22A004 - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
Επαναληπτική Εξέταση Σεπτεμβρίου 2009

• Διάρκεια Διαγωνίσματος: 3 ώρες. 4 ασκήσεις (το φυλλάδιο έχει 8 σελίδες – ελέγξτε το!).

• Βαθμός διαγωνίσματος $= \min\{10, 105 \text{ μονάδες}/10\}$.

• Οι απαντήσεις σας σε κάθε ερώτημα πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες. Επιτρέπεται η χρήση (χωρίς απόδειξη) οποιουδήποτε θεωρήματος και οποιασδήποτε ιδιότητας έχει αναφερθεί στο μάθημα ή βρίσκεται στο βιβλίο ή/και στις σημειώσεις ή/και στα φυλλάδια αρκεί να το διευκρινίσετε.

• Αποτέλεσμα για το οποίο δεν υπάρχει επαρκής αιτιολόγηση στο γραπτό δεν προσμετράται στη βαθμολόγηση. Στην περίπτωση αριθμητικού αποτελέσματος που υπολογίστηκε με αριθμομηχανή πρέπει να δώσετε τον τύπο που χρησιμοποιήσατε ή να επισυνάψετε το πρόχειρο στο οποίο κάνατε τις πράξεις.

• Βεβαιωθείτε ότι έχετε γράψει το όνομά σας σε όλα τα φύλλα που έχετε χρησιμοποιήσει, συμπεριλαμβανομένων των προχείρων.

• Απαγορεύεται το κάπνισμα μέσα στην αίθουσα κατά τη διάρκεια του διαγωνίσματος. Θα σας επιτραπεί, όμως, να βγείτε έξω για να καπνίσετε. Επίσης, απαγορεύεται επικοινωνία μεταξύ διαγωνιζομένων χωρίς άδεια επιτηρητή. Τέλος, απαγορεύεται η χρήση κινητών τηλεφώνων ή άλλων μέσων επικοινωνίας.

• Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα. Οι λύσεις θα είναι διαθέσιμες σύντομα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Βάρη θεμάτων	
1ο θέμα	25
2ο θέμα	25
3ο θέμα	25
4ο θέμα	25+5

Η ΣΕΛΙΔΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΚΕΝΗ ΕΣΚΕΜΜΕΝΑ

1. **Ισότητες και ανισότητες (25 μονάδες)**

   Συμπληρώστε τις παρακάτω σχέσεις με $=$, $\leq$ ή $\geq$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Στην περίπτωση που ισχύει $\leq$ ή $\geq$, προσδιορίστε πότε ισχύει η ισότητα.

   Σημείωση: Απαντήσεις που δεν είναι επαρκώς αιτιολογημένες δε βαθμολογούνται.

   (α) **(5 μονάδες)**
   $I(X;Y)$? $I(g(X);Y)$. Η $g()$ είναι νομοτελειακή (deterministic) συνάρτηση.

   (β) **(5 μονάδες)**
   $I(Y;Z|X)$? $I(Y;Z)$ εάν $p(x,y,z) = p(x)p(y)p(z|x,y)$.

   (γ) **(7 μονάδες)**
   $H(X|Z)$? $H(X|Y) + H(Y|Z)$.

   (δ) **(8 μονάδες)**
   $h(X+Y)$? $h(X)$, όταν X και Y είναι *ανεξάρτητες* συνεχείς τ.μ.

2. **(25 μονάδες) Κανάλι**

Θεωρούμε το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

(α) **(5 μονάδες)**

Σχεδιάστε το διάγραμμα του καναλιού.

(β) **(15 μονάδες)**

Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Εξηγήστε διαισθητικά γιατί μία από τις εισόδους του καναλιού (ποια;) δε χρησιμοποιείται όταν μεταδίδουμε με ρυθμό αυθαίρετα κοντά στη χωρητικότητα.

Υπόδειξη: Εκμεταλλευτείτε κάποια συμμετρία στο κανάλι για να απλοποιήσετε τις πράξεις.

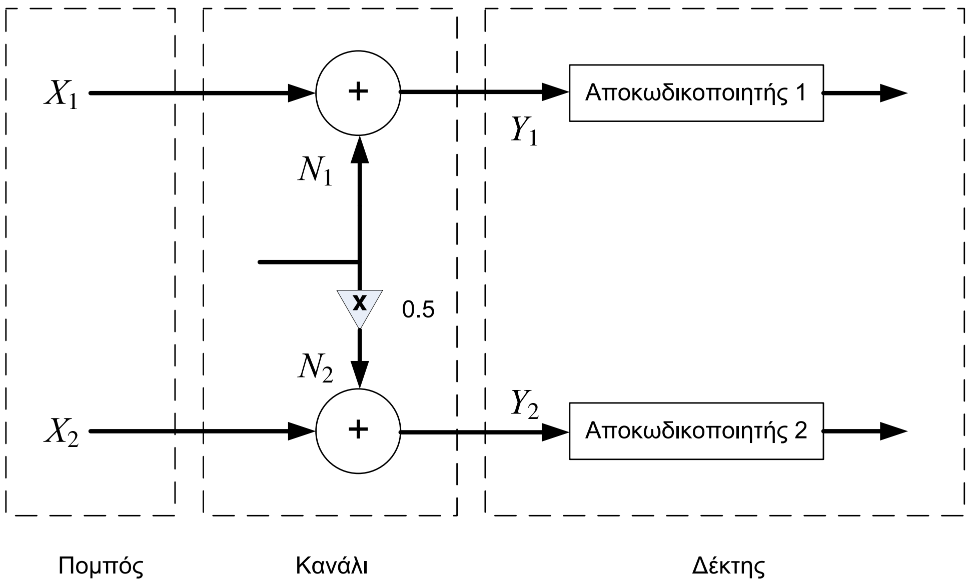
(γ) **(5 μονάδες)**

Επαληθεύστε ότι η χωρητικότητα του καναλιού είναι η ίδια με αυτή του καναλιού διαγραφής (Binary Erasure Channel).

3. **Ανεξάρτητη ή από κοινού αποκωδικοποίηση; (25 μονάδες)**

Θεωρήστε το σύστημα του Σχήματος 1. Ο πομπός μπορεί να χρησιμοποιήσει δύο κανάλια για τη μετάδοση. Δηλαδή, μπορεί να επιλέξει να χρησιμοποιήσει ένα από τα κανάλια ή και τα δύο. Η *συνολική* ισχύς που έχει στη διάθεσή του ο πομπός (και για τα δύο κανάλια) ισούται με P. Οι προσθετικοί θόρυβοι N_1 και N_2 είναι γκαουσιανοί, μηδενικής μέσης τιμής. Ισχύει, επίσης

$$\sigma_1^2 = E[N_1^2] \text{ και}$$
$$N_2 = N_1/2.$$



Σχήμα 1: Ανεξάρτητη αποκωδικοποίηση.

(α) **(10 μονάδες)**

Θεωρούμε, κατ' αρχάς, ότι ο δέκτης αποκωδικοποιεί την έξοδο κάθε καναλιού ξεχωριστά και ότι δεν υπάρχει καμία σύνδεση μεταξύ των αποκωδικοποιητών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε από τον πομπό στο δέκτη (συναρτήσει των σ_1^2 και P) και πώς επιτυγχάνεται;

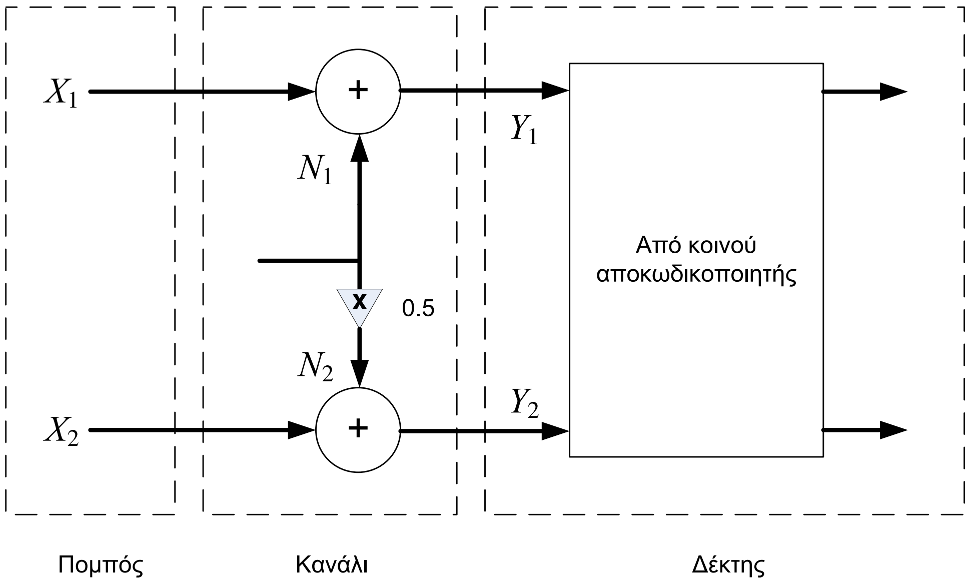
Υπόδειξη: Ενδέχεται να χρειαστεί να διακρίνετε περιπτώσεις για τη σχέση μεταξύ σ_1^2 και P.

(β) **(5 μονάδες)**

Υπάρχουν τιμές των σ_1^2 και P για τις οποίες είναι βέλτιστο ο πομπός να χρησιμοποιήσει μόνο το κανάλι 1;

Υπάρχουν τιμές των σ_1^2 και P για τις οποίες είναι βέλτιστο ο πομπός να χρησιμοποιήσει μόνο το κανάλι 2;

(γ) **(10 μονάδες)**
Έστω, τώρα, ότι ο δέκτης μπορεί να αποκωδικοποιήσει *από κοινού* τις εξόδους των δύο καναλιών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε από τον πομπό στο δέκτη και πώς επιτυγχάνεται;

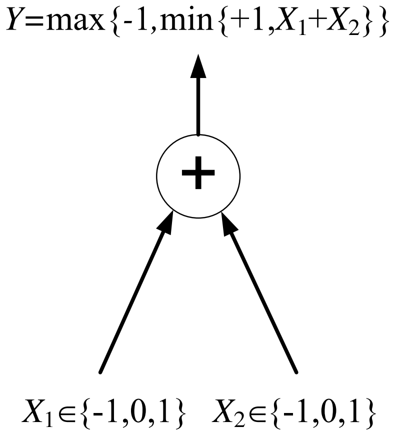


Σχήμα 2: Από κοινού αποκωδικοποίηση.

4. **Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο (25 μονάδες + 5 μονάδες επιπλέον)**

Στο κανάλι του Σχήματος 3, δύο χρήστες (1 και 2) επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα δέκτη. Ο δέκτης λαμβάνει το άθροισμα των σημάτων X_1 και X_2 του χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα. Ωστόσο, όταν η *απόλυτη* τιμή του αθροίσματος είναι μεγαλύτερη από 1, ο δέκτης ψαλιδίζει το σήμα. Δηλαδή, $Y = \max\{-1, \min\{1, X_1 + X_2\}\}$. Και οι δύο χρήστες χρησιμοποιούν το ίδιο αλφάβητο $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \{-1, 0, 1\}$. Οι χρήστες δε συνεννοούνται μεταξύ τους πριν μεταδώσουν. Ωστόσο, θεωρούμε ότι γνωρίζουν την κατανομή $p_{X_i}(x_i)$ με την οποία πρέπει να μεταδώσουν (για παράδειγμα, μπορεί να τους την έχει γνωστοποιήσει ο δέκτης πριν αρχίσει η μετάδοση).

Δίνεται, επίσης, ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και $\log_2 5 \approx 2.3219$.



Σχήμα 3: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο και δίπλευρο ψαλιδισμό.

(α) **(4 μονάδες)**

Βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ρυθμός μετάδοσης R_1 του χρήστη 1. Επαναλάβετε για το ρυθμό μετάδοσης R_2 του χρήστη 2. Βρείτε, επίσης, την κατανομή $p_{X_i}(x_i)$ που επιτυγχάνει το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, R_i, σε κάθε περίπτωση.

(β) **(4 μονάδες)**

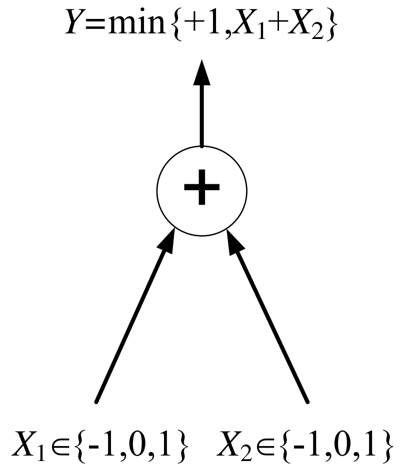
Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή του *αθροίσματος* $R_1 + R_2$ των ρυθμών με τους οποίους μπορούν να μεταδώσουν *ταυτόχρονα* οι δύο χρήστες (sum capacity του καναλιού). Για ποια κατανομή $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ μεγιστοποιείται το άθροισμα; Σχεδιάστε την περιοχή χωρητικότητας (capacity region), $\mathcal{C}$, του καναλιού.

(γ) **(3 μονάδες)**

Περιγράψτε έναν τρόπο με τον οποίο μπορείτε να επιτύχετε μετάδοση με *οποιοδήποτε* ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) που ανήκει στην περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}$.

(δ) **(3 μονάδες)**

Έστω, τώρα, ότι ο δέκτης ψαλιδίζει το άθροισμα μόνο στο $+1$, δηλαδή $Y = \min\{1, X_1 + X_2\}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο και μονόπλευρο ψαλιδισμό.

Τι περιμένετε για τη νέα περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}'$, σε σχέση με την προηγούμενη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(ε) **(3 μονάδες)**

Ποιό είναι το άνω φράγμα για το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης (sum capacity) $C_{\text{sum}} = R_1 + R_2$;

(στ) **(3 μονάδες)**

Σχεδιάστε την περιοχή ρυθμών μετάδοσης, $\mathcal{R}$, που επιτυγχάνεται με χρήση των κατανομών που βρήκατε στα ερωτήματα (α) και (β). Συγκρίνετε με την περιοχή χωρητικότητας του ερωτήματος (β). Μπορείτε να πείτε κάτι περισσότερο σε σχέση με αυτά που συμπεράνατε στο ερώτημα (δ);

(ζ) **(Δυσκολότερο: 5 + 5 μονάδες επιπλέον)**

Δείξτε ότι ένα *κάτω* φράγμα για τη sum capacity είναι το 1.9772. Με βάση αυτό το φράγμα και την περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης του ερωτήματος (στ) σχεδιάστε μια περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης που είναι πιο κοντά στην περιοχή χωρητικότητας $\mathcal{C}'$ από αυτήν του ερωτήματος (στ).

Υπόδειξη: Βρείτε μια κατανομή $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ για την οποία $R_1 + R_2 = 1.9772$.