ΕΕ728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

12ο Μάθημα – 27 Μαΐου 2009

Περιεχόμενα Σημερινού Μαθήματος

- Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων
- Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel – MAC)
- Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel – BC)

Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων (**Network Info Theory**)

- Συστήματα με περισσότερους από έναν πομπούς ή/και περισσότερους από έναν δέκτες.
- Νέα στοιχεία: Παρεμβολή (interference), συνεργασία (cooperation) και ανάδραση (feedback).
- Το γενικό πρόβλημα είναι εύκολο να μοντελοποιηθεί, αλλά πολύ δύσκολο να επιλυθεί. Η γενική λύση του προβλήματος δεν έχει βρεθεί έως σήμερα.

Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων (**Network Info Theory**) (2)

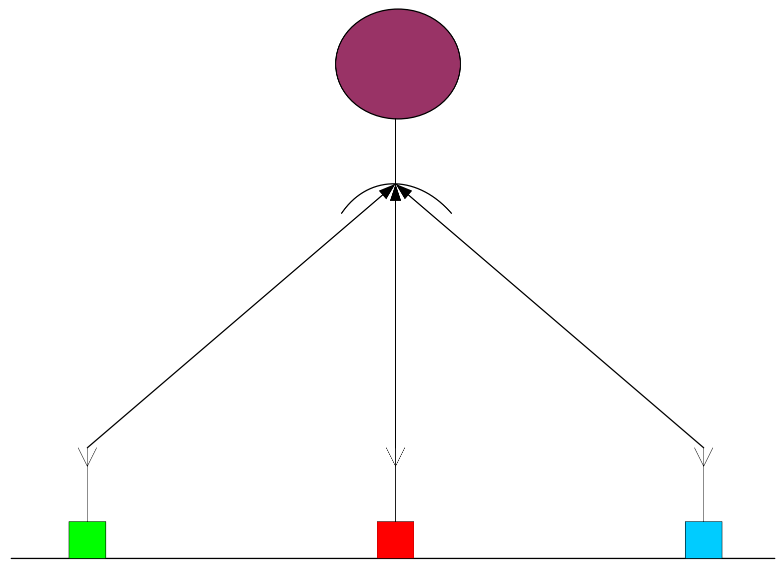
- Στη γενική περίπτωση αναφερόμαστε, πλέον, σε περιοχές χωρητικότητας (**capacity regions**), δεδομένου ότι, λόγω παρεμβολών και συνεργασίας, ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης κάθε χρήστη εξαρτάται από τους ρυθμούς μετάδοσης των άλλων χρηστών (στη γενική περίπτωση).

- Η Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον των ερευνητών τα τελευταία χρόνια προκειμένου να σχεδιαστούν πιο αποδοτικά συστήματα επικοινωνιών.

Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**Multiple Access Channel – MAC**)

- Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων
- Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel – MAC)
- Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel – BC)

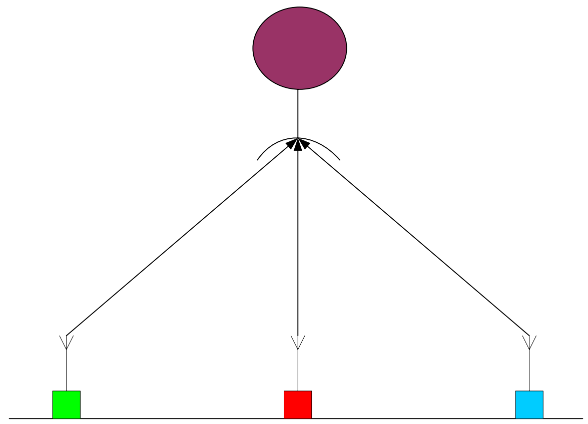
Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**Multiple Access Channel**)



- Πολλοί χρήστες που επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα κεντρικό σταθμό. Παράδειγμα: Κινητά τερματικά προς σταθμό βάσης.

- Το κανάλι πολλών χρηστών που έχει κατανοηθεί καλύτερα.

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**MAC**) (2)



- Έως τώρα, η παράμετρος που επηρέαζε την επικοινωνία ήταν ο θόρυβος. Στο MAC, επιπλέον του θορύβου, η επικοινωνία επηρεάζεται από παρεμβολές (interference).

- Πόση πληροφορία μπορούμε να μεταδώσουμε για κάθε χρήστη, και πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι χωρητικότητες των χρηστών;

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**MAC**) – Ορισμοί

- Για απλοποίηση, θα αναφερθούμε, κατ΄ αρχήν, σε MAC 2 χρηστών.
- Διακριτό MAC χωρίς μνήμη: Αποτελείται από 3 αλφάβητα $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ και $\mathcal{Y}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $p(y|x_1, x_2)$.
- Κώδικας $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το MAC: Αποτελείται από δύο σύνολα ακεραίων $\mathcal{W}_1 = \{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\}$ και $\mathcal{W}_2 = \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}$ (σύνολα μηνυμάτων – message sets), δύο συναρτήσεις κωδικοποίησης (encoding functions):

$$X_1 : \mathcal{W}_1 \to \mathcal{X}_1^n \text{ και}$$

$$X_2 : \mathcal{W}_2 \to \mathcal{X}_2^n,$$

και μια συνάρτηση αποκωδικοποίησης (decoding function)

$$g : \mathcal{Y}^n \to \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2.$$

Μετάδοση στο **MAC**

- Ο χρήστης 1 επιλέγει ένα από 2^{nR_1} μηνύματα <u>ομοιόμορφα</u> και στέλνει την αντίστοιχη κωδική λέξη στο κανάλι. Ομοίως, ο χρήστης 2 επιλέγει ένα από 2^{nR_2} μηνύματα <u>ανεξάρτητα</u> από το χρήστη 1 και εκπέμπει την αντίστοιχη κωδική λέξη.
- <u>Μέση Πιθανότητα Σφάλματος</u>:

$$P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{n(R_1+R_2)}} \sum_{(w_1,w_2)\in\mathcal{W}_1\times\mathcal{W}_2} \Pr\{g(Y^n) \neq (w_1, w_2) | \text{εστάλη το } (w_1, w_2)\}$$

- Ένα ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι <u>εφικτό</u> για το MAC εάν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $(2^{nR_1}, 2^{nR_2}, n)$ τέτοια ώστε $P_e^{(n)} \to 0$.
- Η <u>περιοχή χωρητικότητας</u> (capacity region) του MAC είναι το περίβλημα (closure) των εφικτών (R_1, R_2).

Περιοχή Χωρητικότητας **MAC**

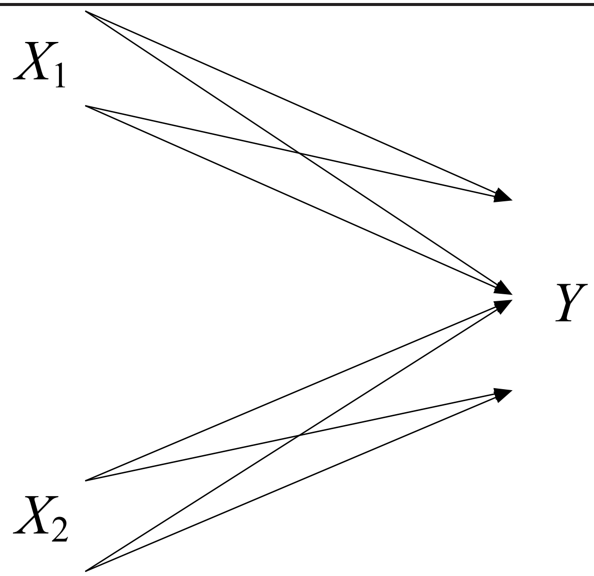
- Θεώρημα (**Cover 15.3.1**): Η χωρητικότητα του **MAC** $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y|x_1, x_2), \mathcal{Y})$ είναι το περίβλημα (**closure**) της κυρτής γάστρας (**hull**) όλων των (R_1, R_2) που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} R_1 &< I(X_1; Y|X_2), \\ R_2 &< I(X_2; Y|X_1), \\ R_1 + R_2 &< I(X_1, X_2; Y) \end{aligned}$$

  για κάποια κατανομή $p_1(x_1)p_2(x_2)$ στο σύνολο $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.

- Δε θα το αποδείξουμε στο μάθημα.

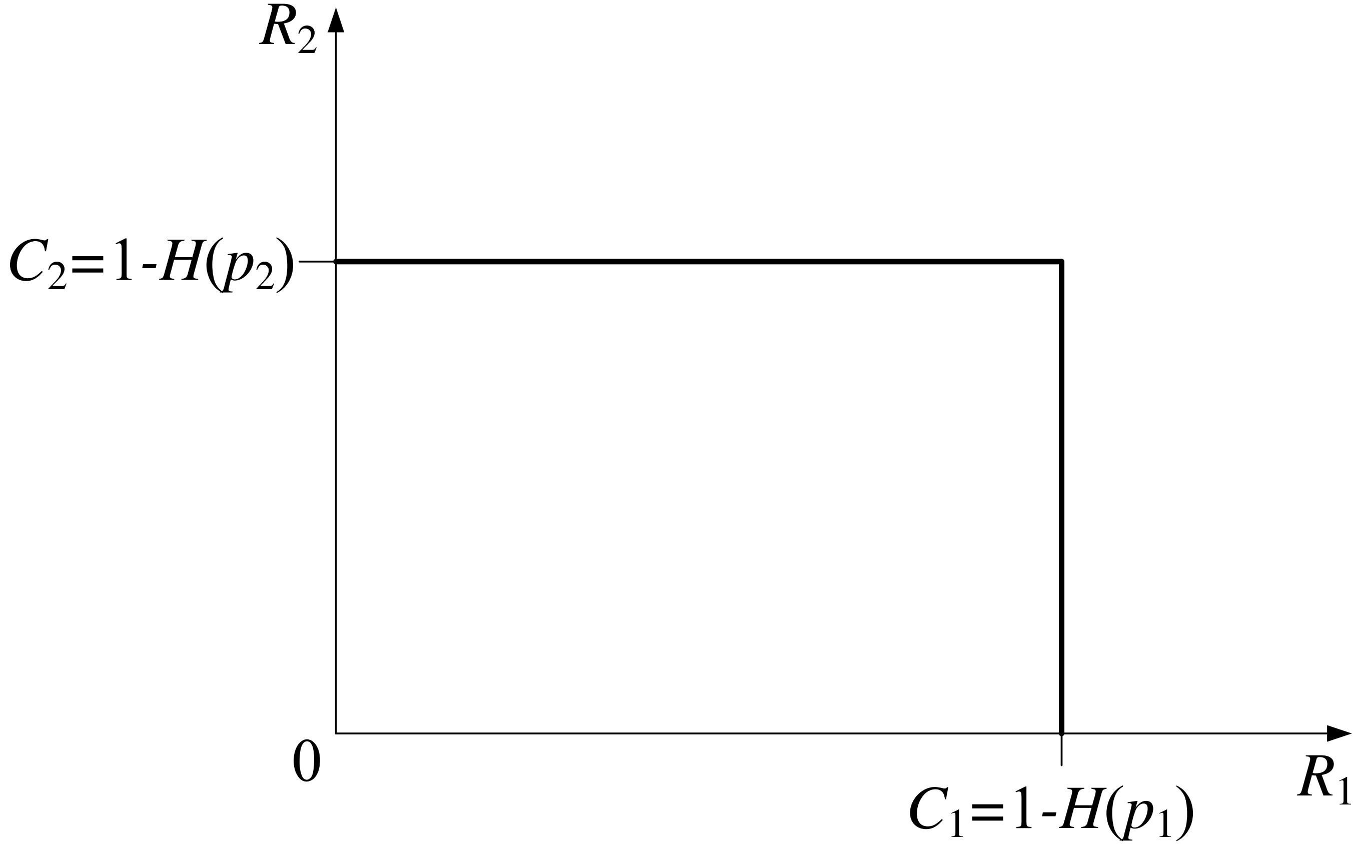
Παράδειγμα 12.1 - Ανεξάρτητα **BSC**



- Μπορούμε να στείλουμε με $R_1 = 1 - H(p_1)$ από το 1ο κανάλι, και, ταυτόχρονα, με ρυθμό $R_2 = 1 - H(p_2)$ από το 2ο κανάλι.

- Τα δύο κανάλια είναι ανεξάρτητα $\longrightarrow$ δεν εμφανίζεται παρεμβολή.

Παράδειγμα 12.1 - Ανεξάρτητα **BSC** – Περιοχή Χωρητικότητας



Παράδειγμα 12.2 - Δυαδικό Πολλαπλασιαστικό Κανάλι

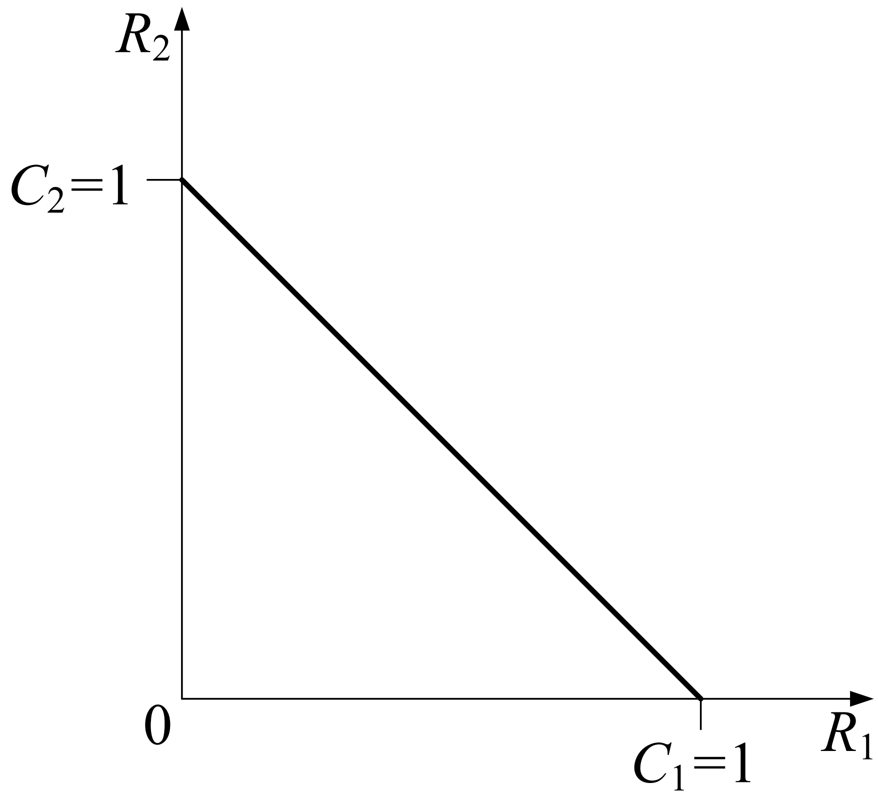
- Οι X_1 και X_2 παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0,1\} \times \{0,1\}$. $Y = X_1 X_2$.

- Όταν $X_1 = 1$, μπορούμε να στείλουμε $R_2 = 1$ bit/χρήση καναλιού με ομοιόμορφη κατανομή της X_2. $R_1 = 0$, δεδομένου ότι η X_1 δεν αλλάζει.

- Ομοίως, όταν $X_2 = 1$, μπορούμε να στείλουμε $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού με ομοιόμορφη κατανομή της X_1. $R_2 = 0$.

- Μπορούμε να πετύχουμε οποιοδήποτε ζεύγος $(\lambda, 1-\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ με διαμέριση στο χρόνο (**timesharing**). Δηλαδή, "παγώνουμε" το X_2 για 100λ % του χρόνου και μεταδίδουμε με ομοιόμορφα κατανεμημένη X_1 (αντίστροφα για το υπόλοιπο $100(1-\lambda)$ %).

Παράδειγμα 12.2 - Δυαδικό Πολλαπλασιαστικό Κανάλι – Περιοχή Χωρητικότητας

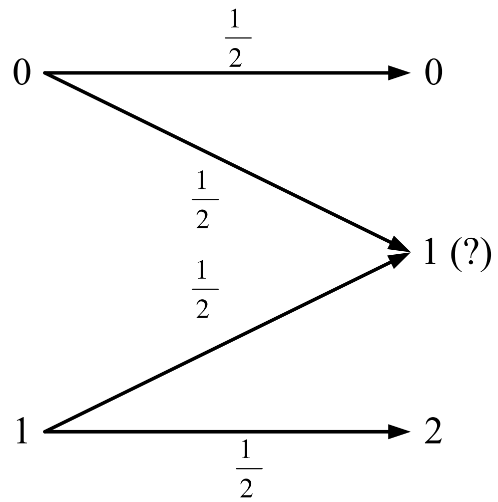


Παράδειγμα 12.3 - Δυαδικό **MAC** Διαγραφής

- Οι X_1 και X_2 παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0,1\} \times \{0,1\}$. $Y = X_1 + X_2$.
- Εάν $Y = 1$ δε γνωρίζουμε εάν η είσοδος ήταν $(X_1, X_2) =$(1,0) ή (0,1).
- Εάν θέσουμε $X_1 = 1$, μπορούμε να μεταδώσουμε με $R_2 = 1$ bit/χρήση καναλιού (με ομοιόμορφη X_2).
- Εάν θέσουμε $X_2 = 1$, μπορούμε να μεταδώσουμε με $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού (με ομοιόμορφη X_1).
- Μπορούμε να στείλουμε με $R_1 + R_2 > 1$ bit/χρήση καναλιού;

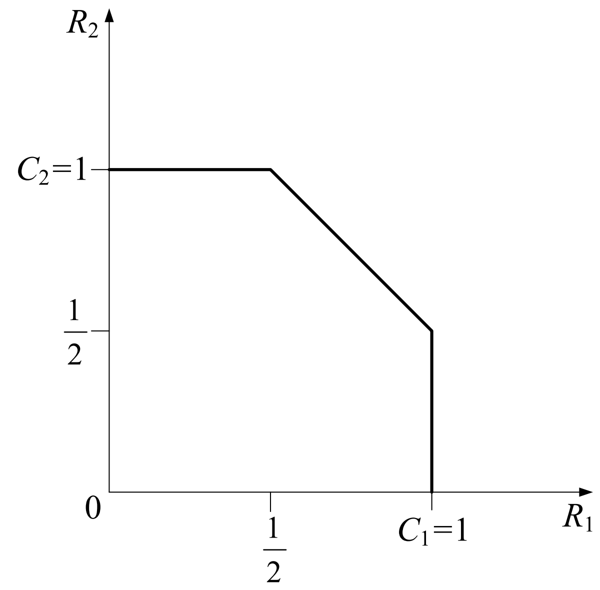
Παράδειγμα 12.3 - Δυαδικό **MAC** Διαγραφής (2)

- Έστω ότι χρησιμοποιούμε ομοιόμορφη X_1. Επομένως, $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού.
- Από τη σκοπιά της X_2 το κανάλι είναι δυαδικό κανάλι διαγραφής με πιθανότητα διαγραφής $p = 1/2$.



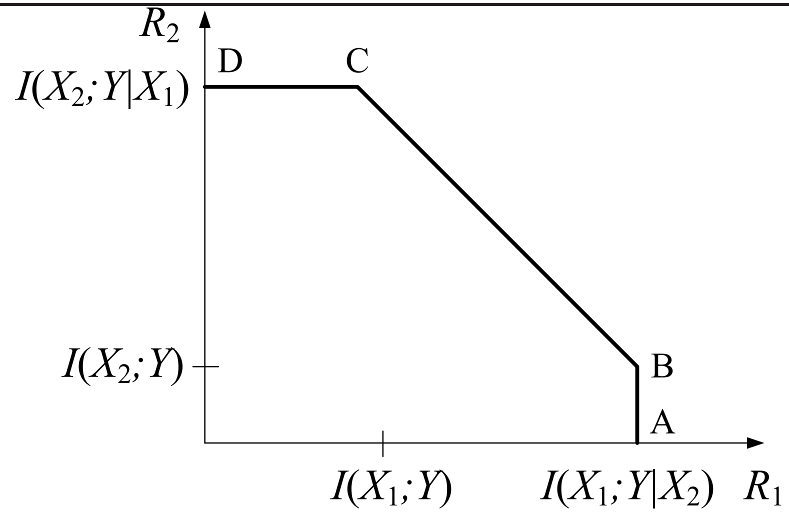
- Επομένως, μπορούμε να στείλουμε επιπλέον $1/2$ bits της X_2!

Παράδειγμα 12.3 - Δυαδικό **MAC** Διαγραφής – Περιοχή Χωρητικότητας



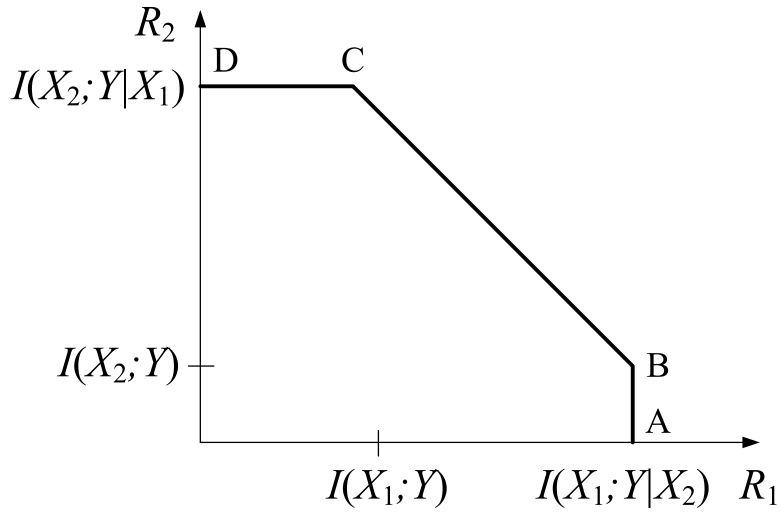
- Μπορούμε, επίσης, να επιτύχουμε οποιοδήποτε ζεύγος $(R_1, R_2) = (0.5 + \lambda, 1 - \lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 0.5$ με timesharing.

Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας **MAC**



- Σημείο A: Ο R_2 δε στέλνει καθόλου πληροφορία. $X_2 = x_2$ όπου x_2 η τιμή που μεγιστοποιεί την $I(X_1;Y|X_2)$: $\max R_1 = \max_{p_1(x_1)p_2(x_2)} I(X_1;Y|X_2)$. Για δεδομένη κατανομή $p_1(x_1)p_2(x_2)$, $I(X_1;Y|X_2) = \sum_{x_2} p_2(x_2) I(X_1;Y|X_2 = x_2) \leq \max_{x_2} I(X_1;Y|X_2 = x_2)$.

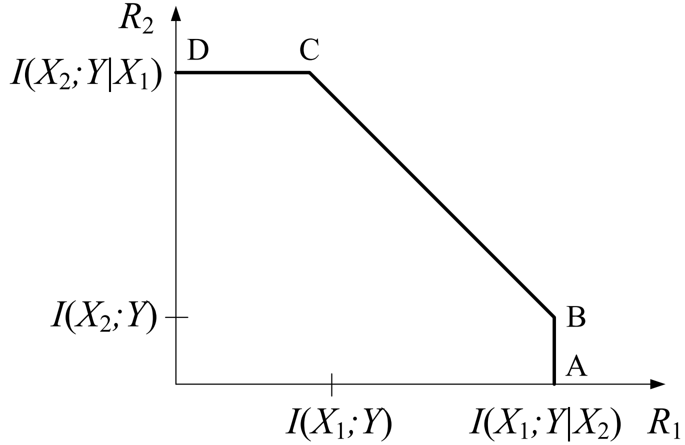
Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας **MAC** (2)



- Σημείο B: Η X_1 αποτελεί θόρυβο για τη μετάδοση της X_2. Ο μέγιστος ρυθμός για τη μετάδοση της X_2 ισούται με $I(X_2;Y)$. Στο δέκτη, ανιχνεύεται η X_2. Η αποκωδικοποίηση της X_1 λαμβάνει υπόψιν την τιμή της X_2.

- Ο R_1 ισούται με $\sum_{x_2} p(x_2) I(X_1;Y|X_2 = x_2) = I(X_1;Y|X_2)$.

Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας **MAC** (3)



- Σημεία C και D: Αντίστοιχα με τα A και B, αλλά με τους ρόλους των X_1 και X_2 ανεστραμμένους.

- Επιπλέον του ρυθμού μετάδοσης αλλάζει και η σειρά αποκωδικοποίησης στο δέκτη. Δηλαδή, για το σημείο B αποκωδικοποιείται πρώτα η X_2, ενώ για το σημείο C αποκωδικοποιείται πρώτα η X_1.

Διαδοχική Αποκωδικοποίηση (**Successive Decoding**) στο **MAC**

- Η ιδέα της διαδοχικής αποκωδικοποίησης (successive decoding ή successive interference cancellation – SIC) είναι κεντρική στο MAC (καθώς και στο degraded Broadcast Channel).

- Π.χ. για το σημείο B. Αποκωδικοποιούμε τη X_2 θεωρώντας τη X_1 ως θόρυβο.

- Ανάλογα με την τιμή της X_2, από τη σκοπιά της X_1 βλέπουμε $|\mathcal{X}_2|$ διαφορετικά κανάλια. Αφού βρούμε την τιμή της X_2 επιλέγουμε το (ένα από τα $|\mathcal{X}_2|$) κανάλι που "βλέπει" η X_1, και αποκωδικοποιούμε με βάση αυτό το συγκεκριμένο κανάλι.

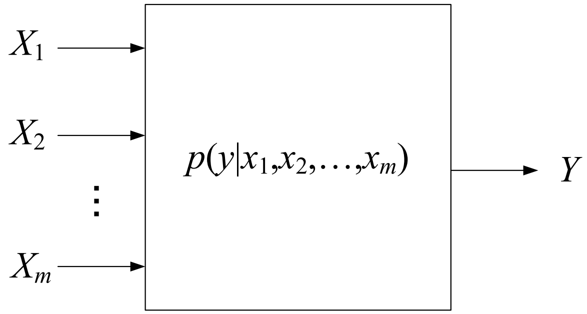
Διαδοχική Αποκωδικοποίηση (**Successive Decoding**) στο **MAC** (2)

- Αντίστροφα, για το σημείο C, αποκωδικοποείται πρώτα η X_1 και η X_2 αποκωδικοποιείται με βάση ένα από $|\mathcal{X}_1|$ διαφορετικά κανάλια.

- Στο Γκαουσιανό MAC, η επιλογή καναλιού γίνεται με αφαίρεση, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

- Το τμήμα μεταξύ των B και C επιτυγχάνεται με timesharing.

Γενίκευση **MAC** για m χρήστες

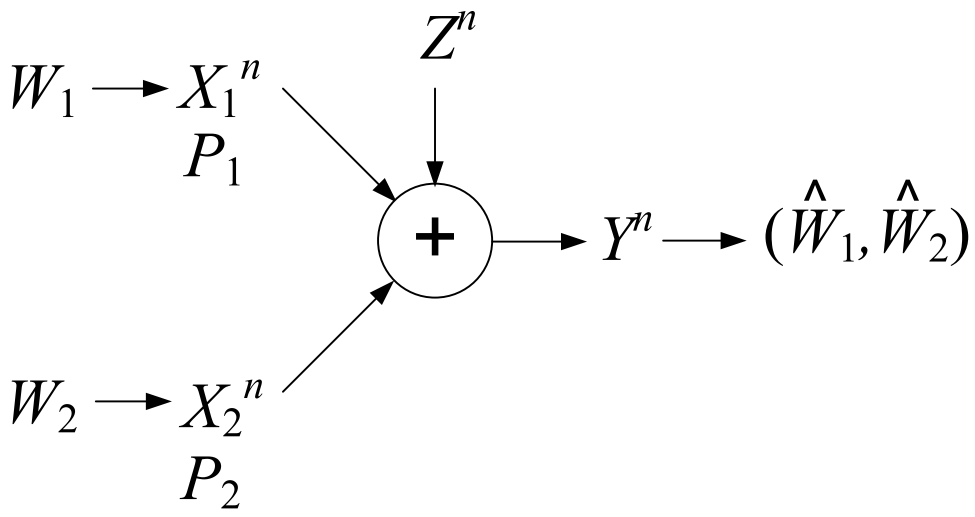


- Θεώρημα (**Cover 15.3.6**): Η περιοχή χωρητικότητας του **MAC** m χρηστών είναι το περίβλημα (**closure**) της κυρτής γάστρας (**hull**) των διανυσμάτων $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$R(S) \leq I(X(S); Y | X(S^c)) \text{ για \underline{όλα} τα σύνολα } S \subseteq \{1, 2, \ldots, m\},$$

όπου S^c το συμπλήρωμα του S.

Γκαουσιανό **MAC** 2 χρηστών



- Τη χρονική στιγμή i, ο δέκτης λαμβάνει σήμα $Y_i = X_{1i} + X_{2i} + Z_i$, όπου ο θόρυβος Z είναι i.i.d $\sim \mathcal{N}(0, N)$. Επίσης, ο κάθε πομπός i έχει περιορισμό ισχύος P_i. Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες.

Γκαουσιανό **MAC** 2 χρηστών (2)

- Για την $I(X_1;Y|X_2)$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
I(X_1;Y|X_2) &= h(Y|X_2) - h(Y|X_1,X_2) \\
&= h(X_1+X_2+Z|X_2) - h(X_1+X_2+Z|X_1,X_2) \\
&= h(X_1+Z|X_2) - h(Z|X_1,X_2) = h(X_1+Z) - h(Z) \\
&= h(X_1+Z) - \frac{1}{2}\log(2\pi e)N \\
&\overset{(a)}{\leq} \frac{1}{2}\log(2\pi e)(P_1+N) - \frac{1}{2}\log(2\pi e)N = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_1}{N}\right).
\end{aligned}$$

(a) γιατί;

Γκαουσιανό **MAC** 2 χρηστών (3)

- Ομοίως, $I(X_2; Y|X_1) \leq \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P_2}{N}\right)$.

- Η X_1 και η X_2 πρέπει να ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή ($\mathcal{N}(0, P_1)$ και $\mathcal{N}(0, P_2)$, αντίστοιχα).

Γκαουσιανό **MAC** 2 χρηστών – Περιοχή Χωρητικότητας

- Ορίζουμε τη χωρητικότητα του καναλιού AWGN με λόγο σήματος προς θόρυβο x ως $C(x) \triangleq \frac{1}{2}\log(1+x)$.
- Η περιοχή χωρητικότητας του γκαουσιανού MAC 2 χρηστών δίνεται από τις σχέσεις

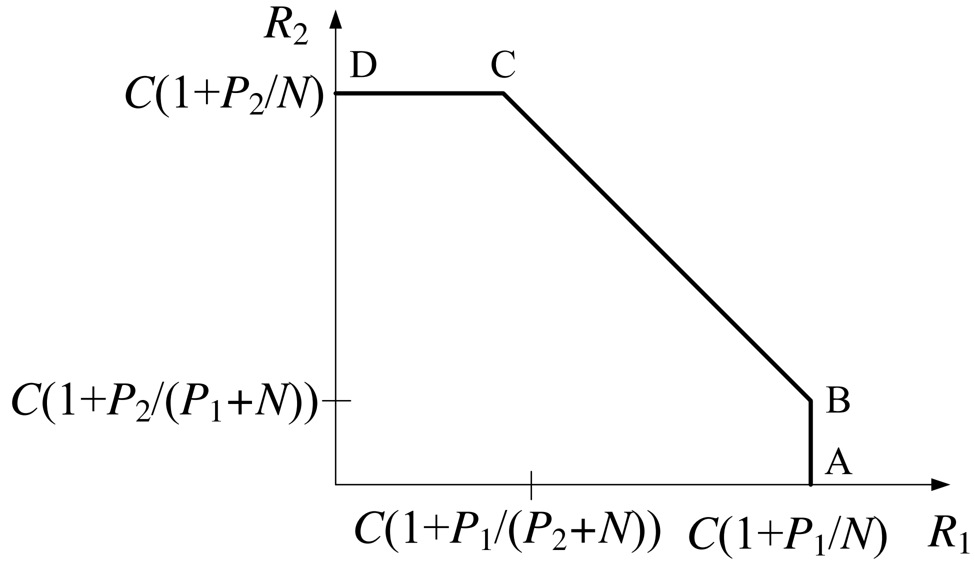
$$R_1 \leq C\left(\frac{P_1}{N}\right),$$

$$R_2 \leq C\left(\frac{P_2}{N}\right), \text{ και}$$

$$R_1 + R_2 \leq C\left(\frac{P_1 + P_2}{N}\right)$$

και επιτυγχάνεται με $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P_1)$ και $X_2 \sim \mathcal{N}(0, P_2)$.

Γκαουσιανό **MAC** 2 χρηστών – Περιοχή Χωρητικότητας (2)



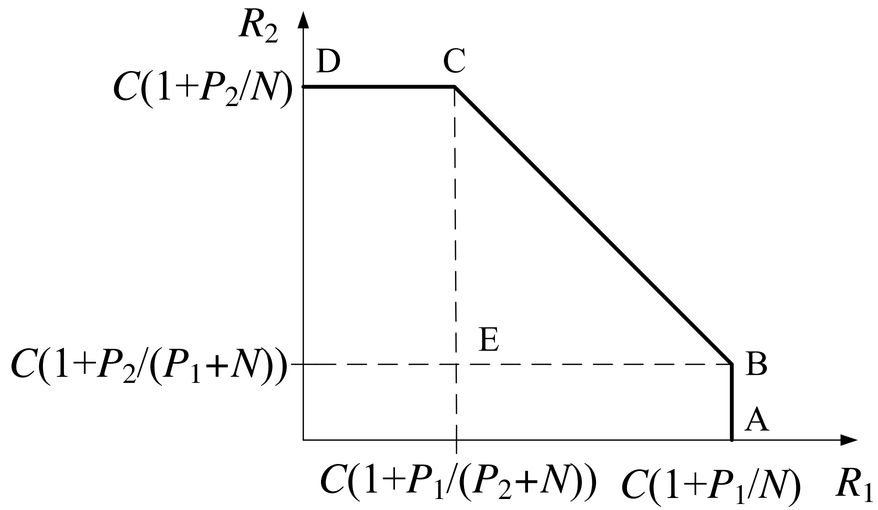
- Μπορούμε να επιτύχουμε ρυθμό μετάδοσης έως και $C\left(\frac{P_1+P_2}{N}\right)$, σα να είχαμε, δηλαδή, έναν πομπό που εκπέμπει με ισχύ $P_1 + P_2$.

Γκαουσιανό **MAC** 2 χρηστών – Σχόλια

- Θεωρούμε το σημείο B. Ο δέκτης αποκωδικοποιεί πρώτα την πληροφορία του πομπού 2, θεωρώντας τη μετάδοση του πομπού 1 ως θόρυβο: $R_2 = C\left(\frac{P_2}{P_1+N}\right)$.
- Στη συνέχεια, ο δέκτης αφαιρεί από το σήμα Y το αποκωδικοποιημένο σήμα X_2. Επομένως, το μόνο άγνωστο σήμα που απομένει είναι ο θόρυβος, και $R_1 = C\left(\frac{P_1}{N}\right)$.
- Για το σημείο C εφαρμόζεται η αντίθετη διαδικασία. Δηλαδή, αποκωδικοποίηση του X_1 θεωρώντας ότι το X_2 είναι θόρυβος, αφαίρεση του X_1 από το Y και αποκωδικοποίηση του X_2 παρουσία μόνο του θορύβου.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διαδοχική αποκωδικοποίηση (successive decoding), διαδοχική απαλοιφή παρεμβολών (successive interference cancellation – SIC) ή onion peeling.

Σύγκριση με **CDMA uplink**

- Uplink: Μετάδοση πληροφορίας από χρήστες σε σταθμό βάσης. Εμπίπτει στο μοντέλο του MAC (παρόλο που, στη γενική περίπτωση, είναι MAC με διαλείψεις (fading)).
- Στα συμβατικά συστήματα CDMA ο κάθε χρήστης αποκωδικοποιείται θεωρώντας την επικοινωνία των άλλων χρηστών ως παρεμβολή (σημείο E).
- Με χρήση SIC αυξάνεται ο συνολικός ρυθμός μετάδοσης και το πρόβλημα near-far παύει να υφίσταται.



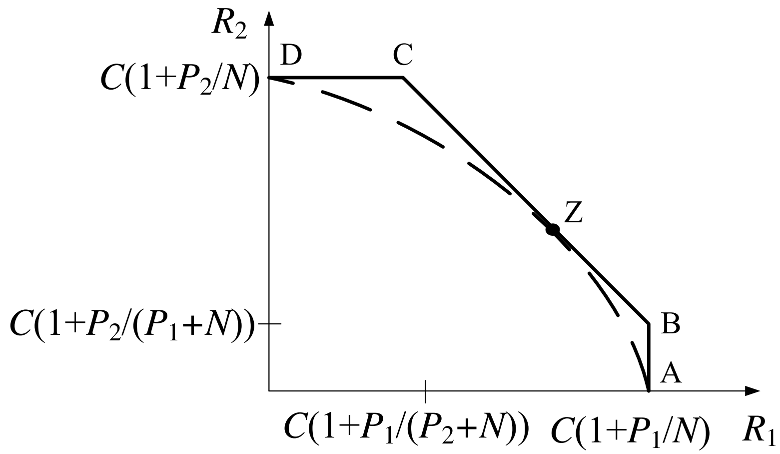
Σύγκριση με **FDMA uplink**

- Έστω ότι οι δύο χρήστες μοιράζονται το φάσμα. Ο χρήστης 1 χρησιμοποιεί W_1 Hz, ενώ ο χρήστης 2 χρησιμοποιεί W_2 Hz. Το συνολικό φάσμα ισούται με $W_1 + W_2 = W$ Hz.
- Ο κάθε χρήστης εκπέμπει μόνος του στο κανάλι AWGN που του αναλογεί. Επομένως,

$$R_1 = W_1 \log\left(1 + \frac{P_1}{NW_1}\right)$$

$$R_2 = W_2 \log\left(1 + \frac{P_2}{NW_2}\right) = (W - W_1)\log\left(1 + \frac{P_2}{N(W - W_1)}\right)$$

Σύγκριση με **FDMA uplink** (2)



- Η καμπύλη εφάπτεται με το όριο της περιοχής χωρητικότητας σε ένα μόνο σημείο στο οποίο ισχύει $P_1/W_1 = P_2/W_2$.

- Επομένως, στη γενική περίπτωση, η χρήση FDMA στο MAC είναι υποβέλτιστη (suboptimal).

Σύγκριση με **TDMA uplink**

- Ο χρήστης 1 μεταδίδει για $\alpha 100$ % του συνολικού χρόνου. Η μέση ισχύς του κατά τη διάρκεια μετάδοσης είναι P_1/α (έτσι ώστε η συνολική του ενέργεια στη μονάδα του χρόνου να ισούται με P_1).
- Ο χρήστης 2 μεταδίδει για $(1-\alpha)100$ % του συνολικού χρόνου. Η μέση ισχύς του κατά τη διάρκεια μετάδοσης είναι $P_2/(1-\alpha)$.
- Επομένως,

$$R_1 = \alpha W \log\left(1 + \frac{P_1}{N\alpha W}\right)$$

$$R_2 = (1-\alpha) W \log\left(1 + \frac{P_2}{N(1-\alpha) W}\right)$$

- Η ίδια περιοχή, όπως και στην περίπτωση FDMA.

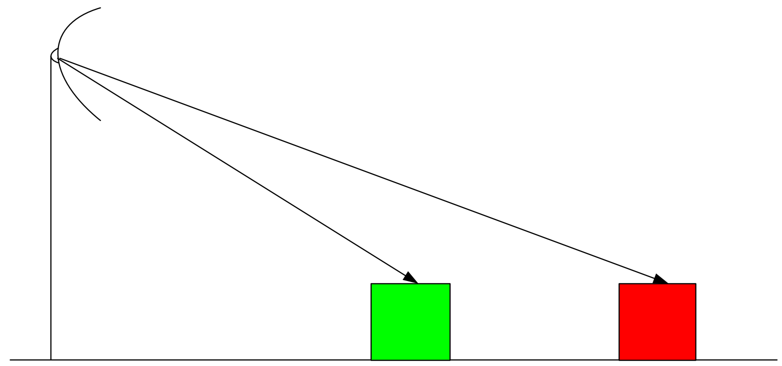
MAC: Σχόλια

- FDMA/TDMA υποβέλτιστες, εκτός εάν $P_i/W_i = c$ για όλους τους χρήστες i.
- CDMA υποβέλτιστη, εκτός εάν ο δέκτης χρησιμοποιεί SIC (**onion peeling**).
- $\sum_i R_i \leq C\left(\frac{\sum_i P_i}{N}\right)$. Επομένως, για κάθε επιπρόσθετο χρήστη που εμφανίζεται στο κανάλι η συνολική χωρητικότητα αυξάνει!
- Ωστόσο, λόγω της λογαριθμικής σχέσης μεταξύ P και C, η χωρητικότητα ανά χρήστη $\frac{1}{m}C\left(\frac{\sum_i P_i}{N}\right) \to 0$ για αριθμό χρηστών $m \to \infty$.

Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (**Broadcast Channel – BC**)

- Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων
- Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel – MAC)
- Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel – BC)

Κανάλι Ευρυεκπομής (**Broadcast Channel – BC**)



- Ένας κεντρικός σταθμός που στέλνει διαφορετική πληροφορία (στη γενική περίπτωση) σε πολλούς χρήστες. Παράδειγμα: Σταθμός βάσης προς κινητά τερματικά (downlink).

- Το γενικό BC δεν έχει επιλυθεί (ακόμα ;). Γνωρίζουμε, όμως, την περιοχή χωρητικότητας για την περίπτωση του υποβαθμισμένου (degraded) BC, καθώς και για άλλες περιπτώσεις (π.χ. MIMO Gaussian BC).

BC – Ορισμοί

- Το κανάλι ευρυεκπομπής (2 χρηστών) αποτελείται από ένα αλφάβητο εισόδου $\mathcal{X}$, 2 αλφάβητα εξόδου $\mathcal{Y}_1$ και $\mathcal{Y}_2$ και ένα πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $p(y_1, y_2|x)$.

- Το BC δεν έχει μνήμη όταν $p(y_1^n, y_2^n|x^n) = \prod_{i=1}^n p(y_{1i}, y_{2i}|x_i)$.

- Ένας κώδικας $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το BC με ανεξάρτητη πληροφορία ανά χρήστη αποτελείται από έναν <u>κωδικοποιητή</u> (encoder) $X : (\{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\} \times \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}) \rightarrow \mathcal{X}^n$, και 2 <u>αποκωδικοποιητές</u> (decoders) $g_1 : \mathcal{Y}_1^n \rightarrow \{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\}$ και $g_2 : \mathcal{Y}_2^n \rightarrow \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}$.

- Μέση πιθανότητα σφάλματος: $P_e^{(n)} = \Pr\{g_1(Y_1^n) \neq W_1$ ή $g_2(Y_2^n) \neq W_2\}$, όπου τα (W_1, W_2) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένα στο σύνολο $2^{nR_1} \times 2^{nR_2}$.

- Ένα ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι <u>εφικτό</u> για το BC όταν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ με $P_e^{(n)} \rightarrow 0$.

BC – Ορισμοί (2)

- Εάν μέρος της πληροφορίας που στέλνει ο πομπός είναι κοινή και για τους δύο δέκτες, οι ορισμοί τροποποιούνται ως εξής:

- Ένας κώδικας $((2^{nR_0}, 2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το BC αποτελείται από έναν κωδικοποιητή (encoder) $X : (\{1, 2, \ldots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\} \times \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}) \to \mathcal{X}^n$, και 2 αποκωδικοποιητές (decoders) $g_1 : \mathcal{Y}_1^n \to \{1, 2, \ldots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\}$ και $g_2 : \mathcal{Y}_2^n \to \{1, 2, \ldots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}$.

- Μέση πιθανότητα σφάλματος: $P_e^{(n)} = \Pr\{g_1(Y_1^n) \neq (W_0, W_1)$ ή $g_2(Y_2^n) \neq (W_0, W_2)\}$, όπου τα (W_0, W_1, W_2) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένα στο σύνολο $2^{nR_0} \times 2^{nR_1} \times 2^{nR_2}$.

- Μια τριάδα ρυθμών μετάδοσης (R_0, R_1, R_2) είναι εφικτή για το BC όταν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $((2^{nR_0}, 2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ με $P_e^{(n)} \to 0$.

BC – Περιοχή Χωρητικότητας

- Ορισμός: Η περιοχή χωρητικότητας (**capacity region**) του BC είναι το περίβλημα (**closure**) του συνόλου όλων των εφικτών ρυθμών μετάδοσης.

- Θεώρημα (**Cover 15.6.1**): Η περιοχή χωρητικότητας του BC εξαρτάται μόνο από τις υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές $p(y_1|x)$ και $p(y_2|x)$.

Υποβαθμισμένο (**degraded**) BC

- Ένα BC είναι <u>φυσικώς υποβαθμισμένο</u> (physically degraded) εάν $p(y_1, y_2|x) = p(y_1|x)p(y_2|y_1)$.

- Ένα BC είναι <u>στοχαστικώς υποβαθμισμένο</u> (stochastically degraded) εάν οι υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές είναι οι ίδιες με αυτές ενός φυσικώς υποβαθμισμένου BC. Δηλαδή, υπάρχει κατανομή $p'(y_2|y_1)$ τέτοια ώστε

$$p(y_2|x) = \sum_{y_1} p(y_1|x)p'(y_2|y_1).$$

- Δεδομένου ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 15.6.1, η περιοχή χωρητικότητας του BC εξαρτάται μόνο από τις υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές, η περιοχή χωρητικότητας του φυσικώς υποβαθμισμένου BC συμπίπτει με αυτήν του στοχαστικώς υποβαθμισμένου BC.

Περιοχή Χωρητικότητας **degraded BC**

- Θεώρημα (Cover 15.6.2): Η περιοχή χωρητικότητας για την αποστολή ανεξάρτητης πληροφορίας στο υποβαθμισμένο BC είναι η κυρτή γάστρα (convex hull) του περιβλήματος (closure) όλων των (R_1, R_2) που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$R_2 \le I(U;Y_2),$$
$$R_1 \le I(X;Y_1|U),$$

για κάποια από κοινού κατανομή $p(u)p(x|u)p(y_1,y_2|x)$, όπου για την απολυτότητα (cardinality) της βοηθητικής τ.μ. U ισχύει $|\mathcal{U}| \le \min\{|\mathcal{X}|, |\mathcal{Y}_1|, |\mathcal{Y}_2|\}$.

Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση στο **degraded BC**

- Η βασική ιδέα:
  - Ο δέκτης 1 γνωρίζει όλη την πληροφορία που γνωρίζει και ο δέκτης 2. Αντίθετα, ο δέκτης 2 γνωρίζει λιγότερη πληροφορία από το δέκτη 1.
  - Επομένως, ο δέκτης 1 μπορεί να αποκωδικοποιήσει την πληροφορία που προορίζεται για το δέκτη 2.
  - Κωδικοποιούμε το μήνυμα W_2 που προορίζεται για το δέκτη 2 με χρήση της τ.μ. U (2^{nR_2} πιθανές κωδικές λέξεις).
  - Ανάλογα με την τιμή της U, από τη σκοπιά του χρήστη 1 βλέπουμε ένα από 2^{nR_2} πιθανά κανάλια. Ανάλογα με το κανάλι και το μήνυμα W_1 επιλέγουμε την τιμή της τ.μ. $X(W_1, W_2)$ (2^{nR_1} πιθανές κωδικές λέξεις για δεδομένη $U(W_2)$, $2^{n(R_1+R_2)}$ συνολικά) $\rightarrow$ <u>κωδικοποίηση υπέρθεσης</u> (superposition coding).
  - Στέλνουμε στο κανάλι μια από τις $2^{n(R_1+R_2)}$ του βιβλίου κωδίκων της X.

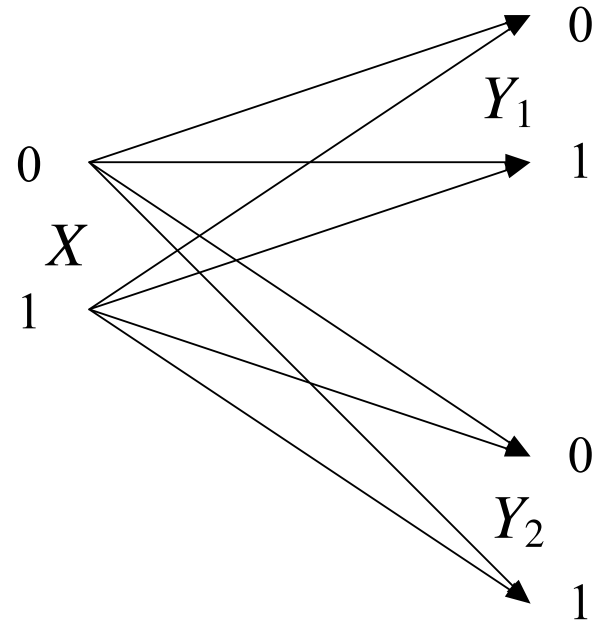
Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση στο **degraded BC** (συνέχεια)

- Η βασική ιδέα (συνέχεια)
  - Ο χρήστης 2 μπορεί να αποκωδικοποιήσει το W_2, αλλά όχι το W_1.
  - Ο (καλύτερος) χρήστης 1 ξεκινά αποκωδικοποιώντας το W_2. Στη συνέχεια, με βάση την τιμή της U προχωρά στην αποκωδικοποίηση του W_1.
  - Διαφορά με το MAC: η αποκωδικοποίηση ξεκινά πάντοτε από την πληροφορία του χειρότερου χρήστη. Επίσης, ο αριθμός των αποκωδικοποιήσεων διαφέρει σε κάθε δέκτη.

Degraded BC: Μετάδοση κοινής πληροφορίας

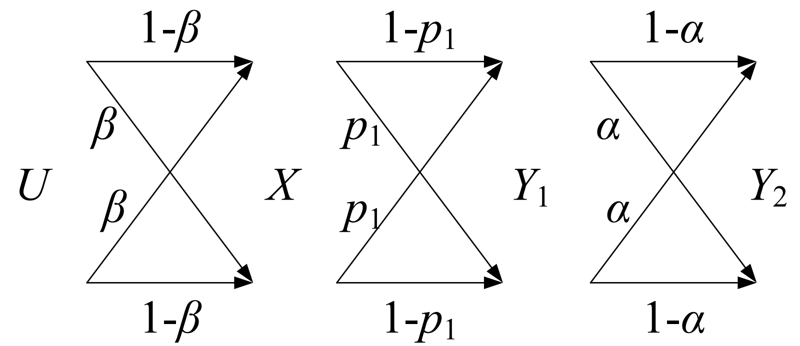
- Θεώρημα (Cover 15.6.4): Εάν το ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι εφικτό σε degraded BC όπου αποστέλλεται ανεξάρτητη πληροφορία, τότε η τριάδα $(R_0, R_1, R_2 - R_0)$ είναι εφικτή όταν στέλνονται R_0 bits κοινής πληροφορίας, εφόσον $R_0 < R_2$.

Παράδειγμα 12.4 (**Cover 15.6.5**)



- Το κανάλι μπορεί να εκφραστεί ως **degraded BC**. Έστω, χωρίς απώλεια γενικότητας, ότι $p_1 < p_2 < 0.5$. Μπορούμε να εκφράσουμε το κανάλι ως διαδοχή δύο **BSC**, όπως φαίνεται στην επόμενη διαφάνεια.

Παράδειγμα 12.4 (**Cover 15.6.5**) (2)

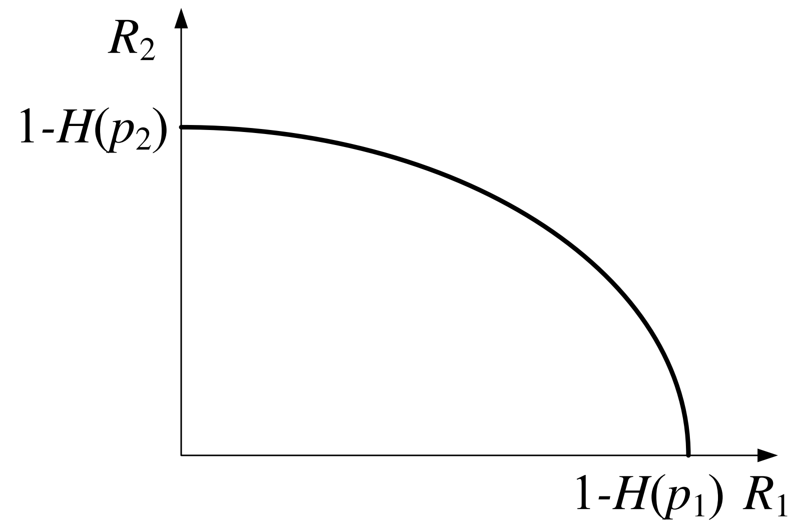


- Πρέπει να ισχύει $p_1(1-\alpha)+(1-p_1)\alpha = p_2 \Rightarrow \alpha = \frac{p_2-p_1}{1-2p_1}$.
- Από το Θεώρημα 15.6.2, $|\mathcal{U}| \leq 2$. Επομένως, επιλέγουμε δυαδική U. Επίσης, λόγω συμμετρίας, $\Pr\{X=U\} = 1-\beta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- $I(U;Y_2) = H(Y_2) - H(Y_2|U)$. Η εντροπία της Y_2 μεγιστοποιείται με χρήση ομοιόμορφης U. Επομένως, $I(U;Y_2) = 1 - H(\beta * p_2)$, με $\beta * p_2 = \beta(1-p_2)+(1-\beta)p_2$.

Παράδειγμα 12.4 (**Cover 15.6.5**) (3)

- Ομοίως, $I(X;Y_1|U) = H(Y_1|U) - H(Y_1|X,U) = H(Y_1|U) - H(Y_1|X) = H(\beta * p_1) - H(p_1)$.

- Μεταβάλλοντας την τιμή της β, μπορούμε να σχεδιάσουμε την περιοχή χωρητικότητας.

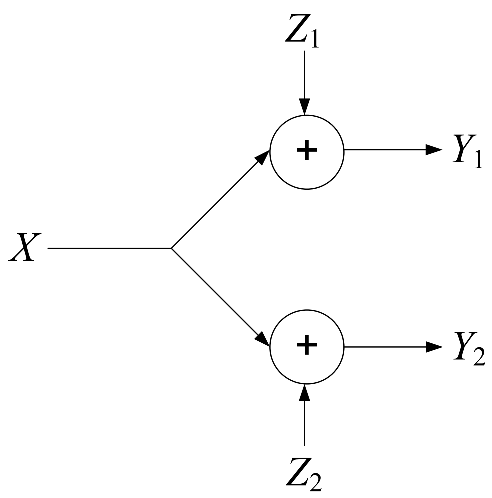


Γκαουσιανό **BC**

- Θεωρούμε το κανάλι 2 χρηστών

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= X + Z_1, \\
Y_2 &= X + Z_2,
\end{aligned}
$$

όπου $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$ και $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, N_2)$, $N_2 \geq N_1$.

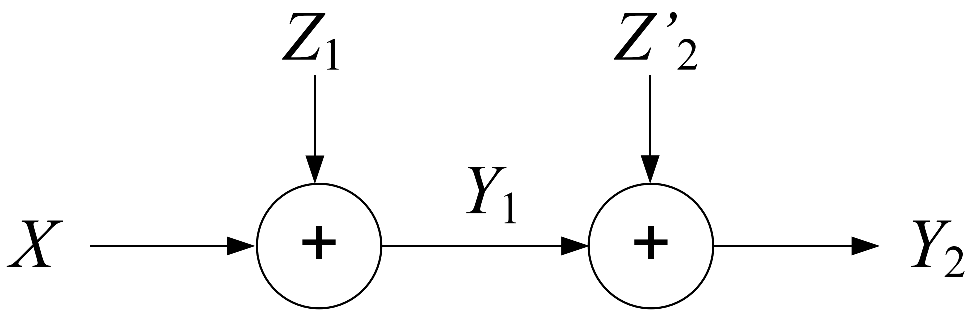


Γκαουσιανό **BC** (2)

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι το Γκαουσιανό BC είναι ισοδύναμο με το **degraded** BC

$$Y_1 = X + Z_1,$$
$$Y_2 = Y_1 + Z_2',$$

με $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$ και $Z_2' \sim \mathcal{N}(0, N_2 - N_1)$.



Περιοχή Χωρητικότητας Γκαουσιανού **BC**

- Για το Γκαουσιανό Κανάλι 2 χρηστών, μπορεί να αποδειχθεί ότι η περιοχή χωρητικότητας δίνεται από τις σχέσεις

$$R_1 < C\left(\frac{\alpha P}{N_1}\right), \text{ και}$$

$$R_2 < C\left(\frac{(1-\alpha)P}{\alpha P + N_2}\right),$$

με $0 \leq \alpha \leq 1$.

Κωδικοποίηση και Αποκωδικοποίηση στο Γκαουσιανό **BC**

- Ο πομπός δημιουργεί 2 βιβλία κωδίκων: Ένα με ισχύ αP και ρυθμό μετάδοσης R_1 και ένα με ισχύ $(1-\alpha)P$ και ρυθμό R_2 (το ζεύγος (R_1, R_2) πρέπει να βρίσκεται μέσα στην περιοχή χωρητικότητας).

- Αν w_1 και w_2 είναι τα μηνύματα που στέλνονται στο χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα, ο πομπός στέλνει στο κανάλι το άθροισμα των κωδικών λέξεων $\mathbf{X}_1(w_1) + \mathbf{X}_2(w_2)$.

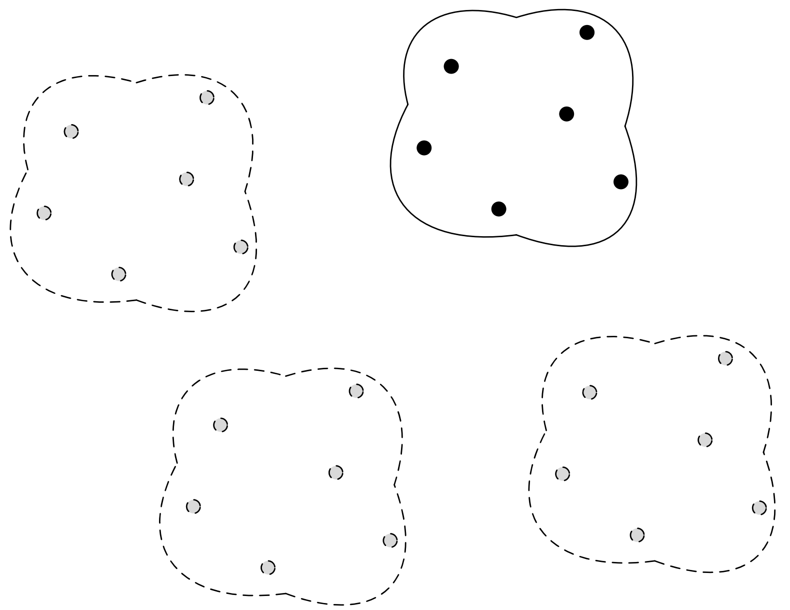
- Ο (χειρότερος) δέκτης 2 βρίσκει την κωδική λέξη $\hat{\mathbf{X}}_2$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο ληφθέν σήμα $\mathbf{Y}_2$ (ή αποκωδικοποιεί με χρήση από κοινού τυπικότητας). Το μήνυμα του δέκτη 1 αποτελεί θόρυβο για το δέκτη 2.

Κωδικοποίηση και Αποκωδικοποίηση στο Γκαουσιανό **BC** (2)

- Ο (καλύτερος) δέκτης 1 αρχίζει βρίσκοντας την κωδική λέξη $\hat{\mathbf{X}}_2$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο ληφθέν σήμα $\mathbf{Y}_2$. Μπορεί να ανιχνεύσει τη $\hat{\mathbf{X}}_2$ γιατί έχει χαμηλότερο θόρυβο από το δέκτη 2. Στη συνέχεια, αφαιρεί τη $\hat{\mathbf{X}}_2$ από το ληφθέν σήμα $\mathbf{Y}_1$ και βρίσκει την κωδική λέξη $\hat{\mathbf{X}}_1$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο σήμα $\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{X}}_2$ (ή αποκωδικοποιεί με χρήση από κοινού τυπικότητας).

- Στο Γκαουσιανό BC (και, γενικά, στο degraded BC) κάθε δέκτης γνωρίζει την πληροφορία των δεκτών που είναι χειρότεροι από αυτόν.

Superposition Coding



- Ο χειρότερος δέκτης μπορεί να δει μόνο ποιο από τα "σύννεφα" έχει σταλεί.
- Ο καλύτερος δέκτης μπορεί να ξεχωρίσει την κωδική λέξη μέσα στο σύννεφο.

FDMA/TDMA downlink

- Ποια είναι η απόδοση ορθογώνιων τρόπων πολύπλεξης στο Γκαουσιανό BC;
- Αποδεικνύεται ότι η μετάδοση με FDMA/TDMA είναι υποβέλτιστη, εκτός από 2 περιπτώσεις:
  1. Τα ακραία σημεία της περιοχής χωρητικότητας όπου μεταδίδεται πληροφορία μόνο σε ένα χρήστη
  2. Στην περίπτωση που ο θόρυβος είναι ο ίδιος και στους 2 δέκτες.
- Η διαφορά στην απόδοση μεγαλώνει όσο μεγαλώνει και η διαφορά μεταξύ των ισχύων θορύβου των χρηστών.

FDMA/TDMA downlink (2)

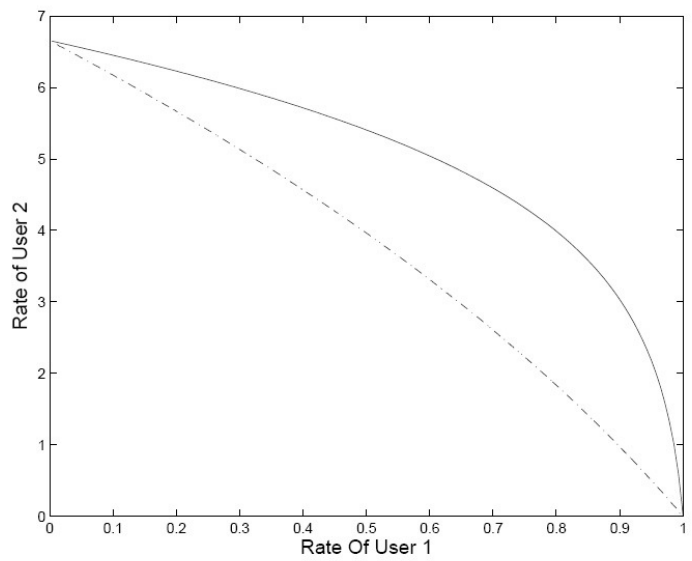


Figure 6.9: The boundary of rate pairs (in bits/s/Hz) achievable by superposition coding (solid line) and orthogonal schemes (dashed line) for the two user asymmetric downlink AWGN channel with the user SNRs equal to 0 and 20 dB (i.e., $P|h_1|^2/N_0 = 1$ and $P|h_2|^2/N_0 = 100$). In the orthogonal schemes, both the power split $P = P_1 + P_2$ and split in degrees of freedom α are jointly optimized to compute the boundary.

Tse & Viswanath, Fundamentals of Wireless Communication

Ανακεφαλαίωση μαθήματος

- **Multiple Access Channel**: Η περιοχή χωρητικότητας είναι, στη γενική περίπτωση, ένα πεντάγωνο (για 2 χρήστες). Για περισσότερους χρήστες είναι ένα πολύεδρο.
  - Στη γενική περίπτωση, μετάδοση επάνω στο όριο της περιοχής χωρητικότητας απαιτεί ταυτόχρονη μετάδοση των χρηστών.
  - Στο δέκτη, οι χρήστες αποκωδικοποιούνται διαδοχικά και το αποκωδικοποιημένο σήμα αφαιρείται (**onion peeling**). Η σειρά αποκωδικοποίησης εξαρτάται από το σημείο της περιοχής χωρητικότητας στο οποίο γίνεται η μετάδοση.

Ανακεφαλαίωση μαθήματος (2)

- Degraded Broadcast Channel: Η περιοχή χωρητικότητας είναι κυρτή.
  - Μετάδοση επάνω στο όριο της περιοχής χωρητικότητας επιτυγχάνεται με κωδικοποίηση υπέρθεσης (superposition coding).
  - Ο κάθε δέκτης αποκωδικοποιεί την πληροφορία που προορίζεται για όλους τους χειρότερους δέκτες και εφαρμόζει onion peeling πριν αποκωδικοποιήσει τη δική του πληροφορία.

- Τόσο στο Γκαουσιανό MAC όσο και στο Γκαουσιανό BC, μετάδοση με ορθογώνια πολύπλεξη (FDMA/TDMA) είναι, στη γενική περίπτωση, υποβέλτιστη.