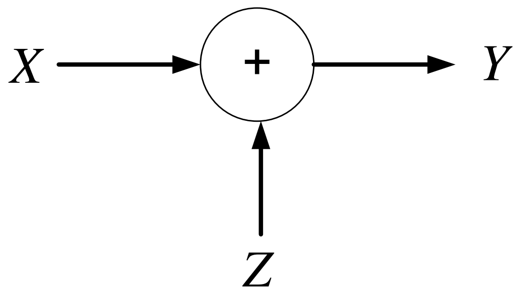
ΕΕ728 (22Α004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
2η Σειρά Ασκήσεων
(Χωρητικότητα Καναλιού)

Παράδοση: 2η διάλεξη μετά τις διακοπές του Πάσχα.

1. **Κανάλι Προσθετικού Θορύβου**

   Βρείτε τη χωρητικότητα του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη του σχήματος.

   Δίνεται ότι $\Pr\{Z = 0\} = \Pr\{Z = \alpha\} = \frac{1}{2}$. Η τ.μ. X παίρνει τιμές στο αλφάβητο $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. Υποθέστε ότι η Z είναι ανεξάρτητη της X.

   Παρατηρήστε ότι η χωρητικότητα του καναλιού εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου a.

2. **Χωρητικότητα καναλιού modulo**

   Θεωρούμε το κανάλι $Y = X + Z \pmod{11}$, και $Z \sim \mathrm{Unif}\{1, 2, 3\}$ και $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 10\}$.

   (α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού.

   (β) Ποια είναι η βέλτιστη κατανομή $p^*(x)$ που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα;

   Υπενθύμιση: $X \bmod a$: Το υπόλοιπο της διαίρεσης του X με το a.

3. **Επεξεργασία εξόδου καναλιού**

   Θεωρούμε Διακριτό Κανάλι Χωρίς Μνήμη με πιθανότητες μετάβασης $p(y|x)$ και χωρητικότητα $C = \max_{p(x)} I(X; Y)$.

(α) Δείξτε ότι δεν υπάρχει τρόπος να αυξήσουμε τη χωρητικότητα εάν επεξεργαστούμε την έξοδο Y με χρήση συνάρτησης $g()$. Δηλαδή, εάν $Z = g(Y)$, η χωρητικότητα του καναλιού με είσοδο X και έξοδο Z δε μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα καναλιού με είσοδο X και έξοδο Y.

(β) Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει ώστε η χωρητικότητα να μην ελαττώνεται μετά την επεξεργασία της Y;

4. **Ενθόρυβη Γραφομηχανή**

Έστω μια γραφομηχανή με 24 πλήκτρα (όσα και τα γράμματα του Ελληνικού Αλφαβήτου).

(α) Θεωρούμε, κατ' αρχήν, ότι κάθε φορά που πατάμε ένα πλήκτρο τυπώνεται το αντίστοιχο γράμμα. Σχεδιάστε το κανάλι και υπολογίστε τη χωρητικότητά του σε bits/χτύπο. Με ποια κατανομή επιτυγχάνεται η χωρητικότητα του καναλιού; Ποιο είναι το μικρότερο μήκος κώδικα με το οποίο επιτυγχάνεται (ακριβώς) μηδενική πιθανότητα σφάλματος και ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μετάδοσης; Ποιο είναι το βιβλίο κωδίκων;

(β) Έστω, τώρα, ότι η γραφομηχανή είναι ελαττωματική και κάθε φορά που πατάμε ένα πλήκτρο τυπώνεται είτε το γράμμα που αντιστοιχεί στο πλήκτρο ή το επόμενό του αλφαβητικά (Α $\rightarrow$ Β, Β $\rightarrow$ Γ, ..., Ω $\rightarrow$ Α) με ίδια πιθανότητα (1/2). Επαναλάβετε το ερώτημα (α).

(γ) Επαναλάβετε τα ερωτήματα (α) και (β) για γραφομηχανή με 25 πλήκτρα.

5. **Κανάλια ("Θεωρία Πληροφορίας", Τελικό Διαγώνισμα, Φεβρουάριος 2008)**

Έστω

$$P(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix}$$

ο πίνακας μετάβασης ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα σφάλματος ϵ.

Επίσης, ορίζεται η πράξη $*$ ως εξής:

$$a * b = (1-a)b + a(1-b).$$

(α) Να αποδείξετε ότι το κανάλι το οποίο έχει για πίνακα μετάβασης το γίνομενο $P(\epsilon_1)P(\epsilon_2)$ είναι ισοδύναμο με ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι του οποίου η πιθανότητα σφάλματος ισούται με $\epsilon_1 * \epsilon_2$.

(β) Δώστε μια φυσική ερμηνεία της παρακάτω ανισότητας, καθώς και την απόδειξή της

$$1 - H(\epsilon_1 * \epsilon_2) \leq \min\left(1 - H(\epsilon_1), 1 - H(\epsilon_2)\right),$$

εάν γνωρίζετε ότι ισχύουν οι ανισότητες: $|0.5 - \epsilon_1 * \epsilon_2| \leq |0.5 - \epsilon_1|$ και $|0.5 - \epsilon_1 * \epsilon_2| \leq |0.5 - \epsilon_2|$.

(γ) Να αποδείξετε ότι το κανάλι το οποίο έχει για πίνακα μετάβασης το γινόμενο $P^\nu(\epsilon)$ είναι ισοδύναμο με ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι του οποίου η πιθανότητα σφάλματος δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{2}[1-(1-2\epsilon)^\nu]$. Σε αυτήν την περίπτωση, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;

6. **Χωρητικότητα καναλιού Ταχυδρομικών περιστεριών**

Μια ομάδα αποκλεισμένων μαχητών επικοινωνεί με τους συμμάχους τους με χρήση ταχυδρομικών περιστεριών. Θεωρούμε ότι κάθε ταχυδρομικό περιστέρι μπορεί να μεταφέρει ένα σύμβολο `ASCII` (8 bits), ότι ένα περιστέρι στέλνεται κάθε 5 λεπτά της ώρας και ότι χρειάζεται πάντα 3 ακριβώς λεπτά της ώρας για να φτάσει στον προορισμό του.

(α) Εάν όλα τα περιστέρια καταφέρνουν να φτάσουν στον προορισμό τους, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού σε bits/ώρα;

(β) Έστω ότι ο παραλήπτης γνωρίζει ότι τα περιστέρια στέλνονται με σταθερό ρυθμό οπότε μπορεί να ανιχνεύσει εάν ένα περιστέρι δε φτάσει στον προορισμό του. Εάν οι αντίπαλοι καταφέρνουν να σκοτώνουν ποσοστό α των περιστεριών $(0 \leq \alpha \leq 1)$, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού; Πώς θα μοντελοποιούσατε το κανάλι;

(γ) (πιο δύσκολο) Θεωρούμε, τώρα, ότι οι αντίπαλοι είναι πιο πονηροί και, αντί να σκοτώσουν τα περιστέρια, αντικαθιστούν το σύμβολο `ASCII` που στέλνει το περιστέρι με ένα διαφορετικό (από τα 255 πιθανά). Το σύμβολο αντικατάστασης επιλέγεται με βάση ομοιόμορφη κατανομή. Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού; Πώς θα μοντελοποιούσατε το κανάλι;

7. **Τα κανάλια με μνήμη έχουν μεγαλύτερη χωρητικότητα**

Θεωρήστε το κανάλι $Y_i = X_i \oplus Z_i$, όπου $\oplus$ πρόσθεση modulo-2 (XOR). Οι μεταβλητές X_i και Y_i είναι δυαδικές, αλλά όχι, κατ' ανάγκη, ομοιόμορφα κατανεμημένες. Έστω, επίσης, ότι η Z_i έχει σταθερή μάζα πυκνότητας πιθανότητας $\Pr\{Z_i = 1\} = p = 1 - \Pr\{Z_i = 0\}$. Ωστόσο, οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ *δεν* είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες.

(α) Δώστε ένα σχεδιάγραμμα του καναλιού. Μοιάζει με κάποιο γνωστό σας κανάλι; Σε τι διαφέρει (αν διαφέρει);

(β) Εάν οι Z_i είναι ανεξάρτητες, αν, δηλαδή, το κανάλι δεν έχει μνήμη, ποια είναι η χωρητικότητά του και με ποια κατανομή $p(x)$ επιτυγχάνεται; Ονομάστε αυτή τη χωρητικότητα C.

(γ) Επιστρέφοντας στη γένική περίπτωση όπου οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ δεν είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες, δείξτε ότι, εάν η είσοδος είναι ανεξάρτητη και ομοίως κατανεμημένη $Bern(1/2)$,

$$I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \geq nC,$$

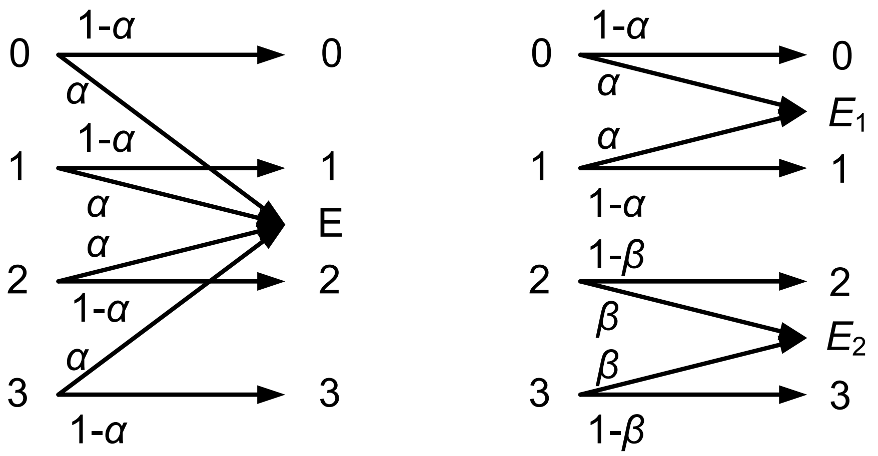
όπου C η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς μνήμη του ερωτήματος (β).

(δ) Με βάση το ερώτημα (γ), συμπεράνετε ότι, για τη χωρητικότητα του καναλιού με μνήμη $C' \triangleq \frac{1}{n} \max_{p(x)} I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, ισχύει $C' \geq C$.

(ε) Δώστε μια διαισθητική δικαιολόγηση για το αποτέλεσμα που αποδείξατε στο (δ), ότι, δηλαδή, η χωρητικότητα των καναλιών χωρίς μνήμη δε μπορεί να υπερβεί τη χωρητικότητα των αντίστοιχων καναλιών με μνήμη.

8. **Τετραδικά Κανάλια διαγραφής (Τελικό διαγώνισμα Ιουνίου 2008)**

Θεωρήστε τα κανάλια διαγραφής χωρίς μνήμη του σχήματος. Στο κανάλι Α στέλνουμε ένα από 4 πιθανά σύμβολα. Ο δέκτης γνωρίζει πότε η μετάδοση έχει γίνει σωστά και πότε έχει προκύψει διαγραφή. Στο κανάλι Β, όπως και στο κανάλι Α, ο πομπός επιλέγει κάθε φορά να μεταδώσει ένα από 4 σύμβολα. Εάν συμβεί διαγραφή ο δέκτης γνωρίζει όχι μόνο ότι συνέβη διαγραφή, αλλά, επιπλέον, το υποσύνολο στο οποίο ανήκει το σύμβολο που μεταδόθηκε από τον πομπό ($\{0, 1\}$ ή $\{2, 3\}$).



Κανάλι Α   Κανάλι Β

(α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού Α και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.

(β) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού Β όταν $\alpha = \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε.

(γ) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού Β όταν $\alpha \neq \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε. Ποια είναι η χωρητικότητα στην ειδική περίπτωση όπου $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ και με ποια κατανομή εισόδου επιτυγχάνεται;