ΕΕ728 (22Α004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
1η Σειρά Ασκήσεων
(Εντροπία, Αμοιβαία Πληροφορία, Ανισότητα Fano, AEP)

Διευκρίνιση: Η επίλυση των ασκήσεων είναι προαιρετική. Σκοπός τους είναι να λειτουργήσουν συμπληρωματικά με τις διαλέξεις.

1. **Εντροπία και Αμοιβαία Πληροφορία ("Θεωρία Πληροφορίας", Πρόοδος 2007)**

   Έστω οι ανεξάρτητες τ.μ. X και Y. Η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με τιμές $\{-1, 1\}$ (δηλαδή $X = 1$ ή $X = -1$ με την ίδια πιθανότητα), ενώ η Y ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με τιμές $\{-a, a\}$, $a \in \mathbf{R}$ (δηλαδή $Y = a$ ή $Y = -a$ με την ίδια πιθανότητα). Το a μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, η οποία, όμως, θεωρείται γνωστή. Η τ.μ. Z δίνεται από τη σχέση $Z = X + Y$. Για όλες τις πιθανές τιμές του a να βρεθούν

   α. (3 μονάδες) Η $H(Y)$.

   β. (3 μονάδες) Η $H(Z)$.

   γ. (3 μονάδες) Η $I(X; Z)$.

2. **Επεξεργασία Δεδομένων**

   Έστω ότι οι τ.μ. $X_1 \to X_2 \to X_3 \to \ldots \to X_n$ σχηματίζουν αλυσίδα Markov, δηλαδή $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1)p(x_2|x_1)\ldots p(x_n|x_{n-1})$. Βρείτε την πιο απλή έκφραση που μπορείτε για την $I(X_1; X_2, X_3, \ldots, X_n)$.

3. **Ανισότητα Fano** Έστω η εξής από κοινού κατανομή μάζας πιθανότητας για τις τ.μ. (X, Y)

		Y		
		a	b	c
X	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
	2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
	3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

   Έστω, επίσης, $\hat{X}(Y)$ εκτιμητής για τη X με βάση την Y και $P_e = \Pr\{\hat{X}(Y) \neq X\}$.

(α) Βρείτε την ελάχιστη πιθανότητα σφάλματος για τον εκτιμητή $\hat{X}(Y)$, καθώς και την P_e για το βέλτιστο εκτιμητή.

(β) Βρείτε το φράγμα για την P_e που προκύπτει από την ανισότητα Fano και συγκρίνετε.

4. **Όριο γινομένου**

   Έστω η ακολουθία $X_1, X_2, \ldots, X_n$ η οποία αποτελείται από ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d.) τ.μ. οι οποίες ακολουθούν την κατανομή

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2} \\ 2 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4} \\ 3 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4} \end{cases}$$

   Να βρεθεί το $\lim_{n\to\infty}(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_{n-1} \cdot X_n)^{1/n}$.

5. **AEP και Σχετική Εντροπία** Έστω ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) διακριτές τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ που ακολουθούν κατανομή μάζας πιθανότητας $p(x)$ και $|\mathcal{X}| < \infty$. Επομένως, $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i)$. Είδαμε ότι $-\frac{1}{n}\log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \to H(X)$ κατά πιθανότητα. Έστω, τώρα, μια άλλη συνάρτηση μάζας πιθανότητας $q(x)$ ορισμένη στον <u>ίδιο</u> δειγματικό χώρο $\mathcal{X}$ με την $p(x)$, και $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n q(x_i)$.

   (α) Βρείτε την τιμή του ορίου $-\frac{1}{n}\log q(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ εάν οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) με κατανομή $p(x)$.

   (β) Βρείτε την τιμή του ορίου $-\frac{1}{n}\log\frac{q(X_1,X_2,\ldots,X_n)}{p(X_1,X_2,\ldots,X_n)}$ (log-likelihood), όπου, και πάλι, οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) με κατανομή $p(x)$. Επομένως, η πιθανότητα να θεωρήσουμε ότι οι X_i ακολουθούν κατανομή $q(x)$ (αντί για $p(n)$) ελαττώνεται εκθετικά με το n και με ρυθμό ανάλογο της $D(p||q)$.