22A004 - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
Επαναληπτική Εξέταση Σεπτεμβρίου

• Διάρκεια διαγωνίσματος: 3 ώρες. 4 ασκήσεις (το φυλλάδιο έχει 6 σελίδες – ελέγξτε το!).

• Βαθμός διαγωνίσματος = 100 μονάδες/10. Σύνολο μονάδων: 100.

• Οι απαντήσεις σας σε κάθε ερώτημα θα πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες. Επιτρέπεται η χρήση (χωρίς απόδειξη) οποιουδήποτε θεωρήματος και οποιασδήποτε ιδιότητας έχει αναφερθεί στο μάθημα ή βρίσκεται στο βιβλίο των Cover & Thomas ή στο βιβλίο του Gallager ή/και στις σημειώσεις ή/και στα φυλλάδια αρκεί να το διευκρινίσετε.

• Αποτέλεσμα για το οποίο δεν υπάρχει επαρκής αιτιολόγηση στο γραπτό δεν προσμετράται στη βαθμολόγηση. Στην περίπτωση αριθμητικού αποτελέσματος που υπολογίστηκε με αριθμομηχανή πρέπει να δώσετε τον τύπο που χρησιμοποιήσατε ή να επισυνάψετε το πρόχειρο στο οποίο κάνατε τις πράξεις.

• Βεβαιωθείτε ότι έχετε γράψει το όνομά σας σε όλα τα φύλλα που έχετε χρησιμοποιήσει, συμπεριλαμβανομένων των προχείρων.

• Απαγορεύεται το κάπνισμα μέσα στην αίθουσα κατά τη διάρκεια του διαγωνίσματος. Θα σας επιτραπεί, όμως, να βγείτε έξω για να καπνίσετε. Επίσης, απαγορεύεται επικοινωνία μεταξύ διαγωνιζομένων χωρίς άδεια επιτηρητή. Τέλος, απαγορεύεται η χρήση κινητών τηλεφώνων ή άλλων μέσων επικοινωνίας.

• Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα. Οι λύσεις θα είναι διαθέσιμες σύντομα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Βάρη θεμάτων	
1ο θέμα	25
2ο θέμα	20
3ο θέμα	25
4ο θέμα	30

Η ΣΕΛΙΔΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΚΕΝΗ ΕΣΚΕΜΜΕΝΑ

1. **Μεταβολή εντροπίας (25 μονάδες)**

   Θεωρήστε μια κατανομή $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ με $N \geq 2$ ενδεχόμενα, όλα *μη μηδενικής πιθανότητας*, δηλαδή $p_n > 0\ \forall n$. Θα δείξουμε ότι, για οποιαδήποτε κατανομή, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο, έστω K, το οποίο αν αφαιρέσουμε θα ελαττώσουμε την εντροπία. Δηλαδή, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα p_k έτσι ώστε, αν
   $\mathbf{p}' = \left(\frac{p_1}{1-p_K}, \frac{p_2}{1-p_K}, \ldots, \frac{p_{K-1}}{1-p_K}, \frac{p_{K+1}}{1-p_K}, \ldots, \frac{p_N}{1-p_K}\right)$, $H(\mathbf{p}') < H(\mathbf{p})$.

   (α) **(8 μονάδες)**

   Δείξτε ότι δεν μπορούμε πάντοτε να ελαττώσουμε την εντροπία αν επιλέξουμε το ενδεχόμενο K τυχαία. Δηλαδή, υπάρχουν κατανομές για τις οποίες υπάρχει p_K τέτοιο ώστε $H(\mathbf{p}') > H(\mathbf{p})$.

   (β) **(3 μονάδες)**

   Στη συνέχεια θα αποδείξετε ένα λήμμα που θα σας βοηθήσει να αποδείξετε το ζητούμενο. Δείξτε ότι, για $p \in (0, 1/2]$, η συνάρτηση $\frac{H(p)}{p}$, όπου $H(p) \triangleq -p \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του p.

   (γ) **(3 μονάδες)**

   Εξηγήστε γιατί, σε μία οποιαδήποτε κατανομή με N ενδεχόμενα, $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$, όλα *μη μηδενικά*, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο, L, με $p_L \leq \frac{1}{N}$.

   (δ) **(11 μονάδες)**

   Χρησιμοποιώντας τα Ερωτήματα (β) και (γ) (ή κάποιον άλλο τρόπο, αν προτιμάτε) αποδείξτε ότι υπάρχει πάντοτε ένα ενδεχόμενο, K, το οποίο αν αφαιρεθεί η εντροπία της κατανομής μειώνεται.

2. **Τυπικές ακολουθίες (20 μονάδες)**

   Θεωρούμε πηγή *χωρίς μνήμη* που παράγει ακολουθία δυαδικών τ.μ. $X_i \sim$Bern(p). Δηλαδή, η $X_1, X_2, \ldots$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ομοίως κατανεμημένων (i.i.d.) τ.μ.

   (α) **(5 μονάδες)**

   Εάν $\left|A_\epsilon^{(n)}\right|$ είναι το πλήθος των ασθενώς $\epsilon-$τυπικών ακολουθιών μήκους n και $|X_1^n|$ είναι όλες οι δυαδικές ακολουθίες μήκους n, τι μπορούμε να πούμε για το λόγο $\left|A_\epsilon^{(n)}\right| / |X_1^n|$ καθώς $n \to \infty$ και $\epsilon \to 0$;

   Υπόδειξη: Πρέπει να δείτε αν ο λόγος συγκλίνει στην ίδια τιμή για όλες τις τιμές της παραμέτρου p.

   (β) **(5 μονάδες)**

   Θεωρούμε, τώρα, ότι οι τιμές της X_i είναι 0 (με πιθανότητα p) ή 1 (με πιθανότητα $1-p$). Ορίζουμε το βάρος Hamming (Hamming weight), $W(X_1^n)$, της ακολουθίας X_1^n ως τον αριθμό των '1' της ακολουθίας.

   Δείξτε ότι $\frac{1}{n}W(X_1^n) \to 1-p$ για $n \to \infty$.

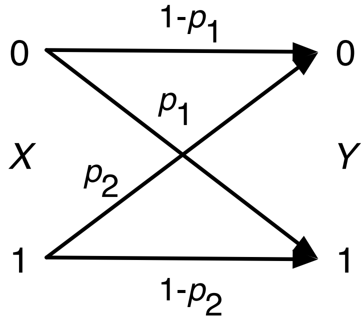
   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών.

   (γ) **(10 μονάδες)**

   Έστω, τώρα, ότι το μήκος, n, της ακολουθίας είναι πεπερασμένο και ότι $\epsilon > 0$. Δείξτε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε αν η ακολουθία X_1^n μήκους n είναι *ασθενώς* $\epsilon-$τυπική αν γνωρίζουμε την τιμή του βάρους Hamming, $W(X_1^n)$, της ακολουθίας.

3. **Μη συμμετρικό Δυαδικό Κανάλι (25 μονάδες)**

Θεωρούμε το *μη συμμετρικό* δυαδικό κανάλι του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: Το μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι.

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί στην άσκηση, δίνεται ότι η χωρητικότητα του καναλιού Z ισούται με $C \leq \log\left(1 + (1-f)f^{f/(1-f)}\right)$, όπου f η πιθανότητα μετάβασης από το 1 στο 0.

(α) **(5 μονάδες)**

Δείξτε ότι το μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι μπορει να γραφτεί ως διαδοχή ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p και ενός καναλιού Z με πιθανότητα μετάβασης από το 1 στο 0 ίση με f. Δώστε εκφράσεις για τις παραμέτρους p και f συναρτήσει των p_1 και p_2.

(β) **(7 μονάδες)**

Δείξτε ότι για *οποιοδήποτε* κανάλι $\mathcal{C}$ που μπορεί να γραφτεί ως διαδοχή δύο καναλιών $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, $C \leq \min\{C_1, C_2\}$, όπου C, C_1 και C_2 είναι οι χωρητικότητες των καναλιών $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, αντίστοιχα.

Επίσης, δώστε μια ικανή συνθήκη για να ισχύει η ισότητα, δηλαδή
$C = \min\{C_1, C_2\}$.

(γ) **(6 μονάδες)**

Με βάση τις απαντήσεις σας στα Ερωτήματα (α) και (β) βρείτε ένα *άνω* φράγμα για τη χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού. Το άνω φράγμα πρέπει να είναι συνάρτηση των p_1 και p_2.

(δ) **(7 μονάδες)**

Βρείτε ένα *κάτω* φράγμα για τη χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού (χωρίς να χρησιμοποιήσετε, κατ' ανάγκη, τα προηγούμενα ερωτήματα). Δε χρειάζεται να δώσετε αναλυτικές εκφράσεις. Αρκεί να εξηγήσετε πώς μπορεί να υπολογιστεί το κάτω φράγμα.

4. **Κανάλι πολλαπλής πρόσβασης (30 μονάδες)**

   Θεωρούμε το κανάλι πολλαπλής πρόσβασης 2 χρηστών, η έξοδος του οποίου δίνεται από τη σχέση
   $$Y = |X_1| \cdot X_2,$$
   όπου X_i είναι τα σύμβολα του χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα. $|X|$ είναι η απόλυτη τιμή της X.

   Θεωρούμε, επίσης, ότι $X_1 \in \{-1, 0, 1\}$ και $X_2 \in \{-1, 0, 1\}$.

   Σε περίπτωση που σας χρειαστεί δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.

   (α) **(2 μονάδες)**

   Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης, $R_{1,\max}$, που μπορεί να επιτύχει ο χρήστης 1 αν δε μας ενδιαφέρει ο ρυθμός μετάδοσης του χρήστη 2;

   Βρείτε μια από κοινού κατανομή $p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ με την οποία επιτυγχάνεται μετάδοση του χρήστη 1 με το μέγιστο ρυθμό.

   (β) **(2 μονάδες)**

   Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης, $R_{2,\max}$, που μπορεί να επιτύχει ο χρήστης 2 αν δε μας ενδιαφέρει ο ρυθμός μετάδοσης του χρήστη 1;

   Βρείτε μια από κοινού κατανομή $p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ με την οποία επιτυγχάνεται μετάδοση του χρήστη 2 με το μέγιστο ρυθμό.

   (γ) **(9 μονάδες)**

   Βρείτε το μέγιστο ρυθμό με τον οποίο μπορεί να μεταδώσει ο χρήστης 2 όταν ο χρήστης 1 μεταδίδει με το μέγιστο ρυθμό, $R_{1,\max}$, του Ερωτήματος (α). Ποια είναι η από κοινού κατανομή, $p_{X_1}p_{X_2}$ που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

   Υπόδειξη: Βρείτε τη μορφή που πρέπει να έχει η p_{X_2} ώστε ο χρήστης 1 να μεταδίδει με $R_{1,\max}$ και προσπαθήστε να μεγιστοποιήσετε τον R_2.

   (δ) **(7 μονάδες)**

   Βρείτε το μέγιστο ρυθμό με τον οποίο μπορεί να μεταδώσει ο χρήστης 1 όταν ο χρήστης 2 μεταδίδει με το μέγιστο ρυθμό, $R_{2,\max}$, του Ερωτήματος (β). Ποια είναι η από κοινού κατανομή, $p_{X_1}p_{X_2}$ που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

   (ε) **(6 μονάδες)**

   Ποια είναι η μέγιστη τιμή του αθροίσματος $R_1 + R_2$ των ρυθμών μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε; Βρείτε *όλες* τις κατανομές $p_{X_1}p_{X_2}$ που μεγιστοποιούν το άθροισμα $R_1 + R_2$ (το οποίο ονομάζεται αθροιστική χωρητικότητα – sum capacity).

   (στ) **(4 μονάδες)**

   Με βάση τις απαντήσεις σας στα Ερωτήματα (γ)–(ε) σχεδιάστε μια περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης για το κανάλι πολλαπλής πρόσβασης του προβλήματος. Διευκρινίστε, επίσης, σε ποια σημεία το όριο της περιοχής συμπίπτει με το όριο της περιοχής χωρητικότητας του καναλιού.