22A004 - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
Τελικό Διαγώνισμα

• Διάρκεια διαγωνίσματος: 3 ώρες. 4 ασκήσεις (το φυλλάδιο έχει 9 σελίδες – ελέγξτε το!).

• Βαθμός διαγωνίσματος = $\min\{\text{μονάδες}/10, 10\}$. Σύνολο μονάδων: 120.

• Οι απαντήσεις σας σε κάθε ερώτημα θα πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες. Επιτρέπεται η χρήση (χωρίς απόδειξη) οποιουδήποτε θεωρήματος και οποιασδήποτε ιδιότητας έχει αναφερθεί στο μάθημα ή βρίσκεται στο βιβλίο των Cover & Thomas ή στο βιβλίο του Gallager ή/και στις σημειώσεις ή/και στα φυλλάδια αρκεί να το διευκρινίσετε.

• Αποτέλεσμα για το οποίο δεν υπάρχει επαρκής αιτιολόγηση στο γραπτό δεν προσμετράται στη βαθμολόγηση. Στην περίπτωση αριθμητικού αποτελέσματος που υπολογίστηκε με αριθμομηχανή πρέπει να δώσετε τον τύπο που χρησιμοποιήσατε ή να επισυνάψετε το πρόχειρο στο οποίο κάνατε τις πράξεις.

• Βεβαιωθείτε ότι έχετε γράψει το όνομά σας σε όλα τα φύλλα που έχετε χρησιμοποιήσει, συμπεριλαμβανομένων των προχείρων.

• Απαγορεύεται το κάπνισμα μέσα στην αίθουσα κατά τη διάρκεια του διαγωνίσματος. Θα σας επιτραπεί, όμως, να βγείτε έξω για να καπνίσετε. Επίσης, απαγορεύεται επικοινωνία μεταξύ διαγωνιζομένων χωρίς άδεια επιτηρητή. Τέλος, απαγορεύεται η χρήση κινητών τηλεφώνων ή άλλων μέσων επικοινωνίας.

• Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα. Οι λύσεις θα είναι διαθέσιμες σύντομα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Βάρη θεμάτων	
1ο θέμα	25+10
2ο θέμα	25
3ο θέμα	25
4ο θέμα	25+10

Η ΣΕΛΙΔΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΚΕΝΗ ΕΣΚΕΜΜΕΝΑ

1. **Τυπικότητα και Από Κοινού Τυπικότητα (25+10 μονάδες)**

   Θεωρούμε πηγή χωρίς μνήμη που παράγει ζεύγος τιμών (X, Y) (εναλλακτικά, μπορείτε να θεωρήσετε ότι έχουμε δύο εξαρτημένες πηγές χωρίς μνήμη). Η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας, $p_{XY}(x, y)$, δίνεται στον Πίνακα 1.

	X =0	X =1
Y =0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
Y =1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

   Πίνακας 1: Από κοινού σ.μ.π. για την Άσκηση 1.

   Σε περίπτωση που σας χρειαστεί, $\log_2 3 \approx 1.585$ και $\log_2 5 \approx 2.322$.

   (α) **(8 μονάδες)**
   Θεωρούμε τις ακολουθίες $\mathbf{x}_1 = 00110$ και $\mathbf{y}_1 = 10010$. Είναι οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ ασθενώς ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.05$; Αν όχι, βρείτε τη μικρότερη τιμή του ϵ για την οποία οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ είναι ασθενώς ϵ-τυπικές.

   (β) **(8 μονάδες)**
   Είναι οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ *από κοινού* ασθενώς ϵ-τυπικές για $\epsilon = 0.05$; Αν όχι, βρείτε τη μικρότερη τιμή του ϵ για την οποία οι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_1$ είναι *από κοινού* ασθενώς ϵ-τυπικές.

   (γ) **(9 μονάδες)**
   Για το ϵ που βρήκατε στο Ερώτημα (β) (0.05 ή μεγαλύτερο) βρείτε τις ακολουθίες $\mathbf{x}$ μήκους 5 που είναι ασθενώς τυπικές ως προς την p_X. Βρείτε, επίσης, τις ακολουθίες $\mathbf{y}$ μήκους 5 που είναι ασθενώς τυπικές ως προς την p_Y.

   (δ) (**Πιο χρονοβόρο - 10 μονάδες επιπλέον**)
   Για το ϵ που βρήκατε στο Ερώτημα (β) (0.05 ή μεγαλύτερο) βρείτε τα ζεύγη ακολουθιών $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ μήκους 5 που είναι από κοινού τυπικές.

2. **Το δυαδικό συμμετρικό κανάλι διαγραφής (BSEC) (25 μονάδες)**

Σε αυτό το πρόβλημα θα θεωρήσουμε ένα πιο ρεαλιστικό *δυαδικό* κανάλι διαγραφής, το BSEC. Στο BSEC, επιπλέον των διαγραφών, ενδέχεται να έχουμε και αναστροφή ψηφίου.

Συγκεκριμένα, ο πίνακας μετάβασης του BSEC είναι ο

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\alpha & \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \alpha & 1-\epsilon-\alpha \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{X} = \{0, 1\}$ και $\mathcal{Y} = \{0, E, 1\}$.

(α) **(5 μονάδες)**
Σχεδιάστε το διάγραμμα μεταβάσεων του καναλιού. Είναι το κανάλι συμμετρικό; Είναι ασθενώς συμμετρικό;

(β) **(8 μονάδες)**
Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC, καθώς και την κατανομή εισόδου, p^*, με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα. Συγκρίνετε με τη χωρητικότητα του BEC ($\epsilon = 0$).
Υπόδειξη: Ένας τρόπος για να αποφύγετε τις πολλές πράξεις είναι να χρησιμοποιήσετε την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας (2 φορές).

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του BSEC με έναν εναλλακτικό τρόπο.

(γ) **(3 μονάδες)**
Δείξτε ότι το BSEC ισοδυναμεί με ένα BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου $\delta = \frac{\epsilon}{1-\alpha}$ το οποίο ακολουθείται από ένα BEC με πιθανότητα διαγραφής α.

(δ) **(5 μονάδες)**
Εάν X είναι η είσοδος στο BSEC, Y η έξοδός του και U η (ενδιάμεση) έξοδος του BSC, χρησιμοποιήστε τα βήματα της απόδειξης της ανισότητας επεξεργασίας δεδομένων για να εκφράσετε την $I(X;Y)$ συναρτήσει μόνο της $I(X;U)$ και της παραμέτρου α.

(ε) **(4 μονάδες)**
Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC μεγιστοποιώντας την $I(X;U)$ του BSC ως προς την κατανομή της X.

3. **Waterfilling με περιορισμό μέγιστης ισχύος (25 μονάδες)**

   Σε ορισμένες περιπτώσεις, ενδέχεται να μη θέλουμε να υπερβούμε μια συγκεκριμένη τιμή ισχύος στον πομπό, ακόμα και εάν η ισχύς είναι διαθέσιμη (για παράδειγμα, για λόγους λειτουργίας του ενισχυτή ή για να μην προκαλέσουμε παρεμβολές σε γειτονικές συνδέσεις). Στο πρόβλημα αυτό θα εξετάσουμε πώς πρέπει να μεταβάλουμε τη λύση waterfilling για να ικανοποιήσουμε και ένα περιορισμό μέγιστης ισχύος εκπομπής, $P_{\max,k}$, για κάθε χρήστη, k.

   Θεωρούμε K παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια και *συνολική* διαθέσιμη ισχύ P. Η διασπορά του θορύβου σε κάθε κανάλι ισούται με N_k. Η διαθέσιμη ισχύς μπορεί να κατανεμηθεί στα κανάλια όπως επιθυμούμε, αρκεί, σε κάθε κανάλι, η ισχύς να μην υπερβαίνει μια μέγιστη τιμή $P_{\max,k}$. Διευκρινίζεται ότι, στη γενική περίπτωση, η $P_{\max,k}$ δεν είναι η ίδια για όλα τα κανάλια.

   (α) **(5 μονάδες)**

   Θεωρούμε, κατ' αρχάς, την περίπτωση 2 χρηστών, δηλαδή $K = 2$. Επίσης, *μόνο* σε αυτό το ερώτημα, θεωρούμε ότι *δεν* υπάρχει περιορισμός ισχύος, ή, ισοδύναμα, ότι $P_{\max,k} = P$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $N_2 \geq N_1$.

   Δώστε μια έκφραση σε κλειστή μορφή για τη χωρητικότητα του καναλιού που αποτελείται από τα 2 παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια.

   Υπόδειξη: Πρέπει να διακρίνετε περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της P.

   (β) **(5 μονάδες)**

   Θεωρήστε, τώρα, ότι ενδέχεται κάποιες από τις $P_{\max,k}$ (ή όλες) να είναι μικρότερες από P. Για το κανάλι 2 χρηστών ($K = 2$) βρείτε ποιες συνθήκες πρέπει να ισχύουν για τις $P_{\max,1}$ και $P_{\max,2}$ συναρτήσει των P, N_1 και N_2, ώστε οι περιορισμοί να μην επηρεάζουν τη χωρητικότητα, δηλαδή η χωρητικότητα για *δεδομένες* τιμές των P, N_1 και N_2 να ισούται με την τιμή που βρήκατε στο Ερώτημα (α).

   Μπορείτε και πάλι να θεωρήσετε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $N_2 \geq N_1$.

   (γ) **(5 μονάδες)**

   Στη συνέχεια, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις, θεωρούμε ότι $P_{\max,1} = P_{\max,2} = P_{\max}$. Επίσης, θεωρούμε ότι $P_{\max,1} + P_{\max,2} = 2P_{\max} \geq P$, δηλαδή ότι όλη η συνολική ισχύς κατανέμεται, τελικά στα κανάλια.

   Βρείτε τη χωρητικότητα των 2 παράλληλων καναλιών για οποιαδήποτε τιμή του $P_{\max}$ (δηλαδή, ακόμα και για τιμές που ενδέχεται να αλλάζουν τη βέλτιστη λύση του Ερωτήματος (α)).

   (δ) **(5 μονάδες)**

   Στη συνέχεια, θεωρούμε τη γενική περίπτωση K χρηστών. Υποθέστε ότι, αρχικά, εκτελούμε τον αλγόριθμο waterfilling χωρίς περιορισμούς. Μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου παρατηρούμε ότι σε κάποια κανάλια έχουμε υπερβεί την $P_{\max,k}$. Υποθέστε ότι, μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling έχει κατανεμηθεί μη μηδενική ισχύς σε όλα τα K κανάλια (δηλαδή $P_k > 0$ για όλα τα k). Υποθέστε, επίσης, ότι στα κανάλια όπου δεν έχουμε υπερβεί την $P_{\max,k}$ δεν υπάρχει περιορισμός ισχύος. Πώς πρέπει να κατανείμουμε την πλεονάζουσα ισχύ $\sum_{k \in \mathcal{O}} (P_k - P_{\max,k})$ στα υπόλοιπα κανάλια ώστε να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης; ($\mathcal{O}$ είναι το σύνολο των καναλιών όπου ο αλγόριθμος waterfilling υπερέβη τις $P_{\max,k}$ και P_k οι λύσεις του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς).

(ε) **(5 μονάδες)**

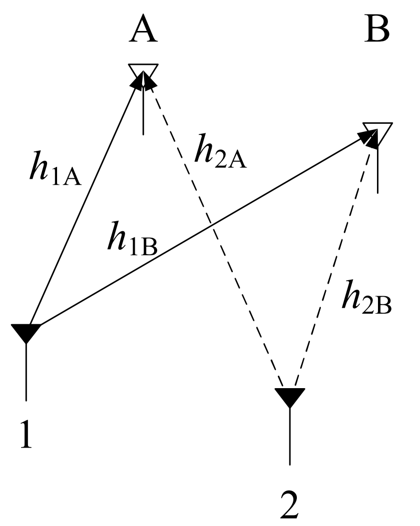
Προτείνετε έναν τροποποιημένο αλγόριθμο waterfilling για την περίπτωση που έχουμε περιορισμούς ισχύος, $P_{\max,k}$, σε κάθε κανάλι. Σε αυτό το ερώτημα θεωρήστε τη γενική περίπτωση, δηλαδή ότι υπάρχουν περιορισμοί σε όλα τα κανάλια. Επίσης, σε αντίθεση με το προηγούμενο ερώτημα, υπάρχει περίπτωση μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς ισχύος κάποια κανάλια να μη χρησιμοποιούνται (δηλαδή να έχουμε $P_k = 0$).

4. **Μετάδοση από δύο πομπούς σε δύο δέκτες (25+10 μονάδες)**

Στο σύστημα του Σχήματος 1, οι πομποί 1 και 2 θέλουν να μεταδώσουν ο καθένας την ίδια πληροφορία στους δέκτες A και B. Δηλαδή, ο πομπός 1 θέλει να μεταδώσει την ίδια πληροφορία στο δέκτη A και στο δέκτη B και ο πομπός 2 θέλει να μεταδώσει την ίδια πληροφορία (αλλά διαφορετική από την πληροφορία του πομπού 1) στο δέκτη A και στο δέκτη B.

Θεωρούμε ότι ούτε οι πομποί ούτε οι δέκτες συνδέονται μεταξύ τους. Επομένως, οι πομποί μεταδίδουν ανεξάρτητα και οι δέκτες αποκωδικοποιούν ανεξάρτητα.

Και στους δύο δέκτες στο ληφθέν σήμα προστίθεται Γκαουσιανός θόρυβος διασποράς N. Δηλαδή, $Z_A \sim \mathcal{N}(0, N)$ και $Z_B \sim \mathcal{N}(0, N)$: $Y_A = h_{1A}X_1 + h_{2A}X_2 + Z_A$ και $Y_B = h_{1B}X_1 + h_{2B}X_2 + Z_B$. Στους πομπούς υπάρχει περιορισμός εκπεμπόμενης ισχύος P_1 και P_2, αντίστοιχα. Για διευκόλυνσή σας μπορείτε να θεωρήσετε ότι τα κέρδη των καναλιών, $h_{i,j}$, παίρνουν πραγματικές τιμές.



Σχήμα 1: Μετάδοση από 2 πομπούς σε 2 δέκτες.

(α) **(5 μονάδες)**

Έάν δε μας ενδιαφέρει να αποκωδικοιήσουμε τα εκπεμπόμενα σήματα στο δέκτη B, σχεδιάστε την περιοχή χωρητικότητας του καναλιού που σχηματίζεται μεταξύ των πομπών 1 και 2 και του δέκτη A. Επίσης, εξηγήστε ποιες είναι οι κατανομές που πρέπει να χρησιμοποιήσουν οι πομποί προκειμένου να επιτευχθεί μετάδοση στο όριο της περιοχής χωρητικότητας. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτύχει ο πομπός 1; Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτύχει ο πομπός 2; Ποιο είναι το μέγιστο *άθροισμα* ρυθμών μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε (δηλαδή η sum capacity);

(β) (**10 μονάδες**)

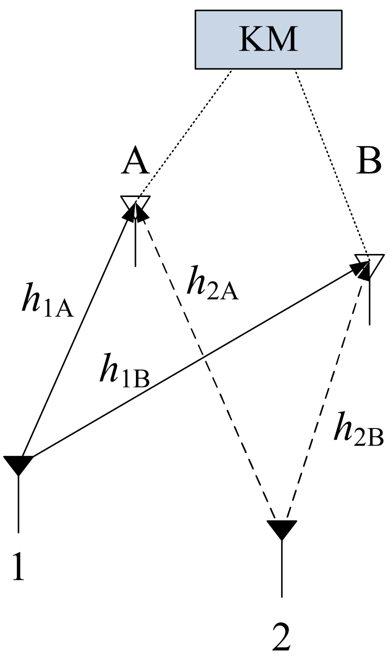
Έστω, τώρα, ότι μας ενδιαφέρει η πληροφορία από κάθε πομπό να λαμβάνεται και στους δύο δέκτες. Ποια είναι η περιοχή χωρητικότητας, δηλαδή ποια είναι η περιοχή ρυθμών μετάδοσης για τους οποίους η μέγιστη πιθανότητα σφάλματος και στους δύο δέκτες για τα σήματα και των δύο πομπών μπορεί να είναι αυθαίρετα κοντά στο 0; Αν προτιμάτε, δε χρειάζεται να δώσετε τις σχέσεις που περιγράφουν την περιοχή της χωρητικότητας, αρκεί να τη σχεδιάσετε λεπτομερώς.

Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτύχει ο πομπός 1; Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτύχει ο πομπός 2; Ποιο είναι το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε (δηλαδή η sum capacity); Τι κατανομή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στους πομπούς;

Υπόδειξη: Πρέπει να διακρίνετε περιπτώσεις για τις σχέσεις μεταξύ των h_{1A}, h_{2A}, h_{1B} και h_{2B}. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορείτε να υποθέσετε ότι $h_{1A} \geq h_{1B}$.

(γ) (**10 μονάδες**)

Υποθέτουμε, τώρα, ότι έχουμε πρόσβαση και στους δύο δέκτες A και B μέσω μιας Κεντρικής Μονάδας KM, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Μετάδοση από 2 πομπούς σε 2 δέκτες. Οι δέκτες συνδέονται σε Κεντρική Μονάδα KM.

Υποθέστε, αρχικά, ότι η KM είναι ένας διακόπτης που μπορεί να επιλέξει μεταξύ του σήματος που λαμβάνεται στο δέκτη A και του σήματος που λαμβάνεται στο δέκτη B. Δώστε μια περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης, $\mathcal{R}$, μεταξύ των πομπών 1 και 2 και της KM. Τι μπορείτε να πείτε για την περιοχή χωρητικότητας του νέου καναλιού; Είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την περιοχή χωρητικότητας του Ερωτήματος (β);

(δ) (**Δυσκολότερο – 10 μονάδες επιπλέον**)

Υποθέτουμε, τέλος, ότι η ΚΜ μπορεί να συνδυάσει γραμμικώς τα λαμβανόμενα σήματα στους δέκτες Α και Β, δηλαδή ότι μπορεί να σχηματίσει το σήμα $\alpha Y_1 + \beta Y_2$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η περιοχή χωρητικότητας του καναλιού μεταξύ των πομπών 1 και 2 και της εξόδου της ΚΜ είναι υπερσύνολο της περιοχής ρυθμών μετάδοσης του Ερωτήματος (γ). Υπενθυμίζεται ότι οι θόρυβοι Z_A και Z_B στους δέκτες είναι *ανεξάρτητοι*. Θεωρούμε, επίσης, ότι η ΚΜ δεν εισάγει νέο θόρυβο (πέραν αυτού των δεκτών Α και Β).

i. Βρείτε το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης που μπορεί να επιτύχει ο πομπός 1. Ποια βάρη α και β αντιστοιχούν σε αυτό το ρυθμό μετάδοσης; Επαναλάβετε για τον πομπό 2.

ii. Βρείτε το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης $R_1 + R_2$ που μπορούμε να επιτύχουμε με (έξυπνο) διαμερισμό χρόνου (time division), αν, δηλαδή, ο πομπός 1 μεταδίδει μόνος του για ποσοστό c του χρόνου και ο πομπός 2 μεταδίδει μόνος του για ποσοστό $1 - c$. Τα βάρη α και β που χρησιμοποιεί η ΚΜ μπορούν να αλλάζουν όταν αλλάζει ο πομπός ο οποίος μεταδίδει.

iii. Συγκρίνετε με το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης που είναι επιτεύξιμο στην περίπτωση του Ερωτήματος (γ). Δείξτε ότι το άθροισμα που βρήκατε στην περίπτωση που η ΚΜ μπορεί να συνδυάσει γραμμικώς τα σήματα είναι μεγαλύτερο. Επομένως, και η περιοχή χωρητικότητας (ως υπερσύνολο της περιοχής επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης) θα είναι υπερσύνολο της περιοχής επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης του Ερωτήματος (γ).