ΕΕ728 (22Α004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
2η Σειρά Ασκήσεων
(Χωρητικότητα Καναλιού)

Παράδοση: Έως 26/5/2010 5 μ.μ. – Στο γραφείο μου ή στο μάθημα

Διευκρίνιση: Η επίλυση των ασκήσεων είναι προαιρετική. Σκοπός τους είναι να λειτουργήσουν συμπληρωματικά με τις διαλέξεις. Εάν λύσετε όλες τις σειρές ασκήσεων θα σας δοθεί μία (1) μονάδα επιπλέον (εφόσον πάρετε τουλάχιστον 5 στο τελικό διαγώνισμα).

Επιτρέπεται η συνεργασία σε μικρές ομάδες, αλλά όχι η αντιγραφή.

Σημείωση: Εάν δεν έχετε παρακολουθήσει το μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας", συνιστώ να λύσετε ή να μελετήσετε (τουλάχιστον) τις εξής ασκήσεις των Cover & Thomas (οι λύσεις των οποίων είναι διαθέσιμες στο eclass του ΕΕ676): 7.2, 7.3, 7.6, 7.19.

1. **Υποβέλτιστοι κώδικες (Cover & Thomas 7.9)**

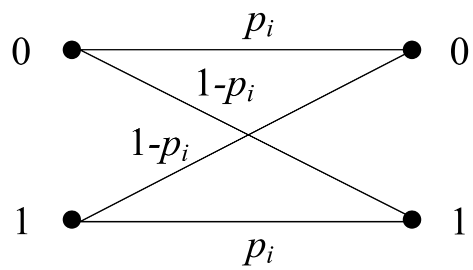
   Θεωρήστε το κανάλι Z με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

   $$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad x, y \in \{0, 1\}.$$

   Έστω ότι κατασκευάζουμε τυχαίο κώδικα $\left(2^{nR}, n\right)$ με ρίψεις *αμερόληπτου* κέρματος. Με τον τρόπο αυτό δεν επιτυγχάνουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα (γιατί;). Βρείτε το μέγιστο εφικτό ρυθμό μετάδοσης, R, ώστε η *μέση* τιμή της πιθανότητας σφάλματος $P_e^{(n)}$ επί όλων των κωδίκων που κατασκευάζονται τυχαία με αμερόληπτες ρίψεις να τείνει στο 0 καθώς το μήκος, n, του κώδικα τείνει στο άπειρο.

2. **Χρονικώς Μεταβαλλόμενα Κανάλια (Cover & Thomas 7.11)**

   Θεωρούμε το χρονικώς μεταβαλλόμενο κανάλι του Σχήματος 1. Οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δεδομένων των $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με υπό συνθήκη κατανομή μάζας πιθανότητας $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} p_i(y_i|x_i)$. Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$,
   $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Βρείτε τη $\max_{p(\mathbf{x})} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$. Σχολιάστε την τιμή της χωρητικότητας και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.



Σχήμα 1: Χρονικώς Μεταβαλλόμενο BSC.

3. **Κανάλια με εξάρτηση μεταξύ των συμβόλων (Cover & Thomas 7.14)**

   Θεωρήστε το εξής κανάλι το οποιο χρησιμοποιεί δυαδικό αλφάβητο, παίρνει ως είσοδο σύμβολα των 2 bits και παράγει ως έξοδο σύμβολα των 2 bits σύμφωνα με την ακόλουθη απεικόνιση: 00 $\to$ 01, 01 $\to$ 10, 10 $\to$ 11 και 11 $\to$ 00. Επομένως, εάν η είσοδος στο κανάλι είναι η ακολουθία 01, η έξοδος είναι 10 με πιθανότητα 1. Συμβολίζουμε τα δύο σύμβολα εισόδου με X_1, X_2 και τα δύο σύμβολα εξόδου με Y_1, Y_2.

   (α) Υπολογίστε την αμοιβαία πληροφορία $I(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ συναρτήσει της κατανομής εισόδου επάνω στα 4 πιθανά ζεύγη εισόδου.

   (β) Δείξτε ότι η χωρητικότητα ανά μετάδοση ζεύγους ψηφίων ισούται με 2 bits.

   (γ) Δείξτε ότι, για την κατανομή εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα στο προηγούμενο ερώτημα, $I(X_1, Y_1) = 0$. Επομένως, η κατανομή στις ακολουθίες εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα δε μεγιστοποιεί απαραίτητα την αμοιβαία πληροφορία μεταξύ μεμονωμένων συμβόλων εισόδου και των αντίστοιχων εξόδων.

4. **Κωδικοποιητής και Αποκωδικοποιητής ως μέρος του καναλιού (Cover & Thomas 7.16)**

   Θεωρήστε Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου (crossover probability) 0.1. Ένα πιθανό σχήμα κωδικοποίησης για αυτό το κανάλι το οποίο χρησιμοποιεί δύο κωδικές λέξεις μήκους 3 είναι να κωδικοποιήσουμε το μήνυμα a_1 ως 000 και το μήνυμα a_2 ως 111. Εάν χρησιμοποιούμε αυτόν τον κώδικα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο συνδυασμός κωδικοποιητή, καναλιού και αποκωδικοποιητή αποτελεί ένα νέο BSC με δύο εισόδους a_1 και a_2 και δύο εξόδους a_1 και a_2.

   (α) Βρείτε την πιθανότητα αναστροφής για το νέο κανάλι.

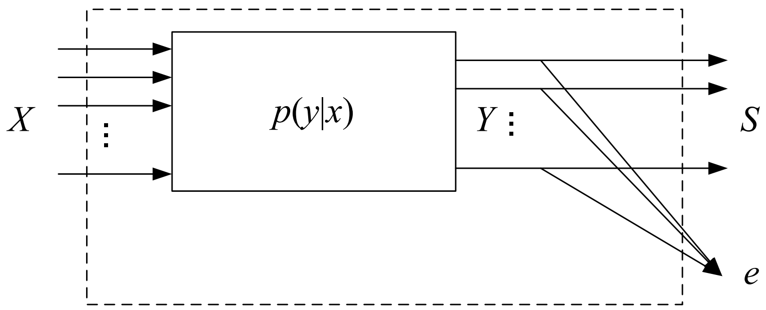
   (β) Ποια είναι η χωρητικότητα του νέου καναλιού σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού;

   (γ) Ποια είναι η χωρητικότητα του αρχικού BSC με πιθανότητα αναστροφής 0.1;

   (δ) Αποδείξτε το εξής γενικό αποτέλεσμα: Για οποιοδήποτε κανάλι, εάν θεωρήσουμε από κοινού τον κωδικοποιητή, το κανάλι και τον αποκωδικοποιητή ως ένα νέο κανάλι με είσοδο μηνύματα και έξοδο εκτιμώμενα μηνύματα, η χωρητικότητα σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού δεν μπορεί να αυξηθεί.

5. **Κανάλι διαγραφής (Cover & Thomas 7.27)**

   Έστω $\{\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y}\}$ ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με χωρητικότητα C. Υποθέστε ότι στην έξοδο του καναλιού συνδέεται ένα κανάλι διαγραφής $\{\mathcal{Y}, p(s|y), \mathcal{S}\}$ το οποίο διαγράφει την έξοδο του πρώτου καναλιού με πιθανότητα α.



Σχήμα 2: Κανάλι για το Πρόβλημα 7.27 των Cover & Thomas.

   Συγκεκριμένα, $\mathcal{S} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m, e\}$, και

$$\begin{aligned} \Pr\{S = y|X = x\} &= \bar{\alpha}p(y|x), \quad y \in \mathcal{Y}, \\ \Pr\{S = e|X = x\} &= \alpha. \end{aligned}$$

   Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού από το X στο S.

6. **Κανάλι διακριτών εισόδων, συνεχών εξόδων (Cover & Thomas 9.15)**

   Έστω $\Pr\{X = 1\} = p$, $\Pr\{X = 0\} = 1-p$ και $Y = X+Z$, όπου η Z είναι κατανεμημένη *ομοιόμορφα* στο διάστημα $[0, a]$, $a > 1$. Επίσης, η Z είναι ανεξάρτητη της X.

   (α) Υπολογίστε την $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$.

   (β) Υπολογίστε, τώρα, την $I(X;Y)$ με διαφορετικό τρόπο, με χρήση της $I(X;Y) = h(Y) - h(Y|X)$.

   (γ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού μεγιστοποιώντας ως προς p.