

ΕΕ728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

10η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

10 Μαΐου 2011
(2η έκδοση, 14/4/2011)

Περιεχόμενα 10ης διάλεξης

- 1 Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel - MAC)
 - Εισαγωγή και Ορισμοί
 - Περιοχή χωρητικότητας
 - Παραδείγματα
 - Γενική μορφή περιοχής χωρητικότητας MAC

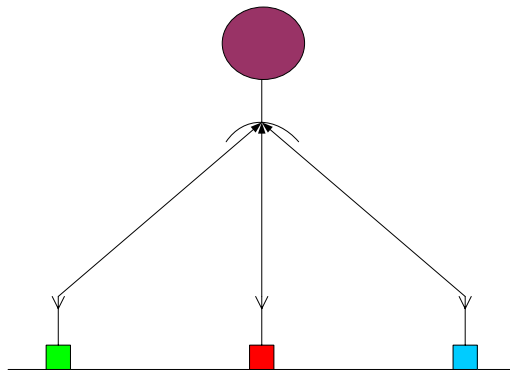
Αντιστοιχία με συγγράμματα

- Cover & Thomas: 15.1.1 – 15.1.2, 15.3 (χωρίς την απόδειξη του Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού)
- Gallager: Το βιβλίο του Gallager δεν αναφέρεται σε κανάλια πολλών χρηστών.
- Tse & Viswanath, Fundamentals of Wireless Communication (δωρεάν πρόσβαση στην Ιστοσελίδα του David Tse): 6.1 (για το Γκαουσιανό MAC).
- El Gamal & Kim: Κεφάλαιο 4.

Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel - MAC)

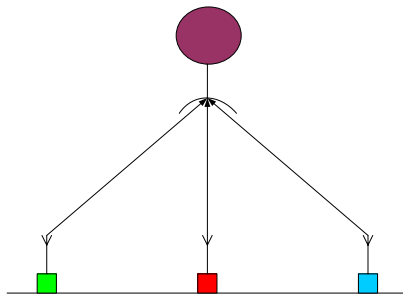
- 1 Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel - MAC)
 - Εισαγωγή και Ορισμοί
 - Περιοχή χωρητικότητας
 - Παραδείγματα
 - Γενική μορφή περιοχής χωρητικότητας MAC

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel)



- Πολλοί χρήστες που επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα κεντρικό σταθμό. Παράδειγμα: Κινητά τερματικά προς σταθμό βάσης.
- Το κανάλι πολλών χρηστών που έχει κατανοηθεί καλύτερα.

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (MAC) (2)



- Έως τώρα, η παράμετρος που επηρέαζε την επικοινωνία ήταν ο θόρυβος (η τυχαιότητα του καναλιού). Στο MAC, επιπλέον του θορύβου, η επικοινωνία επηρεάζεται από παρεμβολές (interference).
- Πόση πληροφορία μπορούμε να μεταδώσουμε για κάθε χρήστη, και πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι χωρητικότητες των χρηστών;

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (MAC) – Ορισμοί

- Για απλοποίηση, θα αναφερθούμε, κατ' αρχάς, σε MAC 2 χρηστών.
- **Ορισμός 10.1** Διακριτό MAC χωρίς μνήμη: Αποτελείται από 3 αλφάβητα \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 και \mathcal{Y} και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $p(y|x_1, x_2)$.
- **Ορισμός 10.2** Κώδικας $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το MAC: Αποτελείται από δύο σύνολα ακεραίων $\mathcal{W}_1 = \{1, 2, \dots, 2^{nR_1}\}$ και $\mathcal{W}_2 = \{1, 2, \dots, 2^{nR_2}\}$ (σύνολα μηνυμάτων – message sets), δύο συναρτήσεις κωδικοποίησης (encoding functions):

$$X_1 : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1^n \text{ και}$$

$$X_2 : \mathcal{W}_2 \rightarrow \mathcal{X}_2^n,$$

και μια συνάρτηση αποκωδικοποίησης (decoding function)

$$g : \mathcal{Y}^n \rightarrow \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2.$$

- Θεωρούμε τέλειο συγχρονισμό μεταξύ των χρηστών.

Μετάδοση στο MAC

- Ο χρήστης 1 επιλέγει ένα από 2^{nR_1} μηνύματα και στέλνει την αντίστοιχη κωδική λέξη στο κανάλι. Ομοίως, ο χρήστης 2 επιλέγει ένα από 2^{nR_2} μηνύματα ανεξάρτητα από το χρήστη 1 και εκπέμπει την αντίστοιχη κωδική λέξη.
- **Ορισμός 10.3** Μέση Πιθανότητα Σφάλματος:

$$P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{n(R_1+R_2)}} \sum_{(w_1, w_2) \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2} \Pr \{g(Y^n) \neq (w_1, w_2) | \text{εστάλη το } (w_1, w_2)\}$$

- **Ορισμός 10.4** Ένα ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι εφικτό (achievable) για το MAC εάν υπάρχει ακολουθία κωδικών $(2^{nR_1}, 2^{nR_2}, n)$ τέτοια ώστε $P_e^{(n)} \rightarrow 0$ για $n \rightarrow \infty$.
- **Ορισμός 10.5** Η περιοχή χωρητικότητας (capacity region) του MAC είναι το κλειστό σύνολο (closure) των εφικτών (R_1, R_2) .

Η περιοχή χωρητικότητας του MAC είναι κυρτή

- Έστω $\mathbf{R}_1 = (R_{1,1}, R_{2,1})$ και $\mathbf{R}_2 = (R_{1,2}, R_{2,2})$ δύο ζεύγη ρυθμών μετάδοσης που ανήκουν στην περιοχή χωρητικότητας, \mathcal{C} , του MAC.
- Μπορούμε να μεταδώσουμε με οποιοδήποτε κυρτό συνδυασμό $\lambda \mathbf{R}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{R}_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, μεταδίδοντας με \mathbf{R}_1 100λ % του χρόνου και με \mathbf{R}_2 $100(1 - \lambda)$ % του χρόνου (timesharing).
- Η πιθανότητα σφάλματος του κώδικα με timesharing είναι \leq του αθροίσματος των πιθανοτήτων σφάλματος των επι μέρους κωδίκων (και, επομένως, μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή).
- Επομένως, η περιοχή χωρητικότητας του MAC (και κάθε καναλιού στο οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε timesharing) είναι κυρτή (convex).

Περιοχή Χωρητικότητας MAC

- **Θεώρημα 10.6** (Cover 15.3.1): Η περιοχή χωρητικότητας του MAC $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y|x_1, x_2), \mathcal{Y})$ είναι το κλειστό σύνολο (closure) του κυρτού κύτους (convex hull) όλων των (R_1, R_2) που ικανοποιούν τις σχέσεις

Περιοχή ρυθμών (rate region) MAC 2 χρηστών για δεδομένη $p(x_1)p(x_2)$

$$R_1 < I(X_1; Y|X_2),$$

$$R_2 < I(X_2; Y|X_1),$$

$$R_1 + R_2 < I(X_1, X_2; Y)$$

για κάποια κατανομή $p_1(x_1)p_2(x_2)$ στο σύνολο $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.

Περιοχή Χωρητικότητας MAC (2)

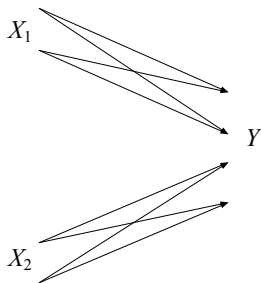
- Δηλαδή, αν ονομάσουμε $\mathcal{R}(p_1, p_2)$ την περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης για συγκεκριμένες κατανομές $p_1 = p(X_1)$ και $p_2 = p(X_2)$ (δηλαδή την περιοχή της προηγούμενης διαφάνειας),

Περιοχή χωρητικότητας MAC 2 χρηστών

$$\mathcal{C} = \text{convex closure of } \cup_{p_1, p_2} \mathcal{R}(p_1, p_2).$$

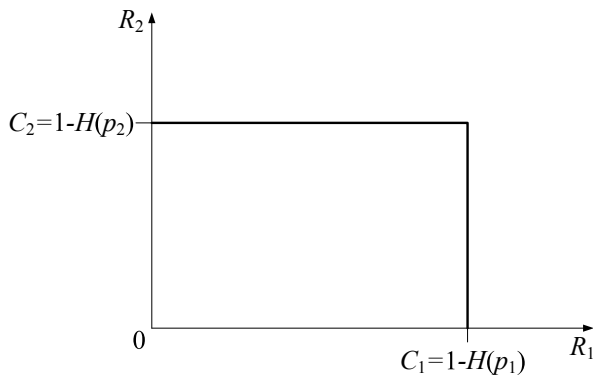
- Δε θα το αποδείξουμε στο μάθημα.
- Σημείωση: Η κατανομή εισόδου είναι $p_1(x_1)p_2(x_2)$ γιατί θεωρούμε ότι οι χρήστες δεν μπορούν να συνεργαστούν.
- Υπάρχουν και άλλοι, πιο χρήσιμοι τρόποι να εκφράσουμε τη \mathcal{C} (με χρήση time-sharing variable Q), αλλά δε θα επεκταθούμε (δείτε π.χ. El Gamal & Kim και Cover & Thomas).

Παράδειγμα 10.1 - Ανεξάρτητα BSC



- Μπορούμε να στείλουμε με $R_1 = 1 - H(p_1)$ από το 1ο κανάλι, και, ταυτόχρονα, με ρυθμό $R_2 = 1 - H(p_2)$ από το 2ο κανάλι.
- Τα δύο κανάλια είναι ανεξάρτητα \rightarrow δεν εμφανίζεται παρεμβολή.

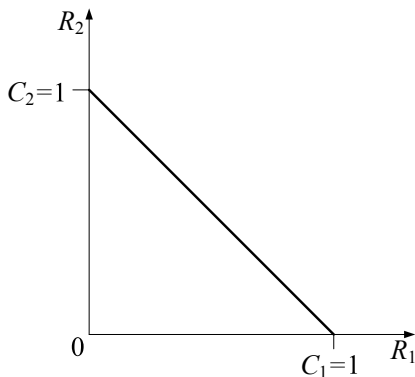
Παράδειγμα 10.1 - Ανεξάρτητα BSC – Περιοχή Χωρητικότητας



Παράδειγμα 10.2 - Δυαδικό Πολλαπλασιαστικό Κανάλι

- Οι X_1 και X_2 παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$.
 $Y = X_1 X_2$.
- Όταν $X_1 = 1$, μπορούμε να στείλουμε $R_2 = 1$ bit/χρήση καναλιού με χρήση ομοιόμορφης κατανομής για τη X_2 . $R_1 = 0$, δεδομένου ότι η X_1 δεν αλλάζει.
- Ομοίως, όταν $X_2 = 1$, μπορούμε να στείλουμε $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού με χρήση ομοιόμορφης κατανομής για τη X_1 . $R_2 = 0$.
- Μπορούμε να πετύχουμε οποιοδήποτε ζεύγος $(\lambda, 1 - \lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ με διαμέριση στο χρόνο (timesharing). Δηλαδή, "παγώνουμε" το X_2 για 100λ % του χρόνου και μεταδίδουμε με ομοιόμορφα κατανεμημένη X_1 (αντίστροφα για το υπόλοιπο $100(1 - \lambda)$ %).

Παράδειγμα 10.2 - Δυαδικό Πολλαπλασιαστικό Κανάλι – Περιοχή Χωρητικότητας



Παράδειγμα 10.3 - Δυαδικό MAC Διαγραφής

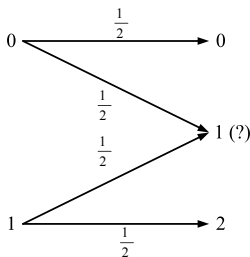
- Οι X_1 και X_2 παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$.
 $Y = X_1 + X_2$.
- Εάν $Y = 1$ δε γνωρίζουμε εάν η είσοδος ήταν $(X_1, X_2) = (1, 0)$ ή $(0, 1)$.
- Εάν θέσουμε $X_1 = 1$, μπορούμε να μεταδώσουμε με $R_2 = 1$ bit/χρήση καναλιού (με ομοιόμορφη X_2).
- Εάν θέσουμε $X_2 = 1$, μπορούμε να μεταδώσουμε με $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού (με ομοιόμορφη X_1).
- Μπορούμε να στείλουμε με $R_1 + R_2 > 1$ bit/χρήση καναλιού;

Παράδειγμα 10.3 - Δυαδικό MAC Διαγραφής (2)

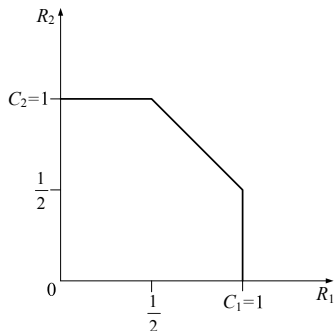
- Έστω ότι χρησιμοποιούμε ομοιόμορφη X_1 . Επομένως, $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού.
- Έστω, επίσης, ότι ο δέκτης αποκωδικοποιεί πρώτα το X_2 . Όταν $Y = X_1 + X_2 = 0$ ή $Y = 2$, γνωρίζουμε το X_2 (ισούται με 0 και 1, αντίστοιχα).
- Αντίθετα, αν $Y = 1$, δεν μπορούμε να βρούμε άμεσα το X_2 .
- Αν δούμε το X_1 ως ένα μηχανισμό διαγραφής, όταν $X_1 = X_2$ δεν εμφανίζεται διαγραφή, ενώ, αντίθετα, όταν $X_1 \neq X_2$ το X_2 διαγράφεται.
- Επομένως, από τη σκοπιά του χρήστη 2 το κανάλι είναι δυαδικό κανάλι διαγραφής με πιθανότητα διαγραφής $p = 1/2$.
- Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι, αν $R_2 > 1 - 1/2 = 1/2$, ο χρήστης 2 μπορεί να μεταδώσει $1/2$ bit/χρήση του καναλιού.

Παράδειγμα 10.3 - Δυαδικό MAC Διαγραφής (3)

- Στη συνέχεια, ο δέκτης αφαιρεί την τιμή του X_2 (την οποία γνωρίζει με πιθανότητα σφάλματος που τείνει στο 0) από το Y , οπότε απομένει το X_1 (χωρίς θόρυβο).
- Επομένως, μπορούμε να στείλουμε 1 bit του χρήστη 1 και $1/2$ bit του χρήστη 2!
- Στο σχήμα εικονίζεται το κανάλι όπως το βλέπει ο δέκτης στο 1ο βήμα (αποκωδικοποίηση X_2).



Παράδειγμα 10.3 - Δυαδικό MAC Διαγραφής – Περιοχή Χωρητικότητας



- Μπορούμε, επίσης, να αρχίσουμε από το X_1 (οπότε το μέγιστο που μπορεί να μεταδώσει ο χρήστης 1 είναι $1/2$ bit/χρήση του καναλιού).
- Μπορούμε, επίσης, να επιτύχουμε οποιοδήποτε ζεύγος $(R_1, R_2) = (0.5 + \alpha, 1 - \alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 0.5$ με timesharing.

Περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης (Rate Region)

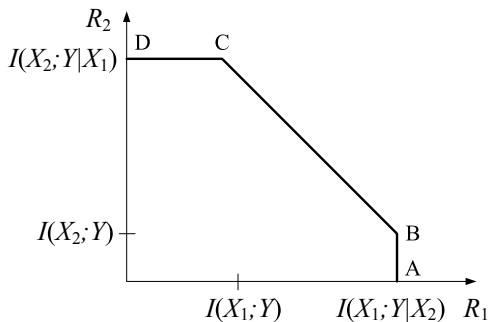
- Υπενθυμίζεται ότι, για δεδομένη $p(x_1)p(x_2)$ στο σύνολο $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης δίνεται από τις ανισότητες

$$R_1 < I(X_1; Y|X_2),$$

$$R_2 < I(X_2; Y|X_1),$$

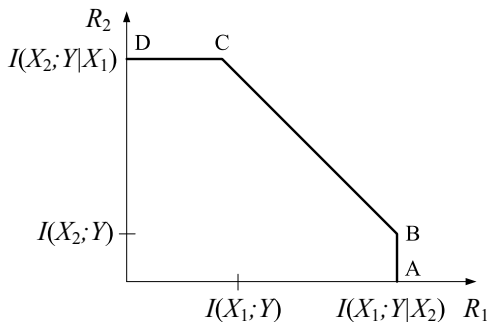
$$R_1 + R_2 < I(X_1, X_2; Y).$$

Περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης (Rate Region) (2)



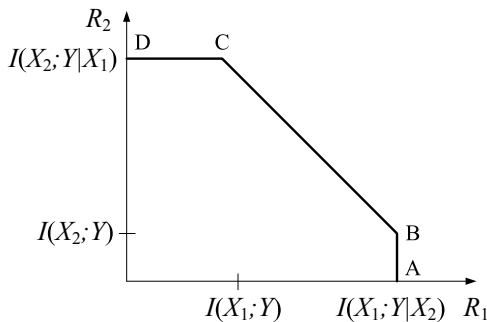
- Θεωρούμε δεδομένη $p(x_1)p(x_2)$. Η περιοχή επιτευχθέντων ρυθμών μετάδοσης (όχι η περιοχή χωρητικότητας) φαίνεται στο Σχήμα.
- Σημείο B: Η X_1 αποτελεί θόρυβο για τη μετάδοση της X_2 . Ο μέγιστος ρυθμός για τη μετάδοση της X_2 ισούται με $I(X_2; Y)$. Στο δέκτη, ανιχνεύεται αρχικά η X_2 .

Περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης (Rate Region) (2)



- Δεδομένης, τώρα, της τιμής x_2 της X_2 , ο δέκτης προχωρά στην αποκωδικοποίηση της X_1 .
- Ο R_1 ισούται με $\sum_{x_2} p(x_2)I(X_1; Y|X_2 = x_2) = I(X_1; Y|X_2)$.
- Προφανώς, μπορούμε να επιτύχουμε και οποιαδήποτε άλλη τιμή $R_2 < I(X_2; Y|X_1)$.

Περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης (Rate Region) (3)



- Σημεία C και D: Αντίστοιχα με τα A και B, αλλά με τους ρόλους των X_1 και X_2 ανεστραμμένους.
- Επιπλέον του ρυθμού μετάδοσης αλλάζει και η σειρά αποκωδικοποίησης στο δέκτη. Δηλαδή, για το σημείο B αποκωδικοποιείται πρώτα η X_2 , ενώ για το σημείο C αποκωδικοποιείται πρώτα η X_1 .

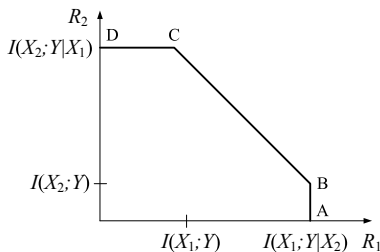
Διαδοχική Αποκωδικοποίηση (Successive Decoding) στο MAC

- Η ιδέα της διαδοχικής αποκωδικοποίησης (successive decoding ή successive interference cancellation - SIC) είναι κεντρική στο MAC (καθώς και στο degraded Broadcast Channel, όπως θα δούμε στη συνέχεια).
- Π.χ. για το σημείο B. Αποκωδικοποιούμε τη X_2 θεωρώντας τη X_1 ως θόρυβο.
- Ανάλογα με την τιμή της X_2 , από τη σκοπιά της X_1 βλέπουμε $|\mathcal{X}_2|$ διαφορετικά κανάλια. Αφού βρούμε την τιμή της X_2 επιλέγουμε το (ένα από τα $|\mathcal{X}_2|$) κανάλι που “βλέπει” η X_1 και αποκωδικοποιούμε με βάση αυτό το συγκεκριμένο κανάλι.

Διαδοχική Αποκωδικοποίηση (Successive Decoding) στο MAC (2)

- Αντίστροφα, για το σημείο C, αποκωδικοποιείται πρώτα η X_1 και η X_2 αποκωδικοποιείται με βάση ένα από $|\mathcal{X}_1|$ διαφορετικά κανάλια.
- Στο Γκαουσιανό MAC, η επιλογή καναλιού γίνεται με αφαίρεση, όπως θα δούμε στη συνέχεια.
- Το τμήμα μεταξύ των B και C επιτυγχάνεται με timesharing.

Περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης (Rate Region) (4)



- Το ευθύγραμμο τμήμα BC έχει κλίση 45° . (Αποδείξτε το ως άσκηση)
- Αποδεικνύεται, επίσης (δείτε π.χ. El Gamal & Kim) ότι μπορούμε να επιτύχουμε οποιοδήποτε σημείο της περιοχής επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης χωρίς να απαιτείται timesharing εφαρμόζοντας από κοινού αποκωδικοποίηση των X_1 και X_2 στο δέκτη (αντί για SIC).

Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας MAC

- Για να βρούμε την περιοχή χωρητικότητας του MAC πρέπει να πάρουμε το κλειστό σύνολο (closure) του κυρτού κύτους όλων των περιοχών επιτεύξιμων ρυθμών (για όλες τις $p(x_1)p(x_2)$).
- Για παράδειγμα, για να μεγιστοποιήσουμε τον R_1 , ενδέχεται να πρέπει να “παγώσουμε” τη X_2 σε μια τιμή x_2 για την οποία μεγιστοποιείται η $I(X_1; Y|X_2 = x_2)$: $\max R_1 = \max_{p_1(x_1)p_2(x_2)} I(X_1; Y|X_2) = \max_{p_1(x_1)p_2(x_2)} \sum_{x_2} p_2(x_2) I(X_1; Y|X_2 = x_2) \leq \max_{p_1(x_1)} \{ \max_{x_2} I(X_1; Y|X_2 = x_2) \}$.
- Αν δεν υπάρχει κατανομή $p_2(x_2)$ με περισσότερες από μία μη μηδενικές μάζες η οποία μεγιστοποιεί τον R_1 , τα σημεία A και B ταυτίζονται.
- Στο Παράδειγμα 10.2, για να μεγιστοποιήσουμε τον R_1 πρέπει να “παγώσουμε” τη X_2 στο 1 (και αντιστρόφως). Επομένως, το πεντάγωνο εκφυλίζεται σε τρίγωνο.

Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας MAC (2)

- Ωστόσο, ενδέχεται να υπάρχει κατανομή $p_2(x_2)$ με μη μηδενική εντροπία για την οποία ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & \max_{p_1(x_1)p_2(x_2)} \sum_{x_2} p_2(x_2) I(X_1; Y | X_2 = x_2) \\ & = \max_{p_1(x_1)} \{ \max_{x_2} I(X_1; Y | X_2 = x_2) \}. \end{aligned}$$

- Στο Παράδειγμα 10.3, μπορούμε να επιτύχουμε το μέγιστο ρυθμό $R_1 = 1$ (με ομοιόμορφη X_1) και, ταυτόχρονα, $R_2 = 0.5$ bit (με ομοιόμορφη X_2).
- Παρατηρήστε ότι, ακόμα και αν είχαμε “παγώσει” τη X_2 σε μία σταθερή τιμή, δε θα μπορούσαμε να μεταδώσουμε με $R_1 > 1$.
- Παρόλο που στο Παράδειγμα 10.3 η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών για ομοιόμορφες p_1 και p_2 ταυτίζεται με την περιοχή χωρητικότητας, στη γενική περίπτωση η περιοχή χωρητικότητας είναι ένα κυρτό σύνολο που προέρχεται από την ένωση πενταγώνων (ή εκφυλισμένων πενταγώνων).

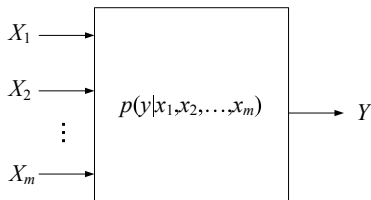
Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας MAC (3)

- Όπως θα δούμε, μία πολύ σημαντική ειδική περίπτωση όπου όλα τα σημεία στο όριο της περιοχής χωρητικότητας επιτυγχάνονται από μία μόνο κατανομή $p_1(x_1)p_2(x_2)$ είναι το Γκαουσιανό MAC.
- Γενικά, αποδεικνύεται ότι αρκεί timesharing μεταξύ 2 το πολύ κατανομών $p_1(x_1)p_2(x_2)$ για να επιτευχθεί οποιοδήποτε σημείο της περιοχής χωρητικότητας του MAC 2 χρηστών.
- Για λεπτομέρειες, δείτε El Gamal & Kim.
- Αποδεικνύεται, επίσης, ότι οποιοδήποτε σημείο της περιοχής χωρητικότητας, \mathcal{C} , μπορεί να επιτευχθεί χωρίς timesharing με χρήση coded time sharing (για λεπτομέρειες, δείτε El Gamal & Kim).

Διευκρίνιση: 2 είδη timesharing

1. Timesharing μεταξύ βιβλίων κωδίκων για δεδομένη $p_1(x_1)p_2(x_2)$ (και, επομένως, δεδομένη rate region).
 - Για κάθε ένα από τα δύο σημεία χρησιμοποιούμε SIC στο δέκτη. Η σειρά SIC αλλάζει όταν αλλάζουμε σημείο.
 - Μπορούμε να μην κάνουμε timesharing αν χρησιμοποιήσουμε από κοινού (ταυτόχρονη) αποκωδικοποίηση των X_1 και X_2 στο δέκτη.
2. Timesharing μεταξύ $|Q| = 2$ διαφορετικών γινομένων κατανομών $p_1(x_1)p_2(x_2)$ προκειμένου να επιτύχουμε οποιοδήποτε σημείο της περιοχής χωρητικότητας.
 - Μπορούμε να μην κάνουμε timesharing αν χρησιμοποιήσουμε coded timesharing (δε θα επεκταθούμε σε αυτό το μάθημα).

Γενίκευση MAC για m χρήστες



- Θεώρημα 10.7** (Cover 15.3.6): Η περιοχή χωρητικότητας του MAC m χρηστών είναι το κλειστό σύνολο (closure) του κυρτού κύτους (convex hull) των διανυσμάτων $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_m)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$R(S) \leq I(X(S); Y|X(S^c)) \text{ για } \underline{\text{όλα}} \text{ τα } S \subseteq \{1, 2, \dots, m\},$$

όπου S^c το συμπλήρωμα του S και για όλες τις κατανομές εισόδου (με ανεξάρτητα X_i).