

EE728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

11η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

17 Μαΐου 2011

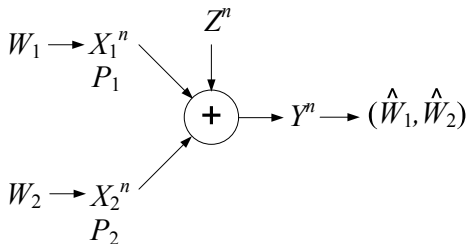
(2η έκδοση, 21/5/2011)

Περιεχόμενα 11ης διάλεξης

- 1 Το Γκαουσιανό MAC
 - Μοντέλο και περιοχή χωρητικότητας
 - Σύγκριση με CDMA, TDMA και FDMA

- 2 Διαχωρισμός πηγής-καναλιού

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών



- Τη χρονική στιγμή i ο δέκτης λαμβάνει σήμα $Y_i = X_{1i} + X_{2i} + Z_i$, όπου ο θόρυβος Z είναι $i.i.d \sim \mathcal{N}(0, N)$. Επίσης, ο κάθε πομπός i υπόκειται σε περιορισμό ισχύος P_i . Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες.

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών (2)

- Για την $I(X_1; Y|X_2)$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
 I(X_1; Y|X_2) &= h(Y|X_2) - h(Y|X_1, X_2) \\
 &= h(X_1 + X_2 + Z|X_2) - h(X_1 + X_2 + Z|X_1, X_2) \\
 &= h(X_1 + Z|X_2) - h(Z|X_1, X_2) = h(X_1 + Z) - h(Z) \\
 &= h(X_1 + Z) - \frac{1}{2} \log(2\pi eN) \\
 &\stackrel{(a)}{\leq} \frac{1}{2} \log(2\pi e(P_1 + N)) - \frac{1}{2} \log(2\pi eN) \\
 &= \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_1}{N}\right).
 \end{aligned}$$

(a) γιατί;

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών (3)

- Ομοίως, $I(X_2; Y|X_1) \leq \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_2}{N} \right)$.
- Η X_1 και η X_2 πρέπει να ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0, P_1)$ και $\mathcal{N}(0, P_2)$, αντίστοιχα).

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Περιοχή Χωρητικότητας

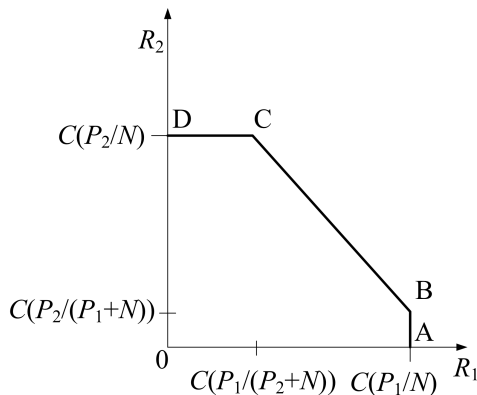
- Ορίζουμε τη χωρητικότητα του καναλιού AWGN με λόγο σήματος προς θόρυβο x ως $C(x) \triangleq \frac{1}{2} \log(1 + x)$.
- Η περιοχή χωρητικότητας του γκαουσιανού MAC 2 χρηστών δίνεται από τις σχέσεις

Χωρητικότητα γκαουσιανού MAC 2 χρηστών

$$R_1 \leq C\left(\frac{P_1}{N}\right), R_2 \leq C\left(\frac{P_2}{N}\right) \text{ και } R_1 + R_2 \leq C\left(\frac{P_1 + P_2}{N}\right)$$

και επιτυγχάνεται με $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P_1)$ και $X_2 \sim \mathcal{N}(0, P_2)$.

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Περιοχή Χωρητικότητας (2)



- Μπορούμε να επιτύχουμε ρυθμό μετάδοσης έως και $C\left(\frac{P_1+P_2}{N}\right)$, σα να είχαμε, δηλαδή, έναν πομπό που εκπέμπει με ισχύ $P_1 + P_2$.

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Σχόλια

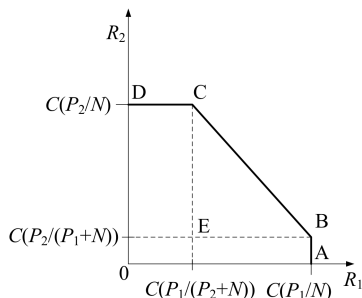
- Θεωρούμε το σημείο B. Ο δέκτης αποκωδικοποιεί πρώτα την πληροφορία του πομπού 2, θεωρώντας τη μετάδοση του πομπού 1 ως θόρυβο: $R_2 = C \left(\frac{P_2}{P_1+N} \right)$.
- Στη συνέχεια, ο δέκτης αφαιρεί από το σήμα Y το αποκωδικοποιημένο σήμα X_2 . Επομένως, το μόνο άγνωστο σήμα που απομένει είναι ο θόρυβος και $R_1 = C \left(\frac{P_1}{N} \right)$.
- Για το σημείο C εφαρμόζεται η αντίθετη διαδικασία. Δηλαδή, αποκωδικοποίηση του X_1 θεωρώντας ότι το X_2 είναι θόρυβος, αφαίρεση του X_1 από το Y και αποκωδικοποίηση του X_2 παρουσία μόνο του θορύβου.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διαδοχική αποκωδικοποίηση (successive decoding), διαδοχική απαλοιφή παρεμβολών (successive interference cancellation - SIC) ή onion peeling.

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Σχόλια (2)

- Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, στην ειδική περίπτωση Γκαουσιανού MAC, μια κατανομή εισόδου (το γινόμενο δύο Γκαουσιανών) αρκεί για να επιτύχουμε οποιοδήποτε σημείο της περιοχής χωρητικότητας.
- Ωστόσο, ανάλογα με το σημείο, αλλάζουν οι κωδικές λέξεις που πρέπει να στείλουμε (και ο αριθμός τους).
- Για παράδειγμα, ένας τρόπος για να μεταδώσουμε με $\max(R, R)$ (στη μέση της ευθείας BC) είναι να μεταδίδουμε το 50% του χρόνου με βιβλίο κωδίκων που επιτυγχάνει το σημείο B και το άλλο 50% με βιβλίο κωδίκων που επιτυγχάνει το σημείο C.
- Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε καλούς κώδικες που έχουν σχεδιαστεί για το κανάλι AWGN ενός χρήστη και στο Γκαουσιανό MAC.

Σύγκριση με CDMA uplink

- Uplink: Μετάδοση πληροφορίας από χρήστες σε σταθμό βάσης. Εμπίπτει στο μοντέλο του MAC (παρόλο που, στη γενική περίπτωση, είναι MAC με διαλείψεις (fading)).
- Στα συμβατικά συστήματα CDMA ο κάθε χρήστης αποκωδικοποιείται θεωρώντας την επικοινωνία των άλλων χρηστών ως παρεμβολή (σημείο E).
- Με χρήση SIC αυξάνεται ο συνολικός ρυθμός μετάδοσης και το πρόβλημα near-far παύει να υφίσταται.



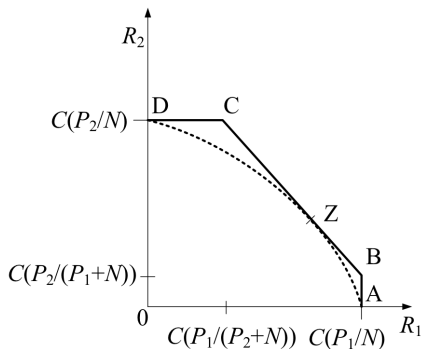
Σύγκριση με FDMA uplink

- Έστω ότι οι δύο χρήστες μοιράζονται το φάσμα. Ο χρήστης 1 χρησιμοποιεί W_1 Hz, ενώ ο χρήστης 2 χρησιμοποιεί W_2 Hz. Το συνολικό φάσμα ισούται με $W_1 + W_2 = W$ Hz.
- Ο κάθε χρήστης εκπέμπει μόνος του στο κανάλι AWGN που του αναλογεί. Επομένως,

$$R_1 = W_1 \log \left(1 + \frac{P_1}{NW_1} \right)$$

$$R_2 = W_2 \log \left(1 + \frac{P_2}{NW_2} \right) = (W - W_1) \log \left(1 + \frac{P_2}{N(W - W_1)} \right)$$

Σύγκριση με FDMA uplink (2)



- Η καμπύλη εφάπτεται με το όριο της περιοχής χωρητικότητας σε ένα μόνο σημείο στο οποίο ισχύει $P_1/W_1 = P_2/W_2$.
- Επομένως, στη γενική περίπτωση, η χρήση FDMA στο MAC είναι υποβέλτιστη (suboptimal).

Σύγκριση με TDMA uplink

- Ο χρήστης 1 μεταδίδει για $\alpha 100\%$ του συνολικού χρόνου. Η μέση ισχύς του κατά τη διάρκεια μετάδοσης είναι P_1/α (έτσι ώστε η συνολική του ενέργεια στη μονάδα του χρόνου να ισούται με P_1).
- Ο χρήστης 2 μεταδίδει για $(1 - \alpha) 100\%$ του συνολικού χρόνου. Η μέση ισχύς του κατά τη διάρκεια μετάδοσης είναι $P_2/(1 - \alpha)$.
- Επομένως,

$$R_1 = \alpha W \log \left(1 + \frac{P_1}{N\alpha W} \right)$$

$$R_2 = (1 - \alpha) W \log \left(1 + \frac{P_2}{N(1 - \alpha)W} \right)$$

- Η ίδια περιοχή, όπως και στην περίπτωση FDMA.

MAC: Σχόλια

- FDMA/TDMA υποβέλτιστες, εκτός εάν $P_i/W_i = c$ για όλους τους χρήστες i .
- CDMA υποβέλτιστη, εκτός εάν ο δέκτης χρησιμοποιεί SIC (onion peeling).
- $\sum_i R_i \leq C \left(\frac{\sum_i P_i}{N} \right)$. Επομένως, για κάθε επιπρόσθετο χρήστη που εμφανίζεται στο κανάλι η συνολική χωρητικότητα αυξάνει!
- Ωστόσο, λόγω της λογαριθμικής σχέσης μεταξύ P και C , η χωρητικότητα ανά χρήστη $\frac{1}{m} C \left(\frac{\sum_i P_i}{N} \right) \rightarrow 0$ για αριθμό χρηστών $m \rightarrow \infty$.

Διαχωρισμός πηγής-καναλιού

- 1 Το Γκαουσιανό MAC
 - Μοντέλο και περιοχή χωρητικότητας
 - Σύγκριση με CDMA, TDMA και FDMA
- 2 Διαχωρισμός πηγής-καναλιού

Εισαγωγή

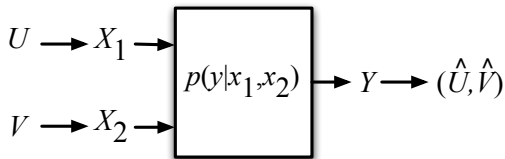
- Θα ολοκληρώσουμε την αναφορά στο MAC με τη εξέταση των διαφορών του από το κανάλι ενός πομπού και ενός δέκτη όσον αφορά
 - το διαχωρισμό πηγής-καναλιού και
 - την ανάδραση
- Θα δούμε ότι υπάρχουν διαφορές.

Διαχωρισμός πηγής-καναλιού

- Είδαμε ότι το θεώρημα διαχωρισμού καναλιού-πηγής για κανάλια ενός χρήστη μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε τη συμπίεση πηγής από τη συμπίεση καναλιού χωρίς να υπάρχει απώλεια στον επιτεύξιμο ρυθμό μετάδοσης πληροφορίας.
- Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι αν η τομή της περιοχής χωρητικότητας του MAC με την περιοχή Shperian-Wolf δεν είναι το κενό σύνολο, είναι εφικτή η μετάδοση πληροφορίας από συσχετισμένες πηγές σε ένα δέκτη μέσω του MAC που παρεμβάλλεται ανάμεσά τους.
- Παρατηρήστε ότι, στη γενική περίπτωση, οι πηγές είναι συσχετισμένες και όχι ανεξάρτητες (όπως υποθέσαμε για τον υπολογισμό της περιοχής χωρητικότητας του MAC).

Διαχωρισμός πηγής-καναλιού (2)

- Το μοντέλο του προβλήματος φαίνεται στο σχήμα.
- Σε αντίθεση με το βασικό μοντέλο κατανεμημένης κωδικοποίησης, στη γενική περίπτωση, ο δέκτης δεν έχει απευθείας πρόσβαση στα X_1 και X_2 .

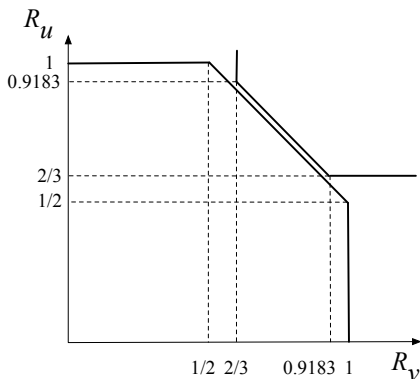


Παράδειγμα 11.1 (Cover & Thomas Example 15.4.2)

- Έστω δυαδικές πηγές U και V με από κοινού κατανομή $p(u, v) = 0$ για $u = 0, v = 1$ και $p(u, v) = 1/3$ για όλους τους άλλους συνδυασμούς u και v .
- Από το θεώρημα Slepian-Wolf γνωρίζουμε ότι, προκειμένου να μπορέσουμε να αποσυμπιέσουμε στο δέκτη με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος πρέπει $R_u > H(U|V) = 2/3$ bits, $R_v > H(V|U) = 2/3$ bits και $R_u + R_v > H(U, V) = \log_2 3$ bits.
- Έστω ότι η μετάδοση γίνεται στο δυαδικό MAC διαγραφής του Παραδείγματος 10.3.

Παράδειγμα 11.1 (2)

- Η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών συμπίεσης και η περιοχή χωρητικότητας του δυαδικού MAC διαγραφής έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα.
- Παρατηρούμε ότι οι περιοχές δεν τέμνονται.



Παράδειγμα 11.1 (3)

- Ωστόσο, στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να μεταδώσουμε την πληροφορία των U και V με μηδενική πιθανότητα σφάλματος, μεταδίδοντας απλώς την τιμή τους.
- Αν $Y = 0$, $U = V = 0$. Αν $Y = 1$, $U = 1$ και $V = 0$. Αν $Y = 2$, $U = V = 1$.
- Επομένως, το θεώρημα διαχωρισμού πηγής-καναλιού δεν ισχύει πάντοτε σε κανάλια πολλών χρηστών!
- Δηλαδή, το να προσπαθούμε να σχηματίζουμε ανεξάρτητη πληροφορία από κάθε πομπό (όπως επιχειρεί η κωδικοποίηση Slepian-Wolf) και μετά να τη μεταδίδουμε, δεν είναι πάντοτε βέλτιστο.

Παράδειγμα 11.1 (4)

- Γιατί δεν ισχύει το θεώρημα διαχωρισμού πηγής-καναλιού στο MAC;
- Στο MAC υποθέτουμε ότι οι πομποί δε συνεργάζονται μεταξύ τους. Εάν επιτρέπεται συνεργασία, δηλαδή επιτρέπεται να ισχύει $p(x_1, x_2) \neq p(x_1)p(x_2)$, η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης είναι υπερσύνολο της περιοχής χωρητικότητας του MAC.
- Επομένως, ενδέχεται ο τρόπος με τον οποίο είναι εξαρτημένες οι δύο πηγές να επιτυγχάνει μεγαλύτερη περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης. Σε αυτήν την περίπτωση είναι προτιμότερο να διατηρήσουμε αυτήν την εξάρτηση αντί να δημιουργήσουμε ανεξάρτητες τ.μ. στους πομπούς (όπως κάνει η κωδικοποίηση Slepian-Wolf).
- Για περισσότερες λεπτομέρειες στο θέμα αυτό δείτε El Gamal & Kim, Κεφ. 15.