22A004 - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
Τελικό Διαγώνισμα

• Διάρκεια Διαγωνίσματος: 3 ώρες. 4 ασκήσεις (το φυλλάδιο έχει 10 σελίδες – ελέγξτε το!).

• Βαθμός διαγωνίσματος = $\min\{$μονάδες$/10, 10\}$. Σύνολο μονάδων: 120.

• Οι απαντήσεις σας σε κάθε ερώτημα πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες. Επιτρέπεται η χρήση (χωρίς απόδειξη) οποιουδήποτε θεωρήματος και οποιασδήποτε ιδιότητας έχει αναφερθεί στο μάθημα ή βρίσκεται στο βιβλίο ή/και στις σημειώσεις ή/και στα φυλλάδια αρκεί να το διευκρινίσετε.

• Αποτέλεσμα για το οποίο δεν υπάρχει επαρκής αιτιολόγηση στο γραπτό δεν προσμετράται στη βαθμολόγηση. Στην περίπτωση αριθμητικού αποτελέσματος που υπολογίστηκε με αριθμομηχανή πρέπει να δώσετε τον τύπο που χρησιμοποιήσατε ή να επισυνάψετε το πρόχειρο στο οποίο κάνατε τις πράξεις.

• Βεβαιωθείτε ότι έχετε γράψει το όνομά σας σε όλα τα φύλλα που έχετε χρησιμοποιήσει, συμπεριλαμβανομένων των προχείρων.

• Απαγορεύεται το κάπνισμα μέσα στην αίθουσα κατά τη διάρκεια του διαγωνίσματος. Θα σας επιτραπεί, όμως, να βγείτε έξω για να καπνίσετε. Επίσης, απαγορεύεται επικοινωνία μεταξύ διαγωνιζομένων χωρίς άδεια επιτηρητή. Τέλος, απαγορεύεται η χρήση κινητών τηλεφώνων ή άλλων μέσων επικοινωνίας.

• Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα. Οι λύσεις θα είναι διαθέσιμες σύντομα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Βάρη θεμάτων	
1ο θέμα	30 + 10
2ο θέμα	25
3ο θέμα	20 + 10
4ο θέμα	25

Η ΣΕΛΙΔΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΚΕΝΗ ΕΣΚΕΜΜΕΝΑ

1. **Αποταμίευση (30 + 10 μονάδες)**

   Ένας καταθέτης ανοίγει λογαριασμό με αρχικό κεφάλαιο $X_0 = 1000$ και *μηνιαίο* επιτόκιο 1%. Θεωρούμε ότι το επιτόκιο αυτό είναι εγγυημένο για όσο παραμένει ανοικτός ο λογαριασμός, δηλαδή δε μεταβάλλεται. Επίσης, θεωρούμε ότι ο τόκος υπολογίζεται στο τέλος κάθε μήνα. Στο τέλος κάθε μήνα ο καταθέτης έχει την επιλογή να εισπράξει τον τόκο ή να τον αφήσει στο λογαριασμό, οπότε αυτός προστίθεται στο υπάρχον κεφάλαιο. Θεωρούμε, τέλος, ότι δεν επιτρέπεται στον καταθέτη να εισπράξει ποσό διαφορετικό από τον τόκο στο τέλος κάθε μήνα (ούτε μεγαλύτερο ούτε μικρότερο). Δηλαδή ο καταθέτης πρέπει να εισπράξει είτε τον τόκο του μήνα ή τίποτα.

   (α) **(5 μονάδες)**

   Εάν σε σύνολο N μηνών ο καταθέτης έχει εισπράξει τον τόκο K φορές, δώστε μια έκφραση για το κεφάλαιο, X_N, στο τέλος του $N-$οστού μήνα. Θεωρούμε ότι η X_N ισούται με το κεφάλαιο που απομένει *μετά* από την είσπραξη του τόκου, εφόσον αυτή γίνει. Εάν ο καταθέτης δεν εισπράξει ποτέ τους τόκους, μετά από πόσους μήνες θα έχει διπλασιάσει το αρχικό κεφάλαιο; Δίνεται ότι $1/\log_2(1.01) \approx 69.66$.

   (β) **(15 μονάδες)**

   Θεωρούμε, τώρα, ότι ο καταθέτης ενδέχεται να έχει ανάγκη από τους τόκους, με αποτέλεσμα να τους εισπράττει στο τέλος κάθε μήνα με πιθανότητα 1/4. Η απόφαση αν θα εισπράξει τους τόκους το μήνα i είναι ανεξάρτητη από την απόφασή του το μήνα $j \neq i$.

   Με τι ισούται η από κοινού εντροπία $H(X_0, X_1, \ldots, X_N)$;

   Με τι ισούται ο ρυθμός εντροπίας, $H(\mathcal{X})$;

   Με τι ισούται η από κοινού εντροπία $H(X_0, X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_N)$, για κάποιο $0 < j < N$;

   Δίνεται $\log_2 3 \approx 1.585$.

   (γ) **(10 μονάδες)**

   Δύο φοιτήτριες προσπαθούν να εκτιμήσουν πόσοι μήνες θα χρειαστούν ώστε ο καταθέτης να καταφέρει να *οκταπλασιάσει* το αρχικό του κεφάλαιο. Η εκτίμηση της πρώτης είναι ότι αυτό θα έχει συμβεί σχεδόν σίγουρα σε 209 μήνες. Η δεύτερη ισχυρίζεται ότι η εκτίμηση αυτή είναι παρακινδυνευμένη και υποθέτει ότι θα πρέπει να περιμένουμε τουλάχιστον 279 μήνες. Ποια από τις δύο εκτιμήσεις είναι ορθότερη; Δικαιολογήστε επαρκώς την απάντησή σας. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, θεωρούμε ότι, στο τέλος κάθε μήνα, ο καταθέτης εισπράττει τους τόκους με πιθανότητα 1/4.

   (δ) (**<u>Δύσκολο</u>: 10 μονάδες (επιπλέον)**)

   Δώστε μια έκφραση για την τιμή της $H(X_N)$ για $N \to \infty$.

   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κεντρικό οριακό θεώρημα. Η έκφραση που θα προκύψει είναι συνάρτηση του N.

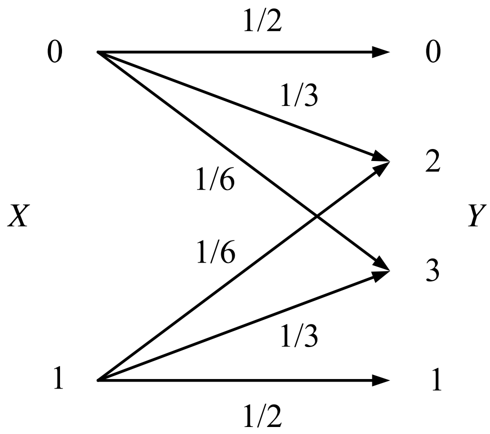
Η ΣΕΛΙΔΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΚΕΝΗ ΕΣΚΕΜΜΕΝΑ

2. **Διακριτά Κανάλια Χωρίς Μνήμη (25 μονάδες)**

(α) **(8 μονάδες)**

Θεωρήστε το Διακριτό Κανάλι Χωρίς Μνήμη του Σχήματος 1, το οποίο ονομάζουμε "Κανάλι 1". Υπολογίστε τη χωρητικότητά του, C_1, καθώς και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.

Δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.



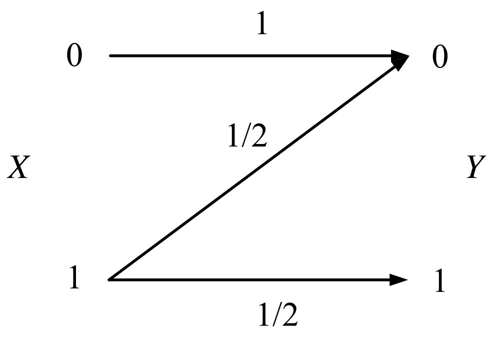
Σχήμα 1: Κανάλι 1.

(β) **(3 μονάδες)**

Έστω, τώρα, ότι χρησιμοποιούμε το Κανάλι 1 με ανάδραση. Ωστόσο, η ανάδραση δεν είναι άμεση. Συγκεκριμένα, η πληροφορία για το Y_n φτάνει στον πομπό τη χρονική στιγμή $n + 5$. Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού, $C_{1,FB}$;

(γ) **(4 μονάδες)**

Θεωρήστε, τώρα, το κανάλι του Σχήματος 2 το οποίο ονομάζουμε "Κανάλι 2". Υπολογίστε τη χωρητικότητά του, C_2, καθώς και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.



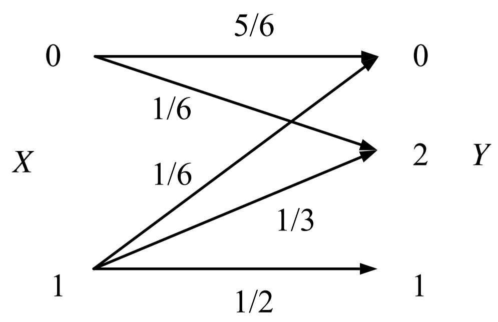
Σχήμα 2: Κανάλι 2.

(δ) (**10 μονάδες**)

Δώστε ένα *άνω* και ένα *κάτω* φράγμα για τη χωρητικότητα C_3 του καναλιού του Σχήματος 3 το οποίο ονομάζουμε "Κανάλι 3". Τα φράγματα που θα υπολογίσετε δε θα πρέπει να απέχουν μεταξύ τους περισσότερο από 0.25 bits.

Τι περιμένετε *διαισθητικά* για την κατανομή εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα του Καναλιού 3; Είναι ομοιόμορφη; Εάν όχι, ποιο σύμβολο εισόδου χρησιμοποιούμε πιο συχνά;

Υπόδειξη: Είναι πολύ πιο γρήγορο, αντί να κάνετε πράξεις, να χρησιμοποιήσετε αποτελέσματα προηγούμενων ερωτημάτων.

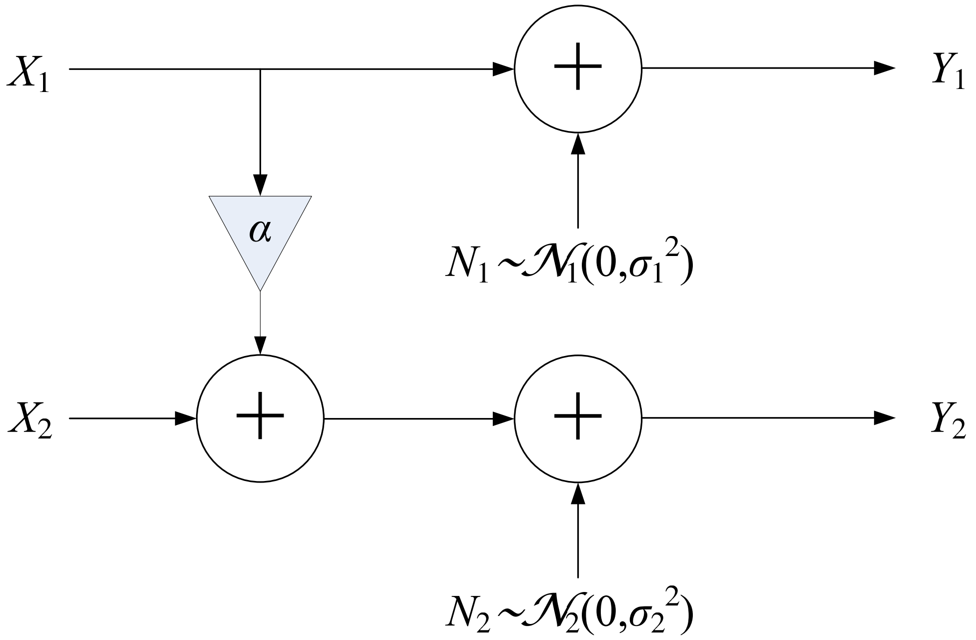


Σχήμα 3: Κανάλι 3.

3. **Μετάδοση δύο χρηστών (20 + 10 μονάδες)**

Θεωρούμε το μοντέλο καναλιού του Σχήματος 4. Ο χρήστης 1 και ο χρήστης 2 είναι *ανεξάρτητοι*, δηλαδή ο ένας δεν μπορεί να γνωρίζει το σήμα που στέλνει ο άλλος. Ωστόσο, οι δύο χρήστες μπορούν να "συμφωνήσουν" στο πώς θα μοιραστεί η συνολική ισχύς, P, που είναι διαθέσιμη για τη μετάδοση και των δύο χρηστών. Δηλαδή, εάν P_1 και P_2 είναι η ισχύς που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο χρήστης 1 και 2, αντίστοιχα, $P = P_1 + P_2$, αλλά οι τιμές των P_1 και P_2 μπορούν να μεταβληθούν (αρκεί το άθροισμά τους να μην υπερβαίνει το P). Οι προσθετικοί θόρυβοι N_1 και N_2 είναι Γκαουσιανοί, ανεξάρτητοι μεταξύ τους, ανεξάρτητοι των εισόδων X_1 και X_2, μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς σ_1^2 και σ_2^2, αντίστοιχα. Στη γενική περίπτωση, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Επίσης, όπως φαίνεται στο σχήμα, υπάρχει "διαρροή" μέρους του σήματος του χρήστη 1 στο κανάλι του χρήστη 2. Η διαρροή αυτή ποσοτικοποιείται από τη σταθερά $\alpha \geq 0$. Πιο συγκεκριμένα, $Y_2 = \alpha X_1 + X_2 + N_2$.



Σχήμα 4: Μετάδοση δύο χρηστών με "διαρροή".

(α) **(8 μονάδες)**

Θεωρήστε, κατ' αρχάς, ότι $\alpha = 0$, δηλαδή ότι δεν υπάρχει διαρροή και ότι οι P_1 και P_2 έχουν κάποια προκαθορισμένη τιμή η οποία *δεν* μπορεί να μεταβληθεί. Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού με είσοδο $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ και έξοδο $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$, καθώς και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Παρατηρήστε ότι ο δέκτης έχει πρόσβαση και στις δύο εξόδους Y_1 και Y_2.

(β) (**12 μονάδες**)

Έστω, τώρα, ότι $\alpha > 0$. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, οι ισχείς P_1 και P_2 είναι προκαθορισμένες. Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού με είσοδο $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ και έξοδο $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ όταν οι X_1 και X_2 είναι *ανεξάρτητες* καθώς και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το ερώτημα (α) και σχολιάστε.

Διευκρίνιση: Θεωρούμε ότι η ενέργεια που απαιτείται για τη "διαρροή" προσφέρεται από το κανάλι, ότι, δηλαδή, δεν προέρχεται από την ισχύ (P_1 και P_2, αντίστοιχα) η οποία είναι διαθέσιμη στους χρήστες. Επομένως, στο κανάλι 1 στέλνεται ισχύς P_1, στο δε κανάλι 2 ισχύς $\alpha^2 P_1 + P_2$.

(γ) (**Χρονοβόρο. 10 μονάδες (επιπλέον)**)

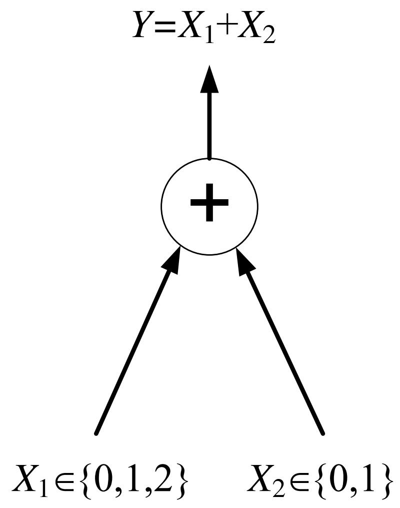
Υποθέτουμε, τώρα, ότι οι P_1 και P_2 μπορούν να μεταβάλλονται, αρκεί να ισχύει πάντοτε $P_1 + P_2 \leq P$. Βρείτε ποιες είναι οι τιμές των P_1 και P_2 που μεγιστοποιούν τη χωρητικότητα, καθώς και την τιμή της χωρητικότητας. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, θεωρούμε *ανεξάρτητες* X_1 και X_2.

Υπόδειξη: Θα χρειαστεί να διακρίνετε περιπτώσεις, ανάλογα με τις τιμές των σ_1^2 και σ_2^2. Επίσης, δε χρειάζεται να απλοποιήσετε τυχόν πολύπλοκες εκφράσεις για τη χωρητικότητα. Αρκεί να διακρίνετε περιπτώσεις σωστά και να δείξετε με ξεκάθαρο τρόπο πώς προκύπτει ο μαθηματικός τύπος που δίνει τη χωρητικότητα.

4. **Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο (25 μονάδες)**

   Στο κανάλι του Σχήματος 5, δύο χρήστες (1 και 2) επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα δέκτη. Ο δέκτης λαμβάνει το άθροισμα, $Y = X_1 + X_2$, των σημάτων X_1 και X_2 του χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα. Ο χρήστης 1 μεταδίδει ένα από τα σύμβολα 0, 1 και 2, ενώ ο χρήστης 2 το σύμβολο 0 ή το σύμβολο 1. Οι χρήστες δε συνεννοούνται μεταξύ τους πριν μεταδώσουν. Ωστόσο, θεωρούμε ότι γνωρίζουν την κατανομή $p_{X_i}(x_i)$ με την οποία πρέπει να μεταδώσουν (για παράδειγμα, μπορεί να τους την έχει γνωστοποιήσει ο δέκτης πριν αρχίσει η μετάδοση).

   Δίνεται, επίσης, ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.



Σχήμα 5: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο.

   (α) **(4 μονάδες)**
   Βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ρυθμός μετάδοσης R_1 του χρήστη 1. Επαναλάβετε για το ρυθμό μετάδοσης R_2 του χρήστη 2. Βρείτε, επίσης, την κατανομή $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ που επιτυγχάνει το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, R_i, σε κάθε περίπτωση.

   (β) **(4 μονάδες)**
   Δώστε μια έκφραση για τη μέγιστη τιμή του *αθροίσματος* $R_1 + R_2$ των ρυθμών με τους οποίους μπορούν να μεταδώσουν *ταυτόχρονα* οι δύο χρήστες (sum capacity του καναλιού). Η έκφραση αυτή μπορεί να είναι συνάρτηση εντροπιών (ή/και δεσμευμένων εντροπιών) τυχαίων μεταβλητών και θα πρέπει να έχει όσο γίνεται λιγότερους όρους. Προς το παρόν δε χρειάζεται να βρείτε κάποια τιμή για τη sum capacity.

(γ) **(3 μονάδες)**

Με βάση το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος δώστε ένα *άνω* φράγμα για τη sum capacity. Το φράγμα αυτό δεν είναι απαραίτητο να είναι επιτεύξιμο.

(δ) **(5 μονάδες)**

Δώστε ένα παράδειγμα κατανομής $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ με την οποία μπορεί να επιτευχθεί η sum capacity. Συγκρίνετε με το άνω φράγμα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Υπόδειξη: Για να μην αναλωθείτε σε πράξεις και να απαντήσετε γρήγορα στο ερώτημα, προσπαθήστε να βρείτε εάν είναι δυνατόν ο κάθε χρήστης να μεταδίδει με $R_1 = R_2 = C_{\text{sum}}/2$.

(ε) **(4 μονάδες)**

Υπάρχει τρόπος ο χρήστης 1 να μεταδίδει με το μέγιστο ρυθμό μετάδοσής του, $R_{1,\max}$ και ο χρήστης 2 με $R_2 = C_{\text{sum}} - R_{1,\max}$; Εάν ναι, με ποια κατανομή επιτυγχάνεται αυτό; Εάν όχι, με τι ισούται η διαφορά $C_{\text{sum}} - (R_{1,\max} + R_2)$; Συγκρίνετε με την περίπτωση Γκαουσιανού MAC.