EE728 (22A004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
1η Σειρά Ασκήσεων
(Εντροπία, Αμοιβαία Πληροφορία, Ανισότητα Fano, AEP)

Παράδοση: Έως 26/3/2010 5 μ.μ. – Στο γραφείο μου

Διευκρίνιση: Η επίλυση των ασκήσεων είναι προαιρετική. Σκοπός τους είναι να λειτουργήσουν συμπληρωματικά με τις διαλέξεις. Εάν λύσετε όλες τις σειρές ασκήσεων θα σας δοθεί μία (1) μονάδα επιπλέον (εφόσον πάρετε τουλάχιστον 5 στο τελικό διαγώνισμα).

Επιτρέπεται η συνεργασία σε μικρές ομάδες, αλλά όχι η αντιγραφή.

1. **Μια εναλλακτική απόδειξη της ανισότητας $D(p||q) \geq 0$ (Cover 2.26)**

   (α) Δείξτε ότι, για $0 < x < \infty$, $\ln x \leq x - 1$.

   (β) Δικαιολογήστε τα παρακάτω βήματα

$$\begin{aligned} -D(p||q) &= \sum_x p(x) \ln \frac{q(x)}{p(x)} \\ &\overset{(i)}{\leq} \sum_x p(x) \left(\frac{q(x)}{p(x)} - 1 \right) \\ &\overset{(ii)}{\leq} 0. \end{aligned}$$

   (γ) Πότε ισχύει η ισότητα;

2. **Σχετική Εντροπία (Cover 2.37)**

   Έστω 3 τ.μ. X, Y, Z με από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(x, y, z)$. Η σχετική εντροπία μεταξύ της από κοινού κατανομής και του γινομένου των περιθώριων κατανομών ορίζεται ως

$$D(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z)) = \mathbb{E}\left[\log \frac{p(x, y, z)}{p(x)p(y)p(z)}\right].$$

   (α) Εκφράστε την $D(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z))$ συναρτήσει εντροπιών.

   (β) Πότε η $D(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z))$ ισούται με 0;

3. **Μήκος Ακολουθίας (Cover 2.48)**

   Θεωρούμε τυχαία διαδικασία Bernoulli$\left(\frac{1}{2}\right)$ $\{X_i\}$. Σταματάμε τη διαδικασία όταν εμφανίζεται το πρώτο "1". Έστω N το μήκος της ακολουθίας όταν σταματάμε. Επομένως, η ακολουθία X^N είναι ένα στοιχείο του συνόλου όλων των δυαδικών ακολουθιών πεπερασμένου μήκους: $\{0,1\}^* = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\}$.

   (α) Βρείτε την $I(N; X^N)$.

   (β) Βρείτε την $H(X^N|N)$.

   (γ) Βρείτε την $H(X^N)$.

   (δ) Βρείτε την $H(N|X^N)$.

   (ε) Βρείτε την $H(N)$.

   Υπόδειξη: Ενδέχεται να σας φανεί χρήσιμη η Άσκηση 2.1 του Cover.

   Αλλάζουμε, τώρα, τον τρόπο με τον οποίο σταματάμε την παραγωγή της ακολουθίας. Θεωρήστε και πάλι ότι $X_i \sim$Bernoulli$\left(\frac{1}{2}\right)$. Με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ σταματάμε όταν $N = 6$, αλλιώς σταματάμε όταν $N = 12$. Επίσης, θεωρούμε ότι η επιλογή της τιμής του N είναι *ανεξάρτητη* της ακολουθίας $X_1 X_2 \ldots X_{12}$.

   (στ) Βρείτε την $I(N; X^N)$.

   (ζ) Βρείτε την $H(X^N|N)$.

   (η) Βρείτε την $H(X^N)$.

   (θ) Βρείτε την $H(N|X^N)$.

   (ι) Βρείτε την $H(N)$.

4. **Επεξεργασία Δεδομένων**

   Έστω ότι οι τ.μ. $X_1 \to X_2 \to X_3 \to \ldots \to X_n$ σχηματίζουν αλυσίδα Markov, δηλαδή $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1)p(x_2|x_1)\ldots p(x_n|x_{n-1})$. Βρείτε την πιο απλή έκφραση που μπορείτε για την $I(X_1; X_2, X_3, \ldots, X_n)$.

5. **Ανισότητα Fano (Cover 2.32)**

   Έστω η εξής από κοινού κατανομή μάζας πιθανότητας για τις τ.μ. (X, Y)

		Y		
		a	b	c
	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
X	2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
	3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

   Έστω, επίσης, $\hat{X}(Y)$ εκτιμητής για τη X με βάση την Y και $P_e = \Pr\{\hat{X}(Y) \neq X\}$.

(α) Βρείτε το βέλτιστο εκτιμητή $\hat{X}(Y)$, καθώς και την P_e που αντιστοιχεί στο βέλτιστο εκτιμητή.

(β) Βρείτε το φράγμα για την P_e που προκύπτει από την ανισότητα Fano και συγκρίνετε.

6. **Όριο γινομένου (Cover 3.8)**

Έστω η ακολουθία $X_1, X_2, \ldots, X_n$ η οποία αποτελείται από ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) τ.μ. οι οποίες ακολουθούν την κατανομή

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα} \quad \frac{1}{2} \\ 2 & \text{με πιθανότητα} \quad \frac{1}{4} \\ 3 & \text{με πιθανότητα} \quad \frac{1}{4} \end{cases}$$

Να βρεθεί το $\lim_{n\to\infty}(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_{n-1} \cdot X_n)^{1/n}$.

7. **AEP και Σχετική Εντροπία (Cover 3.9)**

Έστω ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) διακριτές τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ που ακολουθούν κατανομή μάζας πιθανότητας $p(x)$ και $|\mathcal{X}| < \infty$. Επομένως, $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i)$. Είδαμε ότι $-\frac{1}{n}\log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \to H(X)$ κατά πιθανότητα. Έστω, τώρα, μια άλλη συνάρτηση μάζας πιθανότητας $q(x)$ ορισμένη στον ίδιο δειγματικό χώρο $\mathcal{X}$ με την $p(x)$, και $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n q(x_i)$.

(α) Βρείτε την τιμή του ορίου $-\frac{1}{n}\log q(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ εάν οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) με κατανομή $p(x)$.

(β) Βρείτε την τιμή του ορίου $-\frac{1}{n}\log \frac{q(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{p(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ (log-likelihood), όπου, και πάλι, οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) με κατανομή $p(x)$. Επομένως, η πιθανότητα να θεωρήσουμε ότι οι X_i ακολουθούν κατανομή $q(x)$ (αντί για $p(n)$) ελαττώνεται εκθετικά με το n και με ρυθμό ανάλογο της $D(p||q)$.