μεταδώσει ο χρήστης 1 όταν ο χρήστης 2 μεταδίδει με το μέγιστο ρυθμό, $R_{2,\max}$, του Ερωτήματος (β). Ποια είναι η από κοινού κατανομή, $p_{X_1}p_{X_2}$ που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

Απάντηση:

Παρόμοια με το προηγούμενο ερώτημα,

$$
\begin{aligned}
R_2 \leq I(X_2; Y|X_1) &= \delta I(X_2; Y|X_1 = 0) + (1-\delta)I(X_2; Y|X_1 \neq 0) \\
&= (1-\delta)\left[H(Y|X_1 \neq 0) - H(Y|X_2, X_1 \neq 0)\right] \\
&= (1-\delta)H(X_2).
\end{aligned}
$$

Ο R_2 μεγιστοποιείται όταν $\delta = 0$ και $X_2 \sim \{1/3, 1/3, 1/3\}$. Αυτό συνεπάγεται ότι η X_1 δεν μπορεί να παίρνει την τιμή 0. Επομένως $|X_1| = 1$ πάντοτε και $R_1 = 0$.

Ένας άλλος τρόπος (που χρησιμοποίησε μία συνάδελφός σας) είναι να παρατηρήσετε ότι, δεδομένου ότι η Y μπορεί να πάρει μόνο 3 τιμές, $R_1 + R_2 \leq \log_2 3$. Όταν $R_2 = \log_2 3$, αναγκαστικά $R_1 = 0$.

(ε) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του αθροίσματος $R_1 + R_2$ των ρυθμών μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε; Βρείτε *όλες* τις κατανομές $p_{X_1}p_{X_2}$ που μεγιστοποιούν το άθροισμα $R_1 + R_2$ (το οποίο ονομάζεται αθροιστική χωρητικότητα – sum capacity).

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι

$$
R_1 + R_2 \leq I(X_1, X_2; Y) = H(Y) - H(Y|X_1, X_2) = H(Y),
$$

δεδομένου ότι το κανάλι δεν έχει θόρυβο (είναι νομοτελειακό). Επομένως, αρκεί να βρούμε τις κατανομές $p_{X_1}p_{X_2}$ (αν υπάρχουν) για τις οποίες $Y \sim \{1/3, 1/3, 1/3\}$. Θέτοντας $p_{X_1} = \{\gamma, \delta, 1-\gamma-\delta\}$ και $p_{X_2} = \{\epsilon, \zeta, 1-\epsilon-\zeta\}$ όπως στο Ερώτημα (γ), $Y \sim \{\delta + (1-\delta)\zeta, (1-\delta)(1-\epsilon-\zeta), (1-\delta)\epsilon\}$.

Επομένως, οι παράμετροι που μεγιστοποιούν την $H(Y)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
&\delta + (1-\delta)\zeta = \frac{1}{3} \\
&(1-\delta)(1-\epsilon-\zeta) = \frac{1}{3} \text{ και} \\
&(1-\delta)\epsilon = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Μια από τις 3 εξισώσεις είναι πλεονάζουσα, δεδομένου ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων πρέπει να είναι πάντοτε 1.

Επιπλέον, οι παράμετροι πρέπει να ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$. Από την τρίτη εξίσωση, $\epsilon = \frac{1}{3(1-\delta)} \leq 1$. Επομένως, $\delta \leq \frac{2}{3}$. Από την πρώτη εξίσωση, $\zeta = \frac{1-3\delta}{3(1-\delta)} \geq 0$. Συνεπώς, $\delta \leq \frac{1}{3}$.

Από την πρώτη εξίσωση, $\delta = 1 - \frac{1}{3\epsilon} \geq 0$. Επομένως, $\epsilon \geq \frac{1}{3}$. Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση, $1 - \epsilon - \zeta = \epsilon \Rightarrow \zeta = 1 - 2\epsilon \leq 1$. Συνεπώς, $\epsilon \leq \frac{1}{2}$.

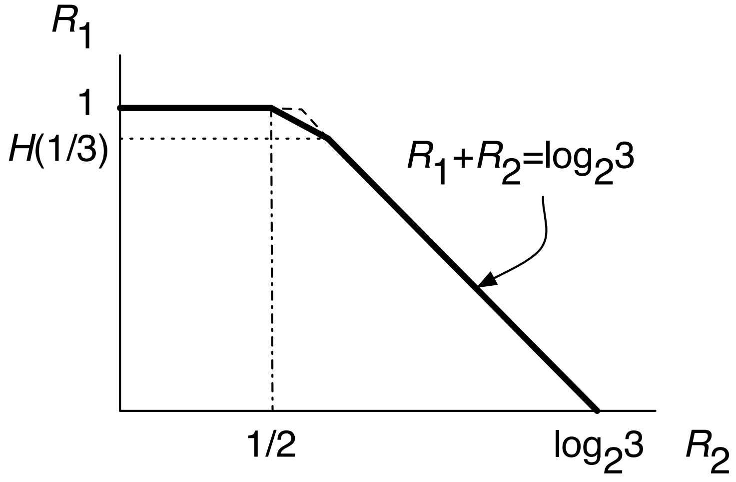
Άρα, για να επιτύχουμε ομοιόμορφη κατανομή για την Y αρκεί να θέσουμε $\delta \in [0, 1/3]$, $\epsilon = \frac{1}{3(1-\delta)}$ και $\zeta = 1-2\epsilon$. Οι δύο ακραίες τιμές είναι $(\delta, \epsilon, \zeta) = (0, 1/3, 1/3)$ και $(1/3, 1/2, 0)$. Στην πρώτη περίπτωση, όπως είδαμε στο Ερώτημα (δ), $R_1 = 0$ και $R_2 = \log_2 3$ bits. Στη δεύτερη περίπτωση, με πράξεις, $R_1 = H(1/3) \approx 0.9183$ bits και $R_2 = 2/3$ bits. Επαληθεύστε ότι $R_1 + R_2 = \log_2 3$ bits.

(στ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα Ερωτήματα (γ)–(ε) σχεδιάστε μια περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης για το κανάλι πολλαπλής πρόσβασης του προβλήματος. Διευκρινίστε, επίσης, σε ποια σημεία το όριο της περιοχής συμπίπτει με το όριο της περιοχής χωρητικότητας του καναλιού.

Απάντηση:

Η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 37. Στο σχήμα φαίνονται οι δύο επιτεύξιμες περιοχές των Ερωτημάτων (γ) και (ε). Με χρήση time-sharing μπορούμε να επιτύχουμε, επίσης, όλα τα ζεύγη ρυθμών στο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ $(1, 1/2)$ και $(H(1/3), 2/3)$. Τέλος, με διακεκομμένη γραμμή έχει σχεδιαστεί το άνω φράγμα της περιοχης χωρητικότητας που δίνεται από τις ανισότητες $R_1 \leq 1$ και $R_1 + R_2 \leq \log_2 3$.

Το όριο της περιοχής επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης συμπίπτει με το όριο της περιοχής χωρητικότητας σε όλα τα σημεία εκτός, πιθανώς, από το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ $(1, 1/2)$ και $(H(1/3), 2/3)$.



Σχήμα 37: Περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης για το κανάλι πολλαπλής πρόσβασης της Άσκησης.