ΕΕ728 (22Α004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
Λυμένες ασκήσεις (Μόνο Εκφωνήσεις)

1. ► **Συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών – Cover & Thomas 2.2 (παραλλαγή)**

   (α) Έστω $y = g(x)$, $g(\cdot)$ αιτιοκρατική (deterministic) συνάρτηση και X μια (διακριτή) τυχαία μεταβλητή. Μπορεί να ειπωθεί κάτι για τη σχέση μεταξύ της εντροπίας της $Y = g(X)$ και της εντροπίας της X; Εαν ναι, τι;

   (β) Βρείτε τη σχέση μεταξύ $H(X)$ και $H(Y)$ για τις συναρτήσεις $y = x^3$ και $y = \lfloor x/2 \rfloor$, x ακέραιος.

2. ► **Εντροπία αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών – Cover & Thomas 2.14**

   (α) Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές και $Z = X + Y$. Να αποδειχτεί ότι $H(Z|X) = H(Y|X)$.

   (β*) Εάν οι X και Y είναι *ανεξάρτητες*, να αποδειχτεί ότι $H(Y) \leq H(Z)$ και $H(X) \leq H(Z)$. Επομένως, όταν σε μια τ.μ. προστίθεται μια ανεξάρτητή της τ.μ., η αβεβαιότητα αυξάνεται.

   (γ*) Δώστε ένα παράδειγμα (μη ανεξάρτητων) τ.μ. X και Y για τις οποίες $H(Y) \geq H(Z)$ και $H(X) \geq H(Z)$.

3. **Σχετική Εντροπία – Cover & Thomas 2.37**

   Έστω 3 τ.μ. X, Y, Z με από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(x, y, z)$. Η σχετική εντροπία μεταξύ της από κοινού κατανομής και του γινομένου των περιθώριων κατανομών ορίζεται ως

$$D(p(x,y,z)||p(x)p(y)p(z)) = \mathbb{E}\left[\log \frac{p(x,y,z)}{p(x)p(y)p(z)}\right].$$

   (α) Εκφράστε την $D(p(x,y,z)||p(x)p(y)p(z))$ συναρτήσει εντροπιών.

   (β) Πότε η $D(p(x,y,z)||p(x)p(y)p(z))$ ισούται με 0;

4. **Κέρμα και ζάρι – Cover & Thomas 2.43**

   (α) Θεωρήστε το αποτέλεσμα της ρίψης *αμερόληπτου* κέρματος. Με τι ισούται η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της επάνω και κάτω πλευράς του κέρματος; Συμφωνεί το αποτέλεσμα με αυτό που περιμένατε διαισθητικά;

(β) Αλλάζει η απάντησή σας εάν το κέρμα είναι μεροληπτικό;

(γ) Θεωρήστε τη ρίψη αμερόληπτου ζαριού με 6 πλευρές. Ποια είναι η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της επάνω και της μπροστινής πλευράς; Υπενθυμίζεται ότι σε ένα ζάρι το άθροισμα των αντίθετων πλευρών ισούται με 7.

5. **Μήκος Ακολουθίας – Cover & Thomas 2.48**

Θεωρούμε τυχαία διαδικασία Bernoulli$\left(\frac{1}{2}\right)$ $\{X_i\}$. Σταματάμε τη διαδικασία όταν εμφανίζεται το πρώτο “1”. Έστω N το μήκος της ακολουθίας όταν σταματάμε. Επομένως, η ακολουθία X^N είναι ένα στοιχείο του συνόλου όλων των δυαδικών ακολουθιών πεπερασμένου μήκους: $\{0,1\}^* = \{0,1,00,01,10,11,000,\ldots\}$.

(α) Βρείτε την $I(N;X^N)$.

(β) Βρείτε την $H(X^N|N)$.

(γ) Βρείτε την $H(X^N)$.

(δ) Βρείτε την $H(N|X^N)$.

(ε) Βρείτε την $H(N)$.

Υπόδειξη: Ενδέχεται να σας φανεί χρήσιμη η Άσκηση 2.1 του Cover.

(στ) Βρείτε την $I(N;X^N)$.

(ζ) Βρείτε την $H(X^N|N)$.

(η) Βρείτε την $H(X^N)$.

(θ) Βρείτε την $H(N|X^N)$.

(ι) Βρείτε την $H(N)$.

6. **Οι αναδιατάξεις αυξάνουν την εντροπία – Cover & Thomas 4.3**

Υποθέστε ότι το τυχαίο διάνυσμα X δηλώνει τη θέση στην οποία βρίσκονται κάποια αντικείμενα πάνω σε μια ευθεία γραμμή. Έστω ο πίνακας T ο οποίος αναδιατάσσει τα αντικείμενα. Για παράδειγμα, εάν τα αντικείμενα είναι 3, το αντικείμενο 1 βρίσκεται στη θέση 2, το αντικείμενο 2 στη θέση 3 και το αντικείμενο 3 στη θέση 1, $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Πολλαπλασιασμός (από αριστερά) του X με τον πίνακα $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ αναδιατάσσει τα αντικείμενα στις θέσεις 3, 2 και 1, αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι ο πίνακας αναδιάταξης δεν εξαρτάται από το διάνυσμα X. Δικαιολογήστε τα βήματα της παρακάτω απόδειξης

$$H(TX) \overset{(a)}{\geq} H(TX|T) \overset{(b)}{=} H(T^{-1}TX|T) = H(X|T) \overset{(c)}{=} H(X).$$

Υπόδειξη: Το βήμα (b) σχετίζεται με την Άσκηση 2.2 των Cover & Thomas.

7. **Εντροπία και Αμοιβαία Πληροφορία (Πρόοδος Θ. Π., Νοέμβριος 2007)**

   Έστω οι *ανεξάρτητες* τ.μ. X και Y. Η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με τιμές $\{-1,1\}$ (δηλαδή $X=1$ ή $X=-1$ με την ίδια πιθανότητα), ενώ η Y ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με *γνωστές* τιμές $\{-a,a\}$, $a \in \mathbb{R}$ (δηλαδή $Y=a$ ή $Y=-a$ με την ίδια πιθανότητα). Η τ.μ. Z δίνεται από τη σχέση $Z = X+Y$. Για όλες τις πιθανές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ να βρεθούν

   (α) Η $H(Y)$.

   (β) Η $H(Z)$.

   (γ) Η $I(X;Z)$.

8. **Εντροπία, Αμοιβαία Πληροφορία και συμπίεση (Τελικό διαγώνισμα Θ. Π., Φεβρουάριος 2008)**

   Έστω οι *ανεξάρτητες* τ.μ. X και Y, η καθεμία με ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{0,1,2,3\}$. Η τ.μ. Z δίνεται από τη σχέση $Z = X \cdot Y$ (γινόμενο). Να βρεθούν

   (α) Η $H(X)$.

   (β) Η $H(Z)$. $\log_2 7 \approx 2.8074$.

   (γ) Η $I(X;Z)$.

   (δ) Κατασκευάστε ένα δυαδικό κώδικα Huffman για την τ.μ. Z. Συγκρίνετε το μέσο μήκος κώδικα με την εντροπία της Z και σχολιάστε.

9. **Σύντομες Ερωτήσεις (Τελικό Διαγώνισμα Θ. Π., Φεβρουάριος 2008)**

   (α) Αποδείξτε ότι $H(X,Y,Z) - H(X,Y) \le H(X,Z) - H(X)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

   (γ) Σωστό ή λάθος; $I(X;Y|Z) = 0 \Rightarrow I(X;Y) = 0$. Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα.

10. **Εντροπία (Τελικό Διαγώνισμα Π. Θ. Θ. Π., Ιούνιος 2008)**

    Θεωρούμε μια διακριτή τυχαία τ.μ. που παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων $\mathcal{X} = \{1,\ldots,|\mathcal{X}|\}$. Έστω ότι δίνεται η $p(1) = \Pr\{X=1\}$ η οποία δεν είναι δυνατόν να μεταβληθεί.

    (α) Ποιες είναι οι τιμές $p(i)$, $i = 2,\ldots,|\mathcal{X}|$, της κατανομής που μεγιστοποιεί την εντροπία $H(X)$ (για δεδομένη $p(1)$);

    (β) Με τι ισούται η μέγιστη $H(X)$ για δεδομένη $p(1)$; Δώστε μια ερμηνεία της έκφρασης για την $H(X)$ με χρήση την αρχή διαχωρισιμότητας.
    Υπόδειξη: Χωρίστε το $\mathcal{X}$ σε δύο κατάλληλα υποσύνολα.

(γ) Εάν ένας παίκτης Α μπορεί να μεταβάλλει την $p(1)$ με σκοπό να μειώνει την εντροπία $H(X)$ όσο περισσότερο μπορεί, ενώ ένας παίκτης Β μπορεί να μεταβάλλει οποιοδήποτε υποσύνολο των υπόλοιπων $p(i)$ (αλλά όχι την $p(1)$) με σκοπό να αυξάνει την εντροπία όσο μπορεί, ποια τιμή πρέπει να επιλέξει ο Α για την $p(1)$ αν παίζει πρώτος; Πώς πρέπει να απαντήσει ο Β; Αλλάζει η απάντησή σας εάν πρώτος παίζει ο Β; Θεωρούμε ότι οι παίκτες παίζουν έτσι ώστε να μην παραβιάζεται η συνθήκη $\sum_{i=1}^{|\mathcal{X}|} p(x_i) = 1$ για το $\mathbf{p}$.

11. **Εντροπία (Επαναληπτική εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2008)**

Επιστήμονες που μελετούν ένα σπάνιο ερπετό έχουν προσδιορίσει ότι η επώαση του κάθε αβγού του ερπετού διαρκεί τουλάχιστον 41 ημέρες και δεν υπερβαίνει τις 104 ημέρες. Κατά τα άλλα, τίποτα δεν είναι γνωστό για την κατανομή της διάρκειας επώασης των αβγών.

(α) Έστω X διακριτή τ.μ. που αναπαριστά τη διάρκεια επώασης ενός αβγού του ερπετού. Δώστε ένα άνω φράγμα και ένα κάτω φράγμα για την εντροπία της X, καθώς και τις κατανομές που αντιστοιχούν στο άνω και στο κάτω φράγμα. Υποθέτουμε ότι η επώαση μετράται σε ακέραιο αριθμό ημερών ($X \in \mathbb{N} \cap [41,\ 104]$, δηλαδή δεν μπορεί, για παράδειγμα, να διαρκέσει 65.3 ημέρες).

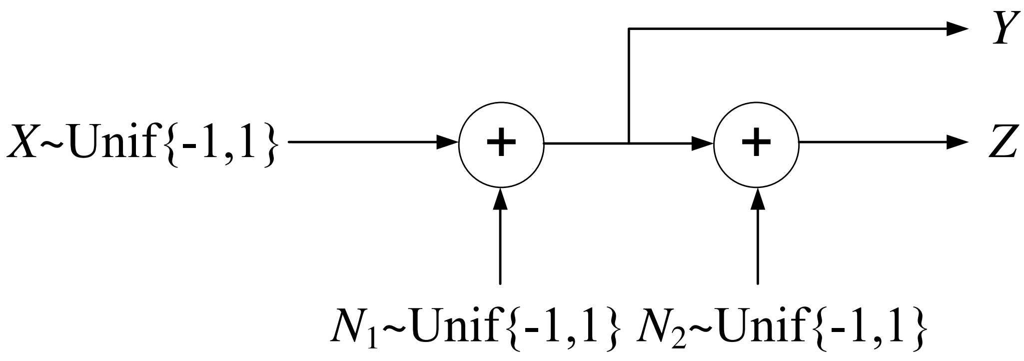
(β) Μετά από νέες παρατηρήσεις, επιβεβαιώθηκε ότι $41 \leq X \leq 104$, και προέκυψε, επίσης, ότι η πιθανότητα η επώαση του αβγού να διαρκεί περισσότερο από 56 ημέρες δεν μπορεί να υπερβεί την πιθανότητα η επώαση να διαρκεί 56 ημέρες ή λιγότερο. Επαναλάβετε το Ερώτημα (α) και συγκρίνετε τα νέα φράγματα που υπολογίσατε.

Δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.

12. **Εντροπία και Αμοιβαία Πληροφορία (Πρόοδος Θ. Π., Νοέμβριος 2008)**

Στο Σχήμα 1, οι τ.μ. X, N_1 και N_2 είναι διακριτές, δυαδικές και ομοιόμορφα κατανεμημένες. Επίσης, είναι όλες *ανεξάρτητες* μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που σας χρειαστεί, δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.



Σχήμα 1: Σύστημα με δύο πηγές θορύβου

(α) Με τι ισούται η εντροπία της X;

(β) Βρείτε την εντροπία της Y.

(γ) Για *οποιαδήποτε* κατανομή της N_2 (όχι, κατ' ανάγκη ομοιόμορφη όπως στο σχήμα), υποθέτοντας, πάντοτε, ότι η N_2 είναι τυχαία και ανεξάρτητη των X και N_1, δώστε το καλύτερο κάτω φράγμα που μπορείτε για την $H(Z)$. Θεωρούμε ότι η κατανομή της N_2 (και, επομένως, και η εντροπία της) είναι γνωστή. Προσοχή: Σε αυτό το ερώτημα (αντίθετα με όλα τα άλλα) δε θεωρούμε ότι η N_2 είναι, κατ' ανάγκη, δυαδική.

(δ) Υπολογίστε, τώρα, την $H(Z)$ για $N_2 \sim \text{Unif}\{-1, +1\}$ και επαληθεύστε ότι υπερβαίνει το κάτω φράγμα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

(ε) Υπολογίστε τις $I(Y;X)$, $I(Z;X)$ και $I(Y,Z;X)$. Συγκρίνετέ τις μεταξύ τους και σχολιάστε.

(στ) Σας δίνονται οι εξής επιλογές: Παρατήρηση της τ.μ. Y μόνο, παρατήρηση της τ.μ. Z μόνο ή παρατήρηση του ζεύγους τ.μ. (Y, Z). Ποια παρατήρηση θα επιλέξετε ώστε να πάρετε όση περισσότερη πληροφορία για τη X μπορείτε (κατά μέσο όρο);

13. **Σύστημα με δύο εξόδους (Τελικό διαγώνισμα Θ. Π., Φεβρουάριος 2009)**

Θεωρούμε το σύστημα του Σχήματος 2. Η πηγή X *δεν* έχει μνήμη και παίρνει τιμές $+1$ ή -1 με την ίδια πιθανότητα $1/2$. Οι *πολλαπλασιαστικοί* θόρυβοι Z_1 και Z_2 παίρνουν, επίσης, τιμές στο σύνολο $\{-1, 1\}$, αλλά ακολουθούν κατανομή Bernoulli. Δηλαδή,

$$Z_i = \begin{cases} +1 & \text{με πιθανότητα} \quad p_i \\ -1 & \text{με πιθανότητα} \quad 1-p_i \end{cases} .$$

Οι τ.μ. Z_1 και Z_2 είναι ανεξάρτητες της X. Ωστόσο, στη γενική περίπτωση, **δεν** είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

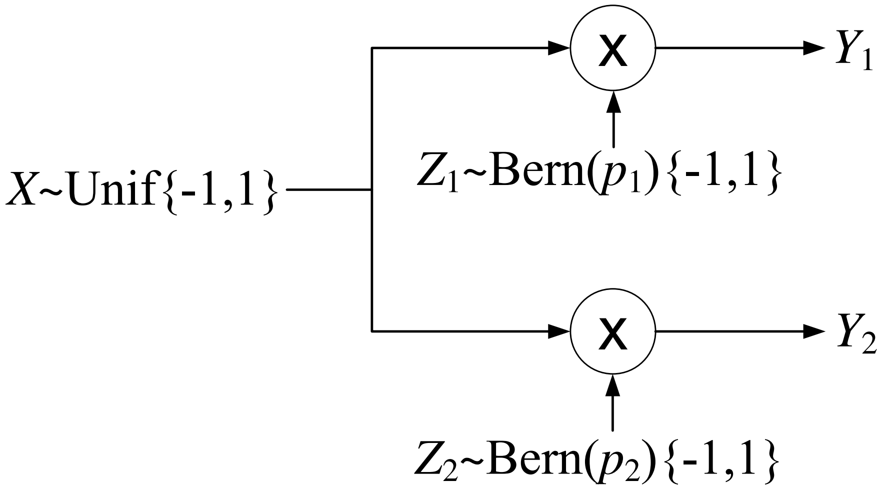
(α) Βρείτε την $H(X)$ και τις $H(Z_i)$ (συναρτήσει των p_i).

(β) Για *δεδομένα* p_1 και p_2, βρείτε ένα άνω φράγμα για την $H(Z_1, Z_2)$, καθώς και την από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(z_1, z_2)$ η οποία επιτυγχάνει το άνω φράγμα.

(γ) Βρείτε τις $I(X;Y_1)$ και $I(X;Y_2)$. Για δεδομένα p_1 και p_2 υπάρχει τρόπος να αυξήσετε τις $I(X;Y_1)$ και $I(X;Y_2)$ αλλάζοντας την κατανομή της X; Επιτρέπεται να αλλάξετε μόνο τις πιθανότητες με τις οποίες $X = 1$ ή -1. Δεν μπορείτε να αυξήσετε το πλήθος τιμών, $|\mathcal{X}|$, της πηγής.

(δ) Συγκρίνετε την $I(X;Y_1,Y_2)$ με τις $I(X;Y_i)$. Είναι μικρότερη; Μεγαλύτερη; Ίση; Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή (σε bits) που μπορεί να πάρει η $I(X;Y_1,Y_2)$;

Υπόδειξη: Στο ερώτημα αυτό μπορείτε να απαντήσετε χωρίς να βρείτε την τιμή της $I(X;Y_1,Y_2)$.



Σχήμα 2: Σύστημα με δύο εξόδους.

(ε) Υποθέστε, τώρα, ότι οι Z_1 και Z_2 είναι *ανεξάρτητες* μεταξύ τους. Βρείτε μια έκφραση για την $I(X; Y_1, Y_2)$ συναρτήσει των p_1 και p_2.
Υπόδειξη: Ενδέχεται να σας φανεί χρήσιμη η αντικατάσταση $\alpha \triangleq p_1 + p_2 - 2p_1p_2$.

14. **Ανισότητες (Επαναληπτική Εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

(α) Να αποδειχτεί ότι, για $n \geq 2$,

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) \geq \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n).$$

Στη συνέχεια, να αποδειχτεί ότι

$$\frac{1}{2}\left[H(X_1, X_2) + H(X_2, X_3) + H(X_1, X_3)\right] \geq H(X_1, X_2, X_3).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις

$$H(X_1, X_2, X_3) = H(X_i, X_j) + H(X_k | X_i, X_j),$$

καθώς και την πρώτη σχέση που αποδείξατε.

(β) Έστω $p_{XY}(x,y)$ και $q_{XY}(x,y)$ δύο κατανομές μάζας πιθανότητας στο σύνολο $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Να αποδειχθεί ότι $D(p_{XY}||q_{XY}) \geq D(p_X||q_X)$, όπου $p_X(x)$ και $q_X(x)$ οι περιθώριες σ.μ.π. των $p_{XY}(x,y)$ και $q_{XY}(x,y)$, αντίστοιχα.

15. **Ισότητες και ανισότητες (Επαναληπτική εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

Συμπληρώστε τις παρακάτω σχέσεις με $=$, $\leq$ ή $\geq$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Στην περίπτωση που ισχύει $\leq$ ή $\geq$, προσδιορίστε πότε ισχύει η ισότητα.

Σημείωση: Απαντήσεις που δεν είναι επαρκώς αιτιολογημένες δε βαθμολογούνται.

(α) $I(X;Y)$? $I(g(X);Y)$. Η $g()$ είναι αιτιοκρατική (deterministic) συνάρτηση.

(β) $I(Y;Z|X)$? $I(Y;Z)$ εάν $p(x,y,z) = p(x)p(y)p(z|x,y)$.

(γ) $H(X|Z)$? $H(X|Y) + H(Y|Z)$.

(δ) (εκτός ύλης για την Πρόοδο)
$h(X+Y)$? $h(X)$, όταν X και Y είναι *ανεξάρτητες* συνεχείς τ.μ.

16. **Μεταβολή εντροπίας (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2010)**

Θεωρήστε μια κατανομή $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ με $N \geq 2$ ενδεχόμενα, όλα *μη μηδενικής πιθανότητας*, δηλαδή $p_n > 0\ \forall n$. Θα δείξουμε ότι, για οποιαδήποτε κατανομή, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο, έστω K, το οποίο αν αφαιρέσουμε θα ελαττώσουμε την εντροπία. Δηλαδή, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα p_k έτσι ώστε, αν $\mathbf{p}' = \left(\frac{p_1}{1-p_K}, \frac{p_2}{1-p_K}, \ldots, \frac{p_{K-1}}{1-p_K}, \frac{p_{K+1}}{1-p_K}, \ldots, \frac{p_N}{1-p_K}\right)$, $H(\mathbf{p}') < H(\mathbf{p})$.

(α) Δείξτε ότι δεν μπορούμε πάντοτε να ελαττώσουμε την εντροπία αν επιλέξουμε το ενδεχόμενο K τυχαία. Δηλαδή, υπάρχουν κατανομές για τις οποίες υπάρχει p_K τέτοιο ώστε $H(\mathbf{p}') > H(\mathbf{p})$.

(β) Στη συνέχεια θα αποδείξετε ένα λήμμα που θα σας βοηθήσει να αποδείξετε το ζητούμενο. Δείξτε ότι, για $p \in (0, 1/2]$, η συνάρτηση $\frac{H(p)}{p}$, όπου $H(p) \triangleq -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του p.

(γ) Εξηγήστε γιατί, σε μία οποιαδήποτε κατανομή με N ενδεχόμενα, $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$, όλα *μη μηδενικά*, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο, L, με $p_L \leq \frac{1}{N}$.

(δ) Χρησιμοποιώντας τα Ερωτήματα (β) και (γ) (ή κάποιον άλλο τρόπο, αν προτιμάτε) αποδείξτε ότι υπάρχει πάντοτε ένα ενδεχόμενο, K, το οποίο αν αφαιρεθεί η εντροπία της κατανομής μειώνεται.

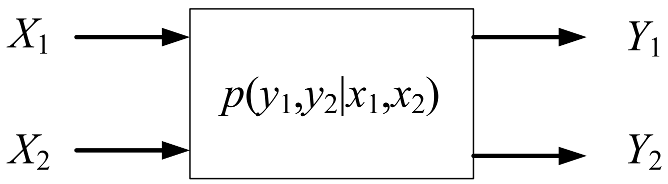
17. **Ανισότητες (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2011)**

Θεωρήστε 4 διακριτές τ.μ. X_1, X_2, Y_1 και Y_2 οι οποίες ικανοποιούν τις εξής συνθήκες

- Οι X_1 και X_2 είναι *ανεξάρτητες*. Δηλαδή, $p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$.
- Οι Y_1 και Y_2 εξαρτώνται από τις X_1 και X_2 μέσω της $p_{Y_1Y_2|X_1X_2}(y_1, y_2|x_1, x_2)$.

Για παράδειγμα, οι Y_1 και Y_2 μπορεί να είναι έξοδοι του συστήματος του Σχήματος 3, στο οποίο εισάγουμε ανεξάρτητες εισόδους (δηλαδή ο χρήστης 1 δεν μπορεί να συνεννοηθεί με το χρήστη 2). Ωστόσο, στη γενική περίπτωση, η έξοδος Y_j εξαρτάται όχι μόνο από τη X_j, αλλά και από τη X_i, $i \neq j$.

(α) Δείξτε ότι $I(X_1, X_2; Z) \geq I(X_1; Z) + I(X_2; Z)$, όπου $Z = Y_1$, $Z = Y_2$ ή $Z = (Y_1, Y_2)$.



Σχήμα 3: Στοχαστικό σύστημα με εισόδους X_1 και X_2 και εξόδους Y_1 και Y_2.

Δηλαδή, κάποιος που διαθέτει πρόσβαση στα X_1 και X_2 ταυτόχρονα, μπορεί να αντλήσει περισσότερη πληροφορία για το Z από τη συνολική πληροφορία που μπορούν να αντλήσουν δύο άτομα που διαθέτουν πρόσβαση ο καθένας μόνο στο X_1 και μόνο στο X_2.

Πότε ίσχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση;

(β) Έστω, τώρα, ότι ισχύει $p(y_1, y_2|x_1, x_2) = p(y_1|x_1, x_2) \cdot p(y_2|x_1, x_2)$. Δηλαδή, οι Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες *δεδομένων των* X_1 και X_2.

Δείξτε ότι

$$I(X_1, X_2; Y_1, Y_2) \leq I(X_1, X_2; Y_1) + I(X_1, X_2; Y_2).$$

Δηλαδή, κάποιο μέρος της πληροφορίας που περιέχει η Y_1 για τις X_1 και X_2 υπάρχει και στην Y_2 (και αντίστροφα).

Πότε ισχύει η ισότητα;

18. **► Ο σκύλος που ψάχνει για το κόκκαλο – Cover & Thomas 4.12**

Ένας σκύλος κινείται επάνω στους ακέραιους αριθμούς. Σε κάθε βήμα συνεχίζει προς την ίδια κατεύθυνση με πιθανότητα 0.9, ενώ αλλάζει κατεύθυνση με πιθανότητα 0.1. Υποθέστε ότι ο σκύλος ξεκινά από τη θέση $X_0 = 0$ και ότι το πρώτο βήμα μπορεί να γίνει προς οποιαδήποτε κατεύθυνση (θετική ή αρνητική) με την ίδια πιθανότητα. Για παράδειγμα, μια πιθανή διαδρομή του σκύλου είναι

$(X_0, X_1, \ldots) = (0, -1, -2, -3, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, ...)$.

(α) Υπολογίστε την $H(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

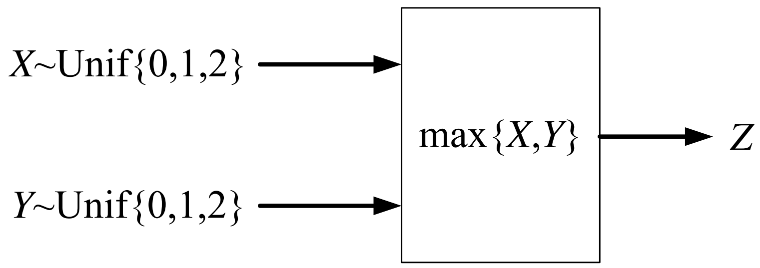
(β) Υπολογίστε το ρυθμό εντροπίας, $H(\mathcal{X})$, της θέσης του σκύλου.

19. **Μέγιστο δύο τ.μ. (Πρόοδος Θ. Π., Νοέμβριος 2009)**

Θεωρούμε το ντετερμινιστικό σύστημα του Σχήματος 4. Οι τ.μ. X και Y ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2\}$. Οι X και Y είναι *ανεξάρτητες* μεταξύ τους. Το κύκλωμα υπολογίζει την έξοδο με χρήση της σχέσης $Z = \max\{X, Y\}$.

Δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και $\log_2 5 \approx 2.3219$.

Εάν προτιμάτε, μπορείτε να αφήσετε στις απαντήσεις σας όρους της μορφής $H(\mathbf{p}) = H(p_1, p_2, \ldots, p_K)$ χωρίς να τους υπολογίσετε, αρκεί να δώσετε τις τιμές των $p_1, p_2, \ldots, p_K$.



Σχήμα 4: Υπολογισμός μεγίστου δύο τ.μ.

(α) Υπολογίστε την $H(X)$ και την $I(X;Y)$.

(β) Υπολογίστε την $H(Z)$ και την $I(X;Z)$.

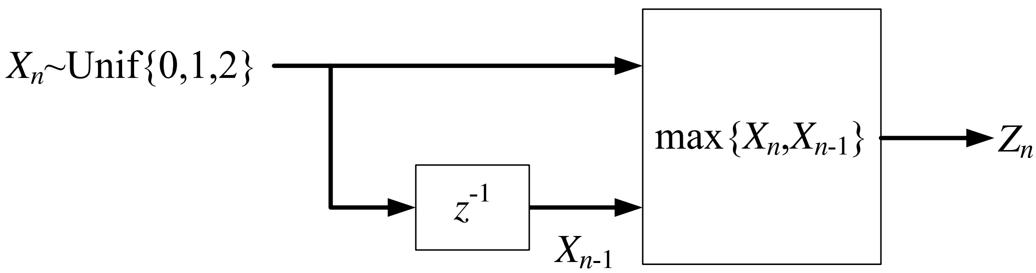
(γ) Βρείτε ένα βέλτιστο *άμεσο δυαδικό* κώδικα για τη Z και συγκρίνετε το μέσο μήκος του με την $H(Z)$.

(δ) Δείξτε ότι $I(X;Y|Z) > 0$ (*όχι* $\geq$). Συγκρίνετε με την $I(X;Y)$ του Ερωτήματος (α).

Υπόδειξη: Η απάντηση προκύπτει πολύ πιο σύντομα αν χρησιμοποιήσετε ιδιότητες εντροπίας ή/και αμοιβαίας πληροφορίας και δείτε τι ισχύει στο συγκεκριμένο πρόβλημα, παρά αν κάνετε πράξεις.

(ε) Εάν τόσο ο συμπιεστής όσο και ο αποσυμπιεστής γνωρίζουν, με κάποιο τρόπο, την τιμή της Y (αλλά όχι της X), προτείνετε ένα βέλτιστο *άμεσο δυαδικό* κώδικα για τη συμπίεση της Z. Πόσο αποδοτικός είναι ο κώδικας;

Θεωρήστε, τώρα, το τροποποιημένο σύστημα του Σχήματος 5. Τώρα χρησιμοποιούμε το κύκλωμα $\max\{\cdot\}$ σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Η τ.μ. Y έχει αντικατασταθεί από το δείγμα της X την προηγούμενη χρονική στιγμή, δηλαδή $Z_n = \max\{X_n, X_{n-1}\}$. Θεωρούμε, και πάλι, ότι $X_n \sim$Unif$\{0,1,2\}$. Επίσης, οι X_n είναι ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.). Θεωρούμε (παρόλο που δεν έχει ιδιαίτερη σημασία) ότι ο χρόνος αρχίζει τη στιγμή $n = 0$ και ότι $X_{-1} = 0$.



Σχήμα 5: Τροποποιημένο σύστημα.

(στ) Υπολογίστε την $H(Z_n)$ για $n > 0$ και την $I(X_n; X_{n-1})$ για $n \geq 1$.

(ζ*) Υπολογίστε την $H(Z_n|Z_{n-1})$ για $n > 1$. Είναι η $\{Z_n\}$ i.i.d.;

(η*) Συγκρίνετε την $H(Z_n|Z_{n-1}, Z_{n-2})$ (για $n > 2$) με την $H(Z_n|Z_{n-1})$. Δε χρειάζεται να βρείτε ακριβή τιμή, απλώς να προσδιορίσετε εάν $H(Z_n|Z_{n-1}, Z_{n-2}) = H(Z_n|Z_{n-1})$ ή όχι. Είναι η $\{Z_n\}$ αλυσίδα Markov 1ης τάξης;

20. **Επέμβαση σε δυαδική ακολουθία (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2010)**

Σημείωση: Εάν σε κάποια ερωτήματα της άσκησης ο υπολογισμός της εντροπίας δεν είναι τετριμμένος, εάν το επιθυμείτε η απάντησή σας μπορεί να περιέχει όρους της μορφής $H(\mathbf{p})$, αρκεί να διευκρινίσετε ποια είναι η κατανομή $\mathbf{p}$.

Θεωρούμε ακολουθία ανεξάρτητων και ομοίως κατανεμημένων (i.i.d.) τ.μ. $X_i \sim \text{Bern}(1/2)$. Οι επιτρεπτές τιμές των X_i είναι 0 ή 1.

(α) Υπολογίστε την $H(X_i)$, την $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ (για πεπερασμένο n) και το ρυθμό εντροπίας, $H(\mathcal{X})$, εάν αυτός ορίζεται. Πόσα bits (κατά μέσο όρο) απαιτούνται για τη συμπίεση n διαδοχικών δειγμάτων της στοχαστικής ανέλιξης, $\{X\} = \{\ldots, X_1, X_2, \ldots\}$; Αλλάζει η απάντησή σας αν τα δείγματα που συμπιέζονται δεν είναι, κατ' ανάγκη, διαδοχικά;

(β) Έστω, τώρα, ότι, για λόγους συγχρονισμού θέλουμε να είμαστε βέβαιοι ότι η ακολουθία θα παίρνει την τιμή '1' ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Ένας τρόπος για να το διασφαλίσουμε είναι μετά από κάθε 3 σύμβολα της ακολουθίας $\{X\}$ να εισάγουμε και ένα σύμβολο '1', ανεξαρτήτως των τιμών των 3 συμβόλων. Δηλαδή το κύκλωμα που προσθέτει σύμβολα δε χρειάζεται να εξετάζει τις τιμές της ακολουθίας $\{X\}$. Συνεπώς,

$$\begin{array}{ll} Y_{4k+j} = X_{3k+j} & k \in \mathbb{Z}, j \in 0, 1, 2 \\ Y_{4k+3} = 1 & k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Υπολογίστε την $H(Y_i)$, την $H(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ (για πεπερασμένο n) και το ρυθμό εντροπίας, $H(\mathcal{Y})$, εφόσον αυτός ορίζεται. Πόσα bits (κατά μέσο όρο) απαιτούνται για τη συμπίεση n διαδοχικών δειγμάτων της στοχαστικής ανέλιξης, $\{Y\} = \{\ldots, Y_1, Y_2, \ldots\}$;

(γ) Στο προηγούμενο ερώτημα υποθέσαμε ότι γνωρίζουμε τις θέσεις όπου έχουν τοποθετηθεί οι τιμές '1'. Υποθέστε, τώρα, ότι γνωρίζουμε μεν ότι μετά από κάθε 3 σύμβολα τοποθετείται ένα '1', αλλά δε γνωρίζουμε την αρχή της ακολουθίας, με αποτέλεσμα να μην ξέρουμε το δείκτη του σύμβολου που εξετάζουμε. Δηλαδή, θεωρούμε την ακολουθία $\{\tilde{Y}\}$, όπου, για κάθε i, $\tilde{Y}_i = Y_{i+m}$, με σταθερή, αλλά άγνωστη μετατόπιση m.

Υπολογίστε την $H(\tilde{Y}_i)$. Επίσης, υπολογίστε την $H(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_n)$, αλλά αυτή τη φορά για $n \to \infty$. Πόσα bits (κατά μέσο όρο) απαιτούνται για τη συμπίεση n διαδοχικών δειγμάτων της στοχαστικής ανέλιξης, $\{\tilde{Y}\} = \{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots\}$; Υπενθυμίζεται ότι, σε αντίθεση με τα προηγούμενα ερωτήματα, $n \to \infty$.

Υπόδειξη: Μπορείτε να βρείτε την $H(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_n)$ για $n \to \infty$ με βάση τα μέχρι τώρα ερωτήματα χωρίς να κάνετε πράξεις. Εάν σας χρειαστεί δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και $\log_2 5 = 2.322$.

(δ) Υποθέστε, τέλος, ότι, αντί να τοποθετούμε σύμβολα με τιμές '1' πάντοτε στην ίδια θέση, τα εισάγουμε ως εξής: Μετά από κάθε σύμβολο X_i, παίρνουμε μία τυχαία απόφαση (η οποία *δεν* εξαρτάται από την τιμή της X_i). Με πιθανότητα $p = 1/3$ εισάγουμε ένα '1' μετά από το X_i, ενώ με πιθανότητα $1 - p = 2/3$ προχωράμε στο επόμενο σύμβολο, X_{i+1}, της $\{X\}$. Ονομάζουμε την τυχαία διαδικασία που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο $\{Z\}$.

Υπολογίστε την $H(Z_i)$ και την $H(Z_i|Z_{i-1})$. Εάν κωδικοποιούμε τα σύμβολα της ακολουθίας $\{Z\}$ *ανά ζεύγη*, κερδίζουμε κάτι αν φτιάξουμε τον κώδικα με χρήση της $p_{Z_i Z_{i-1}}(z_i, z_{i-1})$ αντί να χρησιμοποιήσουμε την (προσεγγιστική) υπόθεση ότι $p_{Z_i Z_{i-1}}(z_i, z_{i-1}) = p_{Z_i}(z_i) p_{Z_{i-1}}(z_{i-1})$;

21. **Τυπικότητα και Από Κοινού Τυπικότητα (Τελική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Ιούνιος 2010)**

Θεωρούμε πηγή χωρίς μνήμη που παράγει ζεύγος τιμών (X, Y) (εναλλακτικά, μπορείτε να θεωρήσετε ότι έχουμε δύο εξαρτημένες πηγές χωρίς μνήμη). Η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας, $p_{XY}(x, y)$, δίνεται στον Πίνακα 1.

	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
$Y=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Πίνακας 1: Από κοινού σ.μ.π. για την Άσκηση

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί, $\log_2 3 \approx 1.585$ και $\log_2 5 \approx 2.322$.

(α) Θεωρούμε τις ακολουθίες $\mathbf{x}_1 = 00110$ και $\mathbf{y}_1 = 10010$. Είναι οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ ασθενώς ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.05$; Αν όχι, βρείτε τη μικρότερη τιμή του ϵ για την οποία οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ είναι ασθενώς ϵ-τυπικές.

(β) Είναι οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ *από κοινού* ασθενώς ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.05$; Αν όχι, βρείτε τη μικρότερη τιμή του ϵ για την οποία οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ είναι *από κοινού* ασθενώς ϵ-τυπικές.

(γ) Για το ϵ που βρήκατε στο Ερώτημα (β) (0.05 ή μεγαλύτερο) βρείτε τις ακολουθίες $\mathbf{x}$ μήκους 5 που είναι ασθενώς τυπικές ως προς την p_X. Βρείτε, επίσης, τις ακολουθίες $\mathbf{y}$ μήκους 5 που είναι ασθενώς τυπικές ως προς την p_Y.

(δ*) Για το ϵ που βρήκατε στο Ερώτημα (β) (0.05 ή μεγαλύτερο) βρείτε τα ζεύγη ακολουθιών $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ μήκους 5 που είναι από κοινού τυπικές.

22. **Τυπικές ακολουθίες (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2010)**

Θεωρούμε πηγή *χωρίς μνήμη* που παράγει ακολουθία δυαδικών τ.μ. $X_i \sim$Bern(p). Δηλαδή, η $X_1, X_2, \ldots$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ομοίως κατανεμημένων (i.i.d.) τ.μ.

(α) Εάν $\left|A_\epsilon^{(n)}\right|$ είναι το πλήθος των ασθενώς ϵ−τυπικών ακολουθιών μήκους n και $|X_1^n|$ είναι όλες οι δυαδικές ακολουθίες μήκους n, τι μπορούμε να πούμε για το λόγο $\left|A_\epsilon^{(n)}\right| / |X_1^n|$ καθώς $n \to \infty$ και $\epsilon \to 0$;

Υπόδειξη: Πρέπει να δείτε αν ο λόγος συγκλίνει στην ίδια τιμή για όλες τις τιμές της παραμέτρου p.

(β) Θεωρούμε, τώρα, ότι οι τιμές της X_i είναι 0 (με πιθανότητα p) ή 1 (με πιθανότητα $1-p$). Ορίζουμε το βάρος Hamming (Hamming weight), $W(X_1^n)$, της ακολουθίας X_1^n ως τον αριθμό των '1' της ακολουθίας.

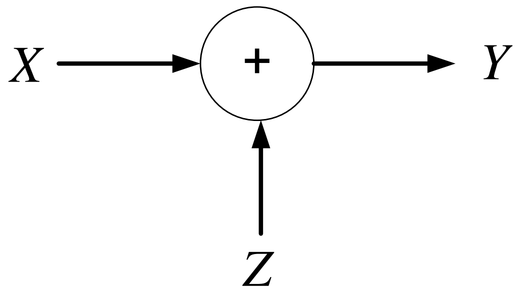
Δείξτε ότι $\frac{1}{n}W(X_1^n) \to 1-p$ για $n \to \infty$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών.

(γ) Έστω, τώρα, ότι το μήκος, n, της ακολουθίας είναι πεπερασμένο και ότι $\epsilon > 0$. Δείξτε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε αν η ακολουθία X_1^n μήκους n είναι *ασθενώς* ϵ−τυπική αν γνωρίζουμε την τιμή του βάρους Hamming, $W(X_1^n)$, της ακολουθίας.

23. **Κανάλι Προσθετικού Θορύβου – Cover & Thomas 7.2**

Βρείτε τη χωρητικότητα του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη του σχήματος.



Δίνεται ότι $\Pr\{Z=0\} = \Pr\{Z=\alpha\} = \frac{1}{2}$. Η τ.μ. X παίρνει τιμές στο αλφάβητο $\mathcal{X} = \{0,1\}$. Υποθέστε ότι η Z είναι ανεξάρτητη της X.

Παρατηρήστε ότι η χωρητικότητα του καναλιού εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου α.

24. **Χωρητικότητα καναλιού modulo – Cover & Thomas 7.4**

Θεωρούμε το κανάλι $Y = X + Z \pmod{11}$, και $Z \sim \mathrm{Unif}\{1,2,3\}$ και $\mathcal{X} = \{0,1,\ldots,10\}$.

Υπενθύμιση: $X \bmod a$: Το υπόλοιπο της διαίρεσης του X με το a.

(α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού.

(β) Ποια είναι η βέλτιστη κατανομή $p^*(x)$ που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα;

25. **►Ενθόρυβη Γραφομηχανή – Cover & Thomas 7.6 (τροποποιημένη)**

Θεωρούμε γραφομηχανή με 24 πλήκτρα.

(α) Εάν κάθε φορά που πατάμε γιαπλήκτρο τυπώνεται το σωστό γράμμα, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού σε bits;

(β) Υποθέστε, τώρα, ότι κάθε φορά που πατάμε ένα πλήκτρο τυπώνεται το σωστό γράμμα ή το επόμενό του στο αλφάβητο (με την ίδια πιθανότητα). Δηλαδή, $A \to A$ ή $A \to B$, $B \to B$ ή $B \to \Gamma$, ..., $\Omega \to \Omega$ ή $\Omega \to A$. Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;

(γ) Για το κανάλι του Ερωτήματος (β), εάν κωδικοποιούμε κάθε σύμβολο που θέλουμε να στείλουμε στο κανάλι ξεχωριστά, ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορείτε να επιτύχετε για μετάδοση με (ακριβώς) μηδενική πιθανότητα σφάλματος;

(δ) Επαναλάβετε τα Ερωτήματα (α)-(γ) για γραφομηχανή με 25 πλήκτρα.

26. **Το κανάλι Z – Cover & Thomas 7.8**

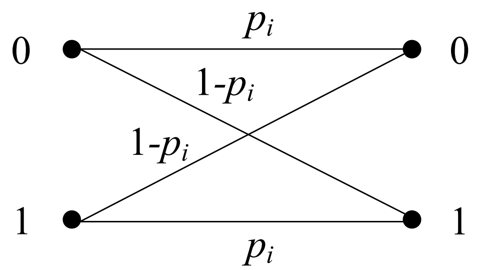
Έστω κανάλι Z με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad X, Y \in \{0, 1\}.$$

Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού, καθώς και την κατανομή εισόδου με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα.

27. **Χρονικώς Μεταβαλλόμενα Κανάλια – Cover & Thomas 7.11**

Θεωρούμε το χρονικώς μεταβαλλόμενο κανάλι του Σχήματος 6. Οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δεδομένων των $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με υπό συνθήκη κατανομή μάζας πιθανότητας $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} p_i(y_i|x_i)$. Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Βρείτε τη $\max_{p(\mathbf{x})} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$. Σχολιάστε την τιμή της χωρητικότητας και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.



Σχήμα 6: Χρονικώς Μεταβαλλόμενο BSC.

28. **Κανάλια με εξάρτηση μεταξύ των συμβόλων – Cover & Thomas 7.14**

Θεωρήστε το εξής κανάλι το οποιο χρησιμοποιεί δυαδικό αλφάβητο, παίρνει ως είσοδο σύμβολα των 2 bits και παράγει ως έξοδο σύμβολα των 2 bits σύμφωνα με την ακόλουθη απεικόνιση: 00 $\to$ 01, 01 $\to$ 10, 10 $\to$ 11 και 11 $\to$ 00. Επομένως, εάν η είσοδος στο κανάλι είναι η ακολουθία 01, η έξοδος είναι 10 με πιθανότητα 1. Συμβολίζουμε τα δύο σύμβολα εισόδου με X_1, X_2 και τα δύο σύμβολα εξόδου με Y_1, Y_2.

(α) Υπολογίστε την αμοιβαία πληροφορία $I(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ συναρτήσει της κατανομής εισόδου επάνω στα 4 πιθανά ζεύγη εισόδου.

(β) Δείξτε ότι η χωρητικότητα ανά μετάδοση ζεύγους ψηφίων ισούται με 2 bits.

(γ) Δείξτε ότι, για την κατανομή εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα στο προηγούμενο ερώτημα, $I(X_1; Y_1) = 0$. Επομένως, η κατανομή στις ακολουθίες εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα δε μεγιστοποιεί απαραίτητα την αμοιβαία πληροφορία μεταξύ μεμονωμένων συμβόλων εισόδου και των αντίστοιχων εξόδων.

29. **Κωδικοποιητής και Αποκωδικοποιητής ως μέρος του καναλιού – Cover & Thomas 7.16**

Θεωρήστε Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου

(crossover probability) 0.1. Ένα πιθανό σχήμα κωδικοποίησης για αυτό το κανάλι το οποίο χρησιμοποιεί δύο κωδικές λέξεις μήκους 3 είναι να κωδικοποιήσουμε το μήνυμα a_1 ως `000` και το μήνυμα a_2 ως `111`. Εάν χρησιμοποιούμε αυτόν τον κώδικα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο συνδυασμός κωδικοποιητή, καναλιού και αποκωδικοποιητή αποτελεί ένα νέο BSC με δύο εισόδους a_1 και a_2 και δύο εξόδους a_1 και a_2.

(α) Βρείτε την πιθανότητα αναστροφής για το νέο κανάλι.

(β) Ποια είναι η χωρητικότητα του νέου καναλιού σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού;

(γ) Ποια είναι η χωρητικότητα του αρχικού BSC με πιθανότητα αναστροφής 0.1;

(δ) Αποδείξτε το εξής γενικό αποτέλεσμα: Για οποιοδήποτε κανάλι, εάν θεωρήσουμε από κοινού τον κωδικοποιητή, το κανάλι και τον αποκωδικοποιητή ως ένα νέο κανάλι με είσοδο μηνύματα και έξοδο εκτιμώμενα μηνύματα, η χωρητικότητα σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού δεν μπορεί να αυξηθεί.

30. ***Χωρητικότητα καναλιού Ταχυδρομικών περιστεριών (Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας) – Cover & Thomas 7.19 (τροποποιημένη) – Σχετικά Δύσκολη**

Μια ομάδα αποκλεισμένων μαχητών επικοινωνεί με τους συμμάχους τους με χρήση ταχυδρομικών περιστεριών. Θεωρούμε ότι κάθε ταχυδρομικό περιστέρι μπορεί να μεταφέρει ένα σύμβολο ASCII (8 bits), ότι ένα περιστέρι στέλνεται κάθε 5 λεπτά της ώρας και ότι χρειάζεται πάντα 3 ακριβώς λεπτά της ώρας για να φτάσει στον προορισμό του.

(α) Εάν όλα τα περιστέρια καταφέρνουν να φτάσουν στον προορισμό τους, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού σε bits/ώρα;

(β) Έστω ότι ο παραλήπτης γνωρίζει ότι τα περιστέρια στέλνονται με σταθερό ρυθμό, οπότε μπορεί να ανιχνεύσει εάν ένα περιστέρι δε φτάσει στον προορισμό του. Εάν οι αντίπαλοι καταφέρνουν να σκοτώνουν ποσοστό α των περιστεριών, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού; Πώς θα μοντελοποιούσατε το κανάλι;

(*γ) Θεωρούμε, τώρα, ότι οι αντίπαλοι γνωρίζουν Θεωρία Πληροφορίας και, αφού πιάσουν ένα περιστέρι με πιθανότητα α, αντί να το σκοτώσουν, αντικαθιστούν το σύμβολο ASCII που στέλνει το περιστέρι με ένα διαφορετικό (από τα 255 πιθανά). Το σύμβολο αντικατάστασης επιλέγεται με βάση ομοιόμορφη κατανομή. Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού; Πώς θα μοντελοποιούσατε το κανάλι;

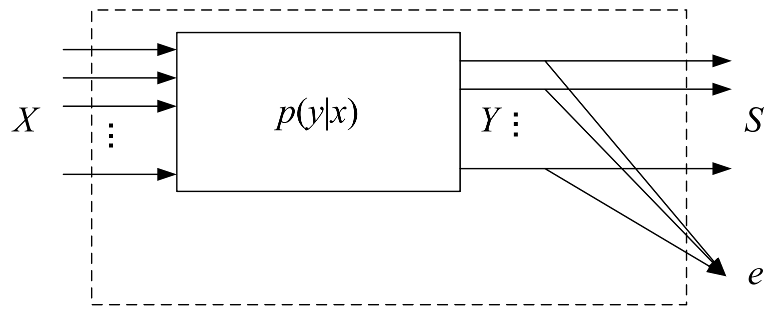
(*δ) Αν οι αντίπαλοι μπορούν να πιάνουν όλα τα περιστέρια, αλλά δε θέλουν να ξέρουμε ότι τα έπιασαν (δηλαδή δεν τα σκοτώνουν, αλλά μπορούν να αλλάξουν το σύμβολο ASCII, αν θέλουν, πριν τα αφήσουν) τι είναι το χειρότερο (για εμάς) που μπορούν να κάνουν;

31. **Υπάρχει περίπτωση η προσθήκη περισσότερων εισόδων στο κανάλι να ελαττώσει τη χωρητικότητά του; – Cover & Thomas 7.22**

    Δείξτε ότι η προσθήκη μιας οποιασδήποτε γραμμής στον πίνακα μετάβασης ενός διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη δεν μπορεί να ελαττώσει τη χωρητικότητά του.

32. **Κανάλι διαγραφής – Cover & Thomas 7.27**

    Έστω $\{\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y}\}$ ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με χωρητικότητα C. Υποθέστε ότι στην έξοδο του καναλιού συνδέεται ένα κανάλι διαγραφής $\{\mathcal{Y}, p(s|y), \mathcal{S}\}$ το οποίο διαγράφει την έξοδο του πρώτου καναλιού με πιθανότητα α.



Σχήμα 7: Κανάλι για το Πρόβλημα 7.27 των Cover & Thomas.

Συγκεκριμένα, $\mathcal{S} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m, e\}$, και

$$\begin{aligned} \Pr\{S = y|X = x\} &= \bar{\alpha} p(y|x), \quad y \in \mathcal{Y}, \\ \Pr\{S = e|X = x\} &= \alpha. \end{aligned}$$

Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού από το X στο S.

33. **Κανάλια (Τελικό Διαγώνισμα Θ. Π., Φεβρουάριος 2008)**

    Έστω

$$P(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix}$$

ο πίνακας μετάβασης ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα σφάλματος ϵ.

Επίσης, ορίζεται η πράξη $*$ ως εξής:

$$a * b = (1-a)b + a(1-b).$$

(α) Να αποδείξετε ότι το κανάλι το οποίο έχει για πίνακα μετάβασης το γίνομενο $P(\epsilon_1)P(\epsilon_2)$ είναι ισοδύναμο με ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι του οποίου η πιθανότητα σφάλματος ισούται με $\epsilon_1 * \epsilon_2$.

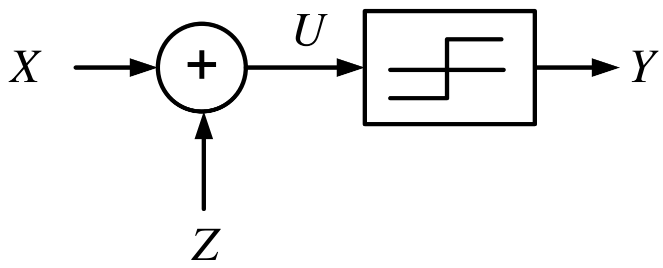
(β) Δώστε μια φυσική ερμηνεία της παρακάτω ανισότητας, καθώς και την απόδειξή της

$$1 - H(\epsilon_1 * \epsilon_2) \le \min\left(1 - H(\epsilon_1), 1 - H(\epsilon_2)\right),$$

εάν γνωρίζετε ότι ισχύουν οι ανισότητες: $|0.5-\epsilon_1 * \epsilon_2| \le |0.5-\epsilon_1|$ και $|0.5-\epsilon_1 * \epsilon_2| \le |0.5-\epsilon_2|$.

(γ) Να αποδείξετε ότι το κανάλι το οποίο έχει για πίνακα μετάβασης το γινόμενο $P^{\nu}(\epsilon)$ είναι ισοδύναμο με ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι του οποίου η πιθανότητα σφάλματος δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{\nu}\right]$. Σε αυτήν την περίπτωση, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;

34. **Κατανομή πηγής (Επαναληπτική Εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2008)**



Σχήμα 8: Κανάλι προσθετικού θορύβου με κύκλωμα απόφασης (slicer)

Θεωρούμε το κανάλι προσθετικού θορύβου του Σχήματος 8.

Η (διακριτή) πηγή X παίρνει τιμές στο σύνολο $\{-1, +1\}$ και οι X_i που αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές i είναι ανεξάρτητες ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) $\sim$ Bern(p). Ο θόρυβος Z_i είναι συνεχής ανεξάρτητη ομοίως κατανεμημένη τ.μ. (δηλαδή μια λευκή τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου με συνεχείς τιμές) και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-4/3, 4/3]$. Το κύκλωμα απόφασης παράγει μια εκτίμηση Y_i της X_i με βάση την τιμή του αθροίσματος $U_i = X_i + Z_i$. Όταν $U_i > \alpha$, $Y_i = +1$, αλλιώς $Y_i = -1$. $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι $\log_2 7 \approx 2.8074$.

(α) Σχεδιάστε ή δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z_i.

(β) Σχεδιάστε ή δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της U_i εάν $p = 1/2$.

(γ) Έστω, ότι $\alpha \in [-0.5, 0.5]$. Υπολογίστε τις δεσμευμένες πιθανότητες σφάλματος $P_{e,-1} = \Pr\{Y = +1|X = -1\}$ και $P_{e,+1} = \Pr\{Y = -1|X = +1\}$ ως συνάρτηση του α. $p \in [0,\ 1]$ (και όχι, κατ' ανάγκη, $p = 1/2$ όπως προηγουμένως).

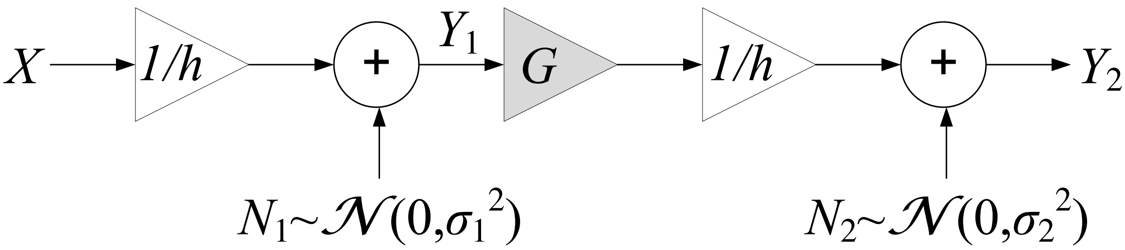
(δ) Έστω, τώρα, ότι $\alpha = 0$. Υπολογίστε τις πιθανότητες σφάλματος $P_{e,-1}$ και $P_{e,+1}$.

(ε) Για $\alpha = 0$, δώστε ένα διακριτό μοντέλο για το κανάλι με είσοδο τη X και έξοδο την Y. Πρόκειται για κανάλι με η χωρίς μνήμη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(στ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού που μοντελοποιήσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Για ποια τιμή της p επιτυγχάνεται η χωρητικότητα;

35. **Κανάλι με αναμεταδότη (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2009)**

Προκειμένου να μεταδώσουμε πληροφορία σε μεγάλη απόσταση χρησιμοποιούμε το κανάλι με αναμεταδότη του Σχήματος 9.



Σχήμα 9: Κανάλι με αναμεταδότη που ενισχύει το σήμα.

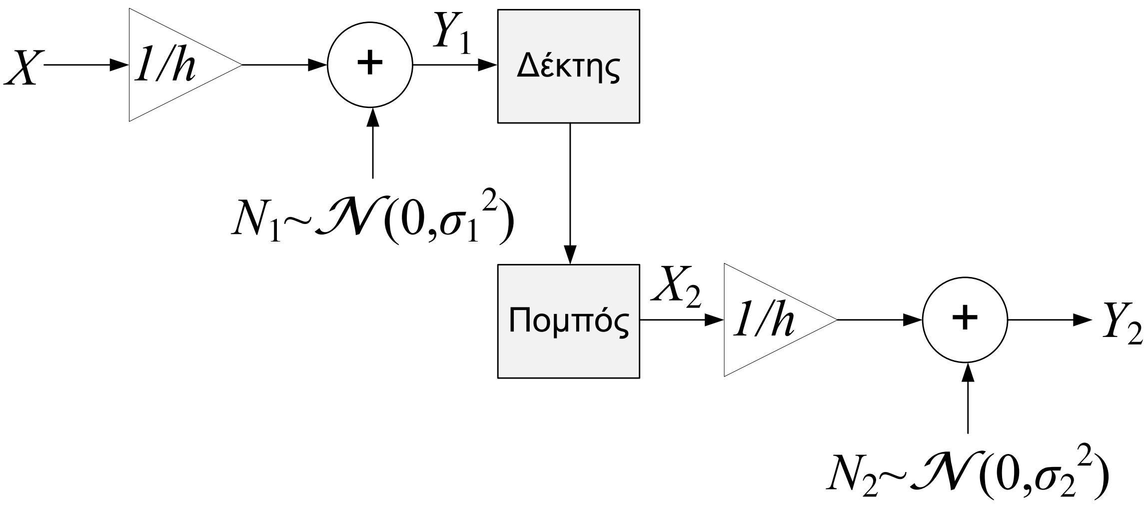
Τα δύο κανάλια πριν και μετά τον αναμεταδότη εισάγουν απόσβεση $|h| > 1$ και Γκαουσιανό θόρυβο N_i μηδενικής μέσης τιμής. Δηλαδή, για το σήμα Y_1 στην είσοδο του αναμεταδότη ισχύει $Y_1 = \frac{1}{h}X + N_1$. Ο αναμεταδότης (στην ουσία ένας ενισχυτής) πολλαπλασιάζει το Y_1 με $|G| > 1$. Θεωρήστε ότι η μέση ισχύς του σήματος X στην είσοδο του καναλιού ισούται με P. Επίσης, θεωρήστε ότι θόρυβοι N_i είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ανεξάρτητοι της X.

Θεωρούμε ότι ο δέκτης γνωρίζει τις τιμές των h και G, καθώς και τις τιμές της διασποράς των Γκαουσιανών θορύβων N_1 και N_2, σ_1^2 και σ_2^2, αντίστοιχα.

(α) Βρείτε το μέγιστο αριθμό bits που μπορούμε να μεταδώσουμε κάθε φορά που χρησιμοποιούμε το κανάλι με είσοδο X και έξοδο Y_2 (συναρτήσει των P, h, G, σ_1 και σ_2), καθώς και την κατανομή εισόδου που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Πρέπει να αιτιολογήσετε επαρκώς την απάντησή σας.

(β) Έστω, τώρα, ότι, αντί για ενισχυτή, ο αναμεταδότης αποτελείται από ένα δέκτη και ένα πομπό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.

Ο δέκτης του αναμεταδότη αποκωδικοποιεί το μήνυμα και ο πομπός του το επανακωδικοποιεί και το επαναμεταδίδει, πάλι με ισχύ P. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός bits που μπορούμε να μεταδώσουμε σε αυτήν την περίπτωση και ποιες κατανομές πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για τις X και X_2;



Σχήμα 10: Κανάλι με αναμεταδότη που αποκωδικοποιεί, επανακωδικοποιεί και επαναμεταδίδει.

(γ) Εάν η πολυπλοκότητα του αναμεταδότη δεν αποτελεί περιοριστικό παράγοντα και $G = h$ (ώστε το σήμα πληροφορίας στην έξοδο του αναμεταδότη-ενισχυτή να έχει ενέργεια P και να είναι δίκαιη η σύγκριση με τον αναμεταδότη-πομποδέκτη), ποια από τις δύο υλοποιήσεις του αναμεταδότη οδηγεί στο μέγιστο επιτεύξιμο ρυθμό μετάδοσης;

36. **Κανάλι (Επαναληπτική εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

Έστω $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2, 3\}$ τα σύμβολα εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα, διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & 1-\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta & \delta \\ 0 & 0 & \delta & 1-\delta \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι όταν η είσοδος του καναλιού ανήκει στο $\mathcal{X}_1 = \{0, 1\}$ η έξοδος ανήκει στο $\mathcal{Y}_1 = \{0, 1\}$. Ομοίως, για $\mathcal{X}_2 = \{2, 3\}$, η έξοδος ανήκει στο $\mathcal{Y}_2 = \{2, 3\}$.

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα μετάβασης του καναλιού.

(β) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού για $\epsilon = \delta = 1/2$.

(γ) Στη συνέχεια της άσκησης θεωρούμε ότι τα δ και ϵ μπορούν να πάρουν *οποιεσδήποτε* τιμές (όχι, πλέον, 1/2).

Έστω ότι, για την κατανομή εισόδου, $p(x)$, ισχύει $p(0)+p(1) = \alpha$ και $p(2)+p(3) = 1-\alpha$. Δείξτε ότι για την αμοιβαία πληροφορία, $I(X;Y)$, μεταξύ της εισόδου, X, και της εξόδου, Y, του καναλιού P ισχύει

$$I(X;Y) = H(\alpha) + \alpha I(X;Y|X \in \mathcal{X}_1) + (1-\alpha) I(X;Y|X \in \mathcal{X}_2).$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τ.μ. V η οποία υποδηλώνει εάν $X \in \mathcal{X}_1$ ή $X \in \mathcal{X}_2$ και χρησιμοποιήστε τη για να βρείτε εκφράσεις για την $H(X)$ και $H(X|Y)$.

(δ) Δείξτε ότι η μεγιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας προκειμένου να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του καναλιού μπορεί να γίνει σε δύο βήματα: Στο πρώτο βήμα βρίσκουμε τις κατανομές $p_1(x|X \in \mathcal{X}_1)$ και $p_2(x|X \in \mathcal{X}_2)$ που μεγιστοποιούν τις $I(X;Y|X \in \mathcal{X}_1)$ και $I(X;Y|X \in \mathcal{X}_2)$, αντίστοιχα. Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε την παράμετρο α που μεγιστοποιεί την $I(X;Y)$. Εάν C_1 είναι η χωρητικότητα του καναλιού
$$P_1 = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix}$$
και C_2 η χωρητικότητα του καναλιού
$$P_2 = \begin{bmatrix} 1-\delta & \delta \\ \delta & 1-\delta \end{bmatrix},$$
εξηγήστε γιατί
$$C \triangleq \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{\alpha} \{H(\alpha) + \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2\}.$$

(ε) Δείξτε ότι η χωρητικότητα, C, του καναλιού με πίνακα μετάβασης P ισούται με $C = \log\left(2^{C_1} + 2^{C_2}\right)$.

37. ***Κανάλι – Cover & Thomas 7.12 (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

Θεωρούμε το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με πίνακα μετάβασης
$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα του καναλιού.

(β) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Εξηγήστε διαισθητικά γιατί μία από τις εισόδους του καναλιού (ποια;) δε χρησιμοποιείται όταν μεταδίδουμε με ρυθμό αυθαίρετα κοντά στη χωρητικότητα.

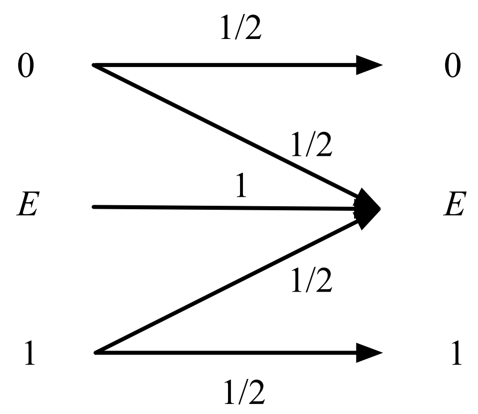
Υπόδειξη: Εκμεταλλευτείτε κάποια συμμετρία στο κανάλι για να απλοποιήσετε τις πράξεις.

(γ) Επαληθεύστε ότι η χωρητικότητα του καναλιού είναι η ίδια με αυτή του καναλιού διαγραφής (Binary Erasure Channel).

38. **Χρήση διαγραφής από τον πομπό (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2010)**

Όπως είδαμε στο μάθημα, η χωρητικότητα του *δυαδικού* καναλιού διαγραφής (binary erasure channel - BEC) ισούται με $C = 1 - \alpha$ και επιτυγχάνεται με χρήση ομοιόμορφης κατανομής στον πομπό (Bern(1/2)). Στην άσκηση αυτή θα εξετάσουμε εάν έχει νόημα, εφόσον αυτό είναι εφικτό, ο πομπός να στέλνει όχι μόνο δύο σύμβολα (π.χ. 0 και 1), αλλά και ένα τρίτο σύμβολο διαγραφής. Στην άσκηση αυτή δε θα μας απασχολήσει σε τι αντιστοιχεί ένα σύμβολο διαγραφής στην πράξη και απλώς θα το δούμε ως ένα τρίτο σύμβολο εισόδου που έχουμε στη διάθεσή μας για τη μετάδοση.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε το διακριτό κανάλι *χωρίς μνήμη* του Σχήματος 11. Τα σύμβολα 0 και 1 διαγράφονται με πιθανότητα 1/2, ενώ, αν στείλουμε διαγραφή, θεωρούμε ότι φτάνει πάντοτε στο δέκτη ως διαγραφή.



Σχήμα 11: Τροποποιημένο Κανάλι Διαγραφής με 3 εισόδους.

(α) Είναι το κανάλι συμμετρικό; Είναι το κανάλι ασθενώς συμμετρικό;

(β) Δώστε ένα άνω φράγμα, C_{UB}, και ένα κάτω φράγμα, C_{LB}, για τη χωρητικότητα του καναλιού. Το κάτω φράγμα που ζητείται πρέπει να είναι *αυστηρώς* μεγαλύτερο του 0.5: $C_{\mathrm{LB}} > 0.5$ bits. Με βάση τα όρια που βρήκατε, αν μας δίνεται η δυνατότητα, κερδίζουμε σε χωρητικότητα αν χρησιμοποιήσουμε και το 3ο σύμβολο διαγραφής στον πομπό;

Υπόδειξη: Αν δυσκολεύεστε να βρείτε $C_{\mathrm{LB}} > 0.5$ bits, πιθανώς να σας βοηθήσει η απάντησή σας στο επόμενο Ερώτημα (γ).

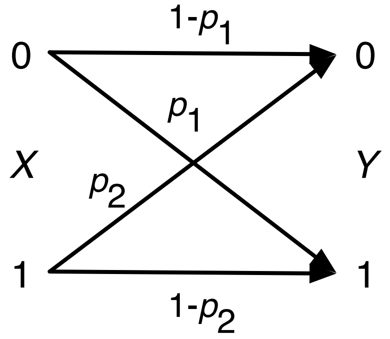
Σε περίπτωση που σας χρειαστεί, δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και ότι $H(1/3) \triangleq -\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\log\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.9183$ bits.

(γ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα, C, του καναλιού του Σχήματος 11, καθώς και την κατανομή πομπού, $p^*(x)$, με την οποία επιτυγχάνεται.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συμμετρία του διαγράμματος μετάβασης του καναλιού για να απλοποιήσετε τις πράξεις (Προσοχή: Δε σημαίνει, απαραίτητα, ότι το κανάλι είναι συμμετρικό ή ασθενώς συμμετρικό).

39. **Μη συμμετρικό Δυαδικό Κανάλι (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2010)**

Θεωρούμε το *μη συμμετρικό* δυαδικό κανάλι του Σχήματος 12.



Σχήμα 12: Το μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι.

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί στην άσκηση, δίνεται ότι η χωρητικότητα του καναλιού Z ισούται με $C \leq \log\left(1 + (1-f)f^{f/(1-f)}\right)$, όπου f η πιθανότητα μετάβασης από το 1 στο 0.

(α) Δείξτε ότι το μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι μπορει να γραφτεί ως διαδοχή ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p και ενός καναλιού Z με πιθανότητα μετάβασης από το 1 στο 0 ίση με f. Δώστε εκφράσεις για τις παραμέτρους p και f συναρτήσει των p_1 και p_2.

(β) Δείξτε ότι για *οποιοδήποτε* κανάλι $\mathcal{C}$ που μπορεί να γραφτεί ως διαδοχή δύο καναλιών $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, $C \leq \min\{C_1, C_2\}$, όπου C, C_1 και C_2 είναι οι χωρητικότητες των καναλιών $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, αντίστοιχα.

Επίσης, δώστε μια ικανή συνθήκη για να ισχύει η ισότητα, δηλαδή $C = \min\{C_1, C_2\}$.

(γ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα Ερωτήματα (α) και (β) βρείτε ένα *άνω* φράγμα για τη χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού. Το άνω φράγμα πρέπει να είναι συνάρτηση των p_1 και p_2.

(δ) Βρείτε ένα *κάτω* φράγμα για τη χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού (χωρίς να χρησιμοποιήσετε, κατ' ανάγκη, τα προηγούμενα ερωτήματα). Δε χρειάζεται να δώσετε αναλυτικές εκφράσεις. Αρκεί να εξηγήσετε πώς μπορεί να υπολογιστεί το κάτω φράγμα.

40. **Δυαδικό συμμετρικό κανάλι με μεταβαλλόμενη πιθανότητα αναστροφής ψηφίου (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2011)**

Θεωρούμε ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου $p \leq \frac{1}{2}$. Ωστόσο, η πιθανότητα αναστροφής ψηφίου μεταβάλλεται με το χρόνο, n.

Συγκεκριμένα, η p_n μπορεί να πάρει δύο πιθανές τιμές, p_A και p_B. Θεωρούμε, επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $0 \leq p_A \leq p_B \leq \frac{1}{2}$. Η διαδικασία p_n είναι ανεξάρτητη και ομοίως κατανεμημένη (i.i.d.), δηλαδή η τιμή της τη χρονική στιγμή n δεν εξαρτάται από προηγούμενες χρονικές στιγμές και δεν επηρεάζει επόμενες χρονικές στιγμές.

Έστω ότι $\Pr\{p_n = p_A\} = \alpha = 1 - \Pr\{p_n = p_B\}$.

(α) Εάν γνωρίζουμε την τιμή της p_n τη χρονική στιγμή n, με τι ισούται η χωρητικότητα, C, του καναλιού τη χρονική στιγμή n; Θα ονομάσουμε την τιμή αυτή $C(S_n)$ όπου $S_n = A$ ή B, ανάλογα με την τιμή της p_n (p_A ή p_B, αντίστοιχα).

Με ποια κατανομή εισόδου επιτυγχάνεται η χωρητικότητα;

(β) Εάν χρησιμοποιήσουμε το κανάλι πάρα πολλές φορές ($n \to \infty$) και κάθε φορά γνωρίζουμε την τιμή της p_n στον πομπό (η οποία, όμως, εξακολουθεί να μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο) ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε; Δηλαδή, με τι ισούται η ποσότητα

$$C_{perfect} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C(S_n);$$

(γ) Έστω, τώρα, ότι δε γνωρίζουμε την τιμή της p_n στον πομπό. Δείξτε ότι μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κανάλι ως ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με παράμετρο $\bar{p}$. Δώστε μια έκφραση για την $\bar{p}$ συναρτήσει των α, p_A και p_B, καθώς και για τη χωρητικότητα, $C_{no\ state\ info}$, εάν υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε το κανάλι n φορές με $n \to \infty$.

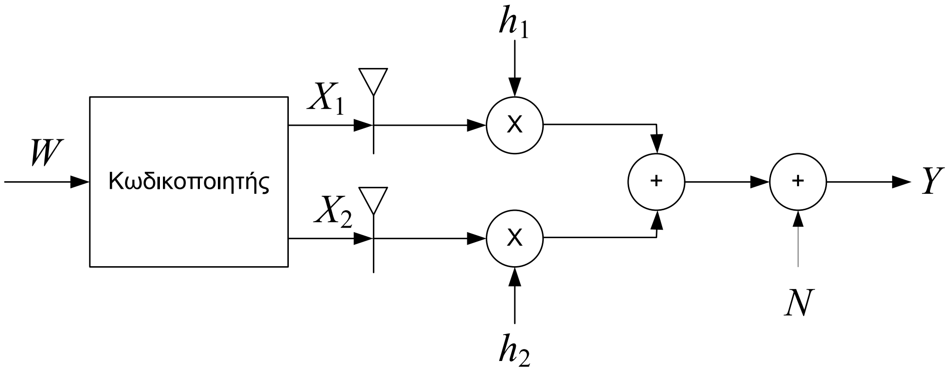
(δ) Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός, $R_{conservative}$, με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε αν είμαστε συντηρητικοί και υποθέσουμε ότι η p_n παίρνει πάντοτε τη (χειρότερη) τιμή p_B; Τι κατανομή εισόδου πρέπει να χρησιμοποιήσουμε; Συγκρίνετε με τη $C_{no\ state\ info}$ του προηγούμενου ερωτήματος. Υπάρχει περίπτωση να ισχύει $R_{conservative} = C_{no\ state\ info}$;

(ε) Αποδείξτε ότι $C_{no\ state\ info} \leq C_{perfect}$. Επομένως, γνώση της κατάστασης του καναλιού στον πομπό αυξάνει τη χωρητικότητα. Εάν $\alpha > 0$, για ποιες τιμές των p_A και p_B ισχύει η ισότητα;

41. **Μία ή δύο κεραίες; (Τελική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π. – Ιούνιος 2008)**

Στο σύστημα του Σχήματος 13 ο πομπός χρησιμοποιεί 2 κεραίες προκειμένου να στείλει μηνύματα W στο δέκτη.

Για κάθε χρήση καναλιού, k, το σήμα στο δέκτη ισούται με $Y_k = h_1 X_{1,k} + h_2 X_{2,k} + N_k$, όπου h_1 και h_2 (πραγματικές) σταθερές γνωστές τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη και N i.i.d. γκαουσιανός θόρυβος $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες από το θόρυβο N, αλλά όχι απαραίτητα ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης, υπάρχει περιορισμός ισχύος στον πομπό: Το άθροισμα των ισχύων των σημάτων που εκπέμπονται από τις δύο κεραίες δεν πρέπει να υπερβαίνει μια τιμή P. Πιο συγκεκριμένα, $\mathbb{E}[X_1^2] + \mathbb{E}[X_2^2] \leq P$.



Σχήμα 13: Μετάδοση με χρήση 2 κεραιών και κοινό κωδικοποιητή.

Θέλουμε να βρούμε ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού και πώς πρέπει να σχεδιαστεί ο κωδικοποιητής προκειμένου να επιτύχουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα.

(α) Θεωρήστε το κανάλι με είσοδο (X_1, X_2) και έξοδο Y. Εξηγήστε γιατί το κανάλι δεν έχει μνήμη και δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση μετάβασης $f(y|x_1, x_2)$. Υπενθυμίζεται ότι οι παράμετροι h_1 και h_2 θεωρούνται γνωστές και σταθερές.

(β) Δώστε μια έκφραση για την αμοιβαία πληροφορία $I(Y; X_1, X_2)$. Ποια πρέπει να είναι η κατανομή της Y ώστε να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$; Αναφέρετε απλώς την κατανομή, δε χρειάζονται περισσότερες λεπτομέρειες (προς το παρόν).

(γ) Θεωρούμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$. Δείξτε ότι η $\mathbb{E}[Y^2]$ μεγιστοποιείται όταν $X_1 = cX_2$, όπου c σταθερά. Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: $(\mathbb{E}[X_1X_2])^2 \leq \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[X_2^2]$ με $=$ όταν $X_1 = cX_2$ (γενικά $X_1 = cX_2 + d$; Εδώ $d = 0$ λόγω της υπόθεσης $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$).

(δ) Δώστε μια έκφραση για την $\mathbb{E}[Y^2]$ όταν $X_1 = cX_2$ (συναρτήσει των c, P, h_1 και h_2). (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον περιορισμό ισχύος στον πομπό). Τι κατανομή πρέπει να ακολουθούν οι X_1 και X_2 για να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$;

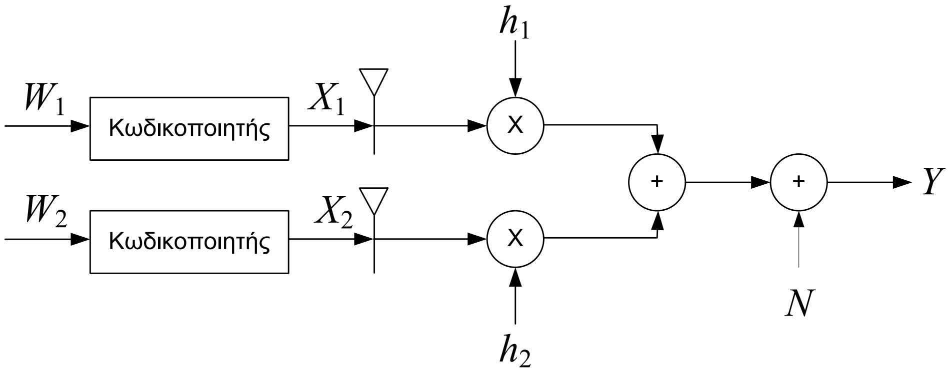
(ε) Βρείτε την τιμή της c η οποία μεγιστοποιεί την $\mathbb{E}[Y^2]$. Βεβαιωθείτε ότι λαμβάνετε υπόψη σας τον περιορισμό ισχύος $\mathbb{E}[X_1^2]+\mathbb{E}[X_2^2] \leq P$. Ένας τρόπος είναι να βρείτε το c που μεγιστοποιεί την έκφραση για την $\mathbb{E}[Y^2]$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Εναλλακτικά, μπορείτε να θεωρήσετε ότι $X_1 = \alpha X$ και $X_2 = \beta X$, όπου $\mathbb{E}[X^2] = 1$ και $\alpha^2 + \beta^2 = P$ και να βρείτε τη σχέση μεταξύ α και β.

(στ) Με βάση τα παραπάνω, καθώς και τη βέλτιστη τιμή της c που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού. Συγκρίνετε με την περίπτωση που χρησιμοποιείται μόνο μια κεραία για τη μετάδοση (χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορείτε να θεωρήσετε ότι $h_1 \geq h_2$).

(ζ) Περιγράψτε πολύ συνοπτικά πώς θα κατασκευάζατε το βιβλίο κωδίκων σε αυτό το κανάλι και τι μεταδίδεται από κάθε κεραία εάν ακολουθήσουμε τη μέθοδο (του

Shannon) που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του θεωρήματος κωδικοποίησης για το γκαουσιανό κανάλι.

(η) Υποθέστε, τώρα, ότι η κάθε κεραία ανήκει σε διαφορετικό πομπό (χρήστη) και ότι οι δύο πομποί δεν επικοινωνούν μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 14. Ωστόσο, και οι δύο πομποί γνωρίζουν τα h_1 και h_2. Υποθέστε, επίσης, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $h_1 \geq h_2$. Οι πομποί πρέπει να μοιραστούν μεταξύ τους συνολική ισχύ P. Δηλαδή, παρόλο που, σε αντίθεση με πριν, οι κεραίες συνδέονται σε διαφορετικούς πομπούς, πρέπει $\mathbb{E}[X_1^2]+\mathbb{E}[X_2^2] \leq P$. Τέλος, θεωρούμε ότι, με χρήση καναλιού ελέγχου, υποδεικνύεται σε κάθε πομπό με πόση ισχύ πρέπει να εκπέμψει. Εάν R_1 και R_2 είναι οι ρυθμοί μετάδοσης από την κεραία 1 και 2, αντίστοιχα, πώς πρέπει να μοιραστεί η ισχύς P μεταξύ των 2 πομπών και ποιο είναι το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης $R_1 + R_2$ που μπορούμε να επιτύχουμε; Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα του Ερωτήματος (στ) και σχολιάστε.



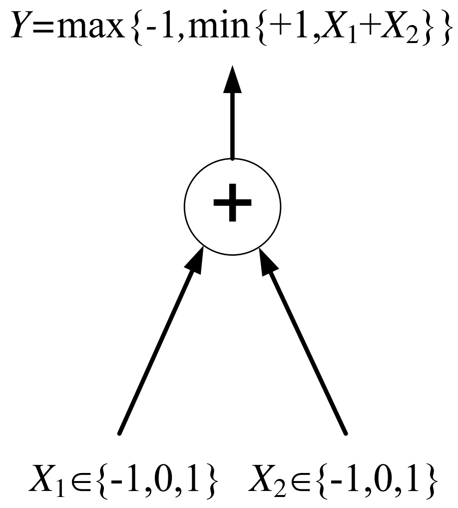
Σχήμα 14: Μετάδοση με χρήση 2 κεραιών και ανεξάρτητο κωδικοποιητή σε κάθε κεραία.

42. **Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο (Επαναληπτική εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

Στο κανάλι του Σχήματος 15, δύο χρήστες (1 και 2) επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα δέκτη. Ο δέκτης λαμβάνει το άθροισμα των σημάτων X_1 και X_2 του χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα. Ωστόσο, όταν η *απόλυτη* τιμή του αθροίσματος είναι μεγαλύτερη από 1, ο δέκτης ψαλιδίζει το σήμα. Δηλαδή, $Y = \max\{-1, \min\{1, X_1 + X_2\}\}$. Και οι δύο χρήστες χρησιμοποιούν το ίδιο αλφάβητο $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \{-1, 0, 1\}$. Οι χρήστες δε συνεννοούνται μεταξύ τους πριν μεταδώσουν. Ωστόσο, θεωρούμε ότι γνωρίζουν την κατανομή $p_{X_i}(x_i)$ με την οποία πρέπει να μεταδώσουν (για παράδειγμα, μπορεί να τους την έχει γνωστοποιήσει ο δέκτης πριν αρχίσει η μετάδοση).

Δίνεται, επίσης, ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και $\log_2 5 \approx 2.3219$.

(α) Βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ρυθμός μετάδοσης R_1 του χρήστη 1. Επαναλάβετε για το ρυθμό μετάδοσης R_2 του χρήστη 2. Βρείτε, επίσης, την κατανομή $p_{X_i}(x_i)$ που επιτυγχάνει το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, R_i, σε κάθε περίπτωση.



Σχήμα 15: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο και δίπλευρο ψαλιδισμό.

(β) Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή του *αθροίσματος* R_1+R_2 των ρυθμών με τους οποίους μπορούν να μεταδώσουν *ταυτόχρονα* οι δύο χρήστες (sum capacity του καναλιού). Για ποια κατανομή $p_{X_1}(x_1)\cdot p_{X_2}(x_2)$ μεγιστοποιείται το άθροισμα; Σχεδιάστε την περιοχή χωρητικότητας (capacity region), $\mathcal{C}$, του καναλιού.

(γ) Περιγράψτε έναν τρόπο με τον οποίο μπορείτε να επιτύχετε μετάδοση με *οποιοδήποτε* ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) που ανήκει στην περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}$.

(δ) Έστω, τώρα, ότι ο δέκτης ψαλιδίζει το άθροισμα μόνο στο $+1$, δηλαδή $Y = \min\{1, X_1+X_2\}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 16.

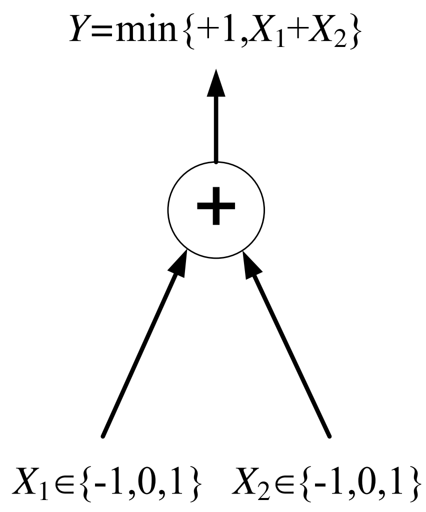
Τι περιμένετε για τη νέα περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}'$, σε σχέση με την προηγούμενη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(ε) Ποιό είναι το άνω φράγμα για το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης (sum capacity) $C_{\text{sum}} = R_1 + R_2$;

(στ) Σχεδιάστε την περιοχή ρυθμών μετάδοσης, $\mathcal{R}$, που επιτυγχάνεται με χρήση των κατανομών που βρήκατε στα ερωτήματα (α) και (β). Συγκρίνετε με την περιοχή χωρητικότητας του Ερωτήματος (β). Μπορείτε να πείτε κάτι περισσότερο σε σχέση με αυτά που συμπεράνατε στο Ερώτημα (δ);

(*ζ) Δείξτε ότι ένα *κάτω* φράγμα για τη sum capacity είναι το 1.9772. Με βάση αυτό το φράγμα και την περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης του Ερωτήματος (στ) σχεδιάστε μια περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης που είναι πιο κοντά στην περιοχή χωρητικότητας $\mathcal{C}'$ από αυτήν του Ερωτήματος (στ).

Υπόδειξη: Βρείτε μια κατανομή $p_{X_1}(x_1)\cdot p_{X_2}(x_2)$ για την οποία $R_1+R_2 = 1.9772$.



Σχήμα 16: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο και μονόπλευρο ψαλιδισμό.

43. **Κανάλι πολλαπλής πρόσβασης (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2010)**

Θεωρούμε το κανάλι πολλαπλής πρόσβασης 2 χρηστών, η έξοδος του οποίου δίνεται από τη σχέση

$$Y = |X_1| \cdot X_2,$$

όπου X_i είναι τα σύμβολα του χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα. $|X|$ είναι η απόλυτη τιμή της X.

Θεωρούμε, επίσης, ότι $X_1 \in \{-1, 0, 1\}$ και $X_2 \in \{-1, 0, 1\}$.

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.

(α) Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης, $R_{1,\max}$, που μπορεί να επιτύχει ο χρήστης 1 αν δε μας ενδιαφέρει ο ρυθμός μετάδοσης του χρήστη 2;

Βρείτε μια από κοινού κατανομή $p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ με την οποία επιτυγχάνεται μετάδοση του χρήστη 1 με το μέγιστο ρυθμό.

(β) Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης, $R_{2,\max}$, που μπορεί να επιτύχει ο χρήστης 2 αν δε μας ενδιαφέρει ο ρυθμός μετάδοσης του χρήστη 1;

Βρείτε μια από κοινού κατανομή $p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ με την οποία επιτυγχάνεται μετάδοση του χρήστη 2 με το μέγιστο ρυθμό.

(γ) Βρείτε το μέγιστο ρυθμό με τον οποίο μπορεί να μεταδώσει ο χρήστης 2 όταν ο χρήστης 1 μεταδίδει με το μέγιστο ρυθμό, $R_{1,\max}$, του Ερωτήματος (α). Ποια είναι η από κοινού κατανομή, $p_{X_1}p_{X_2}$ που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

Υπόδειξη: Βρείτε τη μορφή που πρέπει να έχει η p_{X_2} ώστε ο χρήστης 1 να μεταδίδει με $R_{1,\max}$ και προσπαθήστε να μεγιστοποιήσετε τον R_2.

(δ) Βρείτε το μέγιστο ρυθμό με τον οποίο μπορεί να μεταδώσει ο χρήστης 1 όταν ο χρήστης 2 μεταδίδει με το μέγιστο ρυθμό, $R_{2,\max}$, του Ερωτήματος (β). Ποια είναι η από κοινού κατανομή, $p_{X_1}p_{X_2}$ που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

(ε) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του αθροίσματος $R_1 + R_2$ των ρυθμών μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε; Βρείτε *όλες* τις κατανομές $p_{X_1}p_{X_2}$ που μεγιστοποιούν το άθροισμα R_1+R_2 (το οποίο ονομάζεται αθροιστική χωρητικότητα – sum capacity).

(στ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα Ερωτήματα (γ)–(ε) σχεδιάστε μια περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης για το κανάλι πολλαπλής πρόσβασης του προβλήματος. Διευκρινίστε, επίσης, σε ποια σημεία το όριο της περιοχής συμπίπτει με το όριο της περιοχής χωρητικότητας του καναλιού.