ΕΕ728 (22Α004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας 2η Σειρά Ασκήσεων (Κανάλια)

Παράδοση: Έως 3/5/2011 5 μ.μ. – Στο γραφείο μου

Διευκρίνιση: Η επίλυση των ασκήσεων είναι προαιρετική. Σκοπός τους είναι να λειτουργήσουν συμπληρωματικά με τις διαλέξεις.

Επιτρέπεται η συνεργασία σε μικρές ομάδες, αλλά όχι η αντιγραφή.

Εάν έχετε κάποιες από τις ασκήσεις από φυλλάδια του μαθήματος "Θεωρία Πληροφορίας" και έχετε ήδη δει τις λύσεις μπορείτε να το αναφέρτε και να λύσετε τις υπόλοιπες ασκήσεις.

1. ***Τα κανάλια με μνήμη έχουν μεγαλύτερη χωρητικότητα – Cover & Thomas 7.3 (τροποποιημένη)**

   Θεωρήστε το κανάλι $Y_i = X_i \oplus Z_i$, όπου $\oplus$ πρόσθεση modulo-2 (XOR). Οι μεταβλητές X_i και Y_i είναι δυαδικές, αλλά όχι, κατ' ανάγκη, ομοίως κατανεμημένες. Έστω, επίσης, ότι η Z_i έχει σταθερή μάζα πυκνότητας πιθανότητας $\Pr\{Z_i = 1\} = p = 1 - \Pr\{Z_i = 0\}$. Ωστόσο, οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ *δεν* είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες.

   (α) Δώστε ένα σχεδιάγραμμα του καναλιού. Μοιάζει με κάποιο γνωστό σας κανάλι; Σε τι διαφέρει (αν διαφέρει);

   (β) Εάν οι Z_i είναι ανεξάρτητες, αν, δηλαδή, το κανάλι δεν έχει μνήμη, ποια είναι η χωρητικότητά του και με ποια κατανομή $p(x)$ επιτυγχάνεται; Ονομάστε αυτή τη χωρητικότητα C.

   (γ) Επιστρέφοντας στη γένική περίπτωση όπου οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ δεν είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες, δείξτε ότι, εάν η είσοδος είναι ανεξάρτητη και ομοίως κατανεμημένη $Bern(1/2)$,
   $$I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \geq nC,$$
   όπου C η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς μνήμη του Ερωτήματος (β).

   (δ) Με βάση το Ερώτημα (γ), συμπεράνετε ότι, για τη χωρητικότητα του καναλιού με μνήμη $C' \triangleq \frac{1}{n} \max_{p(x)} I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, ισχύει $C' \geq C$.

   (ε) Δώστε μια διαισθητική δικαιολόγηση για το αποτέλεσμα που αποδείξατε στο (δ), ότι, δηλαδή, η χωρητικότητα των καναλιών χωρίς μνήμη δεν μπορεί να υπερβεί τη χωρητικότητα των αντίστοιχων καναλιών με μνήμη.

2. **Υποβέλτιστοι κώδικες – Cover & Thomas 7.9**

   Θεωρήστε το κανάλι Z με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

   $$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad x, y \in \{0, 1\}.$$

   Έστω ότι κατασκευάζουμε τυχαίο κώδικα $\left(2^{nR}, n\right)$ με ρίψεις *αμερόληπτου* κέρματος. Με τον τρόπο αυτό δεν επιτυγχάνουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα (γιατί;). Βρείτε το μέγιστο εφικτό ρυθμό μετάδοσης, R, ώστε η *μέση* τιμή της πιθανότητας σφάλματος $P_e^{(n)}$ επί όλων των κωδίκων που κατασκευάζονται τυχαία με αμερόληπτες ρίψεις να τείνει στο 0 καθώς το μήκος, n, του κώδικα τείνει στο άπειρο.

3. **Κανάλι διακριτών εισόδων, συνεχών εξόδων – Cover & Thomas 9.15**

   Έστω $\Pr\{X = 1\} = p$, $\Pr\{X = 0\} = 1-p$ και $Y = X+Z$, όπου η Z είναι κατανεμημένη *ομοιόμορφα* στο διάστημα $[0, a]$, $a > 1$. Επίσης, η Z είναι ανεξάρτητη της X.

   (α) Υπολογίστε την $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$.

   (β) Υπολογίστε, τώρα, την $I(X; Y)$ με διαφορετικό τρόπο, με χρήση της $I(X; Y) = h(Y) - h(Y|X)$.

   (γ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού μεγιστοποιώντας ως προς p.

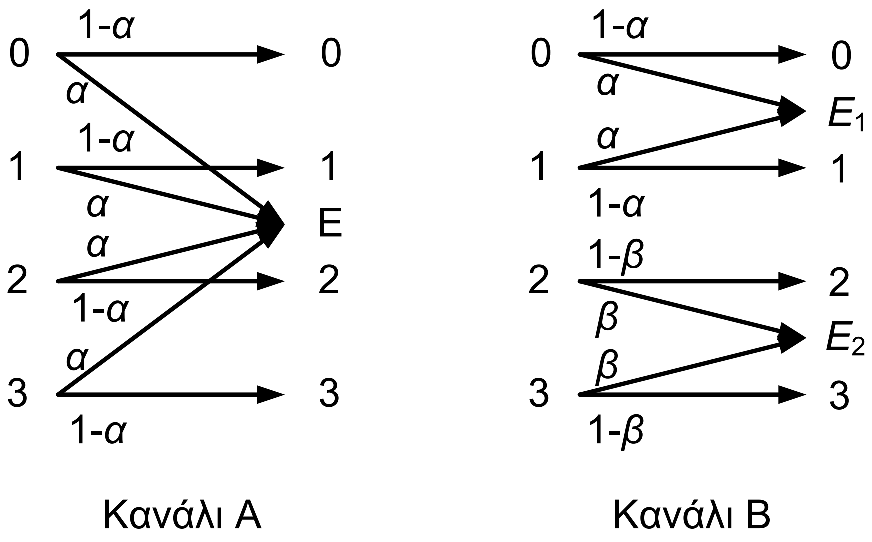
4. **Τετραδικά Κανάλια διαγραφής (Προχωρημένα Θέματα Θ.Π., Τελική Εξέταση Ιουνίου 2008)**

   Θεωρήστε τα κανάλια διαγραφής <u>χωρίς μνήμη</u> του Σχήματος 1. Στο κανάλι A στέλνουμε ένα από 4 πιθανά σύμβολα. Ο δέκτης γνωρίζει πότε η μετάδοση έχει γίνει σωστά και πότε έχει προκύψει διαγραφή. Στο κανάλι B, όπως και στο κανάλι A, ο πομπός επιλέγει κάθε φορά να μεταδώσει ένα από 4 σύμβολα. Εάν συμβεί διαγραφή ο δέκτης γνωρίζει όχι μόνο ότι συνέβη διαγραφή, αλλά, επιπλέον, το υποσύνολο στο οποίο ανήκει το σύμβολο που μεταδόθηκε από τον πομπό ($\{0, 1\}$ ή $\{2, 3\}$).

   (α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού A, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.

   (β) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού B όταν $\alpha = \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε.

   (γ) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού B όταν $\alpha \neq \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε. Ποια είναι η χωρητικότητα στην ειδική περίπτωση όπου $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ και με ποια κατανομή εισόδου επιτυγχάνεται;



Σχήμα 1: Τετραδικά Κανάλια Διαγραφής

5. **Το δυαδικό συμμετρικό κανάλι διαγραφής (BSEC) (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π., Τελική Εξέταση, Ιούνιος 2010)**

   Σε αυτό το πρόβλημα θα θεωρήσουμε ένα πιο ρεαλιστικό *δυαδικό* κανάλι διαγραφής, το BSEC. Στο BSEC, επιπλέον των διαγραφών, ενδέχεται να έχουμε και αναστροφή ψηφίου.

   Συγκεκριμένα, ο πίνακας μετάβασης του BSEC είναι ο

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\alpha & \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \alpha & 1-\epsilon-\alpha \end{bmatrix}.$$

   $\mathcal{X} = \{0,1\}$ και $\mathcal{Y} = \{0, E, 1\}$.

   (α) Σχεδιάστε το διάγραμμα μεταβάσεων του καναλιού. Είναι το κανάλι συμμετρικό; Είναι ασθενώς συμμετρικό;

   (β) Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC, καθώς και την κατανομή εισόδου, p^*, με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα. Συγκρίνετε με τη χωρητικότητα του BEC ($\epsilon = 0$).

   Υπόδειξη: Ένας τρόπος για να αποφύγετε τις πολλές πράξεις είναι να χρησιμοποιήσετε την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας (2 φορές).

   Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του BSEC με έναν εναλλακτικό τρόπο.

   (γ) Δείξτε ότι το BSEC ισοδυναμεί με ένα BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου $\delta = \frac{\epsilon}{1-\alpha}$ το οποίο ακολουθείται από ένα BEC με πιθανότητα διαγραφής α.

(δ) Εάν X είναι η είσοδος στο BSEC, Y η έξοδός του και U η (ενδιάμεση) έξοδος του BSC, χρησιμοποιήστε τα βήματα της απόδειξης της ανισότητας επεξεργασίας δεδομένων για να εκφράσετε την $I(X;Y)$ συναρτήσει μόνο της $I(X;U)$ και της παραμέτρου α.

(ε) Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC μεγιστοποιώντας την $I(X;U)$ του BSC ως προς την κατανομή της X.

6. **Waterfilling με περιορισμό μέγιστης ισχύος (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π., Τελική Εξέταση, Ιούνιος 2010)**

Σε ορισμένες περιπτώσεις, ενδέχεται να μη θέλουμε να υπερβούμε μια συγκεκριμένη τιμή ισχύος στον πομπό, ακόμα και εάν η ισχύς είναι διαθέσιμη (για παράδειγμα, για λόγους λειτουργίας του ενισχυτή ή για να μην προκαλέσουμε παρεμβολές σε γειτονικές συνδέσεις). Στο πρόβλημα αυτό θα εξετάσουμε πώς πρέπει να μεταβάλουμε τη λύση waterfilling για να ικανοποιήσουμε και ένα περιορισμό μέγιστης ισχύος εκπομπής, $P_{\max,k}$, για κάθε χρήστη, k.

Θεωρούμε K παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια και *συνολική* διαθέσιμη ισχύ P. Η διασπορά του θορύβου σε κάθε κανάλι ισούται με N_k. Η διαθέσιμη ισχύς μπορεί να κατανεμηθεί στα κανάλια όπως επιθυμούμε, αρκεί, σε κάθε κανάλι, η ισχύς να μην υπερβαίνει μια μέγιστη τιμή $P_{\max,k}$. Διευκρινίζεται ότι, στη γενική περίπτωση, η $P_{\max,k}$ δεν είναι η ίδια για όλα τα κανάλια.

(α) Θεωρούμε, κατ' αρχάς, την περίπτωση 2 χρηστών, δηλαδή $K = 2$. Επίσης, *μόνο* σε αυτό το ερώτημα, θεωρούμε ότι *δεν* υπάρχει περιορισμός ισχύος, ή, ισοδύναμα, ότι $P_{\max,k} = P$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $N_2 \geq N_1$.

Δώστε μια έκφραση σε κλειστή μορφή για τη χωρητικότητα του καναλιού που αποτελείται από τα 2 παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια.

Υπόδειξη: Πρέπει να διακρίνετε περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της P.

(β) Θεωρήστε, τώρα, ότι ενδέχεται κάποιες από τις $P_{\max,k}$ (ή όλες) να είναι μικρότερες από P. Για το κανάλι 2 χρηστών ($K = 2$) βρείτε ποιες συνθήκες πρέπει να ισχύουν για τις $P_{\max,1}$ και $P_{\max,2}$ συναρτήσει των P, N_1 και N_2, ώστε οι περιορισμοί να μην επηρεάζουν τη χωρητικότητα, δηλαδή η χωρητικότητα για *δεδομένες* τιμές των P, N_1 και N_2 να ισούται με την τιμή που βρήκατε στο Ερώτημα (α).

Μπορείτε και πάλι να θεωρήσετε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $N_2 \geq N_1$.

(γ) Στη συνέχεια, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις, θεωρούμε ότι $P_{\max,1} = P_{\max,2} = P_{\max}$. Επίσης, θεωρούμε ότι $P_{\max,1} + P_{\max,2} = 2P_{\max} \geq P$, δηλαδή ότι όλη η συνολική ισχύς κατανέμεται, τελικά στα κανάλια.

Βρείτε τη χωρητικότητα των 2 παράλληλων καναλιών για οποιαδήποτε τιμή του $P_{\max}$ (δηλαδή, ακόμα και για τιμές που ενδέχεται να αλλάζουν τη βέλτιστη λύση του Ερωτήματος (α)).

(δ) Στη συνέχεια, θεωρούμε τη γενική περίπτωση K χρηστών. Υποθέστε ότι, αρχικά, εκτελούμε τον αλγόριθμο waterfilling χωρίς περιορισμούς. Μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου παρατηρούμε ότι σε κάποια κανάλια έχουμε υπερβεί την $P_{\max,k}$. Υποθέστε ότι, μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling έχει κατανεμηθεί μη μηδενική ισχύς σε όλα τα K κανάλια (δηλαδή $P_k > 0$ για όλα τα k). Υποθέστε, επίσης, ότι στα κανάλια όπου δεν έχουμε υπερβεί την $P_{\max,k}$ δεν υπάρχει περιορισμός ισχύος. Πώς πρέπει να κατανείμουμε την πλεονάζουσα ισχύ $\sum_{k\in\mathcal{O}}(P_k - P_{\max,k})$ στα υπόλοιπα κανάλια ώστε να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης; ($\mathcal{O}$ είναι το σύνολο των καναλιών όπου ο αλγόριθμος waterfilling υπερέβη τις $P_{\max,k}$ και P_k οι λύσεις του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς).

(ε) Προτείνετε έναν τροποποιημένο αλγόριθμο waterfilling για την περίπτωση που έχουμε περιορισμούς ισχύος, $P_{\max,k}$, σε κάθε κανάλι. Σε αυτό το ερώτημα θεωρήστε τη γενική περίπτωση, δηλαδή ότι υπάρχουν περιορισμοί σε όλα τα κανάλια. Επίσης, σε αντίθεση με το προηγούμενο ερώτημα, υπάρχει περίπτωση μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς ισχύος κάποια κανάλια να μη χρησιμοποιούνται (δηλαδή να έχουμε $P_k = 0$).