ΕΕ728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

11ο Μάθημα – 22 Μαΐου 2009

Περιεχόμενα Σημερινού Μαθήματος

- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης

- Στη φύση, τα κανάλια είναι όχι μόνο συνεχών τιμών αλλά και συνεχούς χρόνου (**waveform channels**).

- Το Γκαουσιανό κανάλι συνεχούς χρόνου και πεπερασμένου εύρους ζώνης, W, δίνεται από τη σχέση

$$Y(t) = (X(t) + Z(t)) * h(t),$$

όπου $Z(t)$ είναι λευκός Γκαουσιανός θόρυβος και $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με $f_{\max} = W$.

- Από το Θεώρημα Δειγματοληψίας **Shannon-Nyquist** γνωρίζουμε ότι οποιοδήποτε βαθυπερατό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί χωρίς απώλεια πληροφορίας με χρήση τουλάχιστον $2W$ δειγμάτων του ανά δευτερόλεπτο.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (2)

- Επομένως, για σήματα $X(t)$ τα οποία δεν έχουν φασματικό περιεχόμενο σε συχνότητες μεγαλύτερες της W, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα δείγματά τους και, επομένως, διακριτό μοντέλο καναλιού.

- Για πληρέστερη δικαιολόγηση δείτε π.χ. Cover 9.3. Για μια εξαντλητική εξέταση του προβλήματος με όλες τις απαραίτητες λεπτομέρειες δείτε Gallager, Chapter 8.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (3)

- Έστω ότι παρατηρούμε το σήμα $X(t)$ εύρους ζώνης W για T s. Εάν η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) της $Z(t)$ ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}$, η ισχύς του θορύβου ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}2W = \mathcal{N}_0 W$. Επομένως, η διασπορά κάθε δείγματος θορύβου (από τα $2WT$,συνολικά) ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0 WT}{2WT} = \frac{\mathcal{N}_0}{2}$.

- Η ενέργεια ανά δείγμα ισούται με $\frac{PT}{2WT} = \frac{P}{2W}$.

- Αποδεικνύεται ότι τα δείγματα λευκού Γκαουσιανού θορύβου είναι ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) Γκαουσιανές τ.μ.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (4)

- Συνεπώς, η χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού με περιορισμένο εύρος ζώνης ισούται με

$$C = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{P}{2W}}{\frac{\mathcal{N}_0}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{ bits/δείγμα} \Rightarrow$$

$$C = W\log\left(1+\frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{bits/s.}$$

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (5)

$$C = W \log\left(1 + \frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{ bits/s}$$

Παρατηρήσεις:

- Η χωρητικότητα έχει λογαριθμική εξάρτηση από την ισχύ. Επομένως, καθώς αυξάνουμε την ισχύ, το "κέρδος" που αποκομίζουμε μειώνεται.
- Ή αλλιώς: Για δεδομένη ισχύ, εάν είναι διαθέσιμα δύο Γκαουσιανά κανάλια (ταυτόχρονα) με ίδιο θόρυβο, είναι καλύτερο να μοιράσουμε την ισχύ στα κανάλια.
- Για $W \to \infty$, $C = \frac{P}{\mathcal{N}_0} \log_2 e$ bits/s. Επομένως, για άπειρο εύρος ζώνης, η χωρητικότητα αυξάνει γραμμικά με την ισχύ.

Παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια

- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια

- Έστω k παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μετάδοση πληροφορίας.
  - Για παράδειγμα, μπορεί να έχουμε Γκαουσιανό κανάλι συνεχούς χρόνου με έγχρωμο θόρυβο (με διαφορετική, δηλαδή, πυκνότητα ισχύος σε κάθε συχνότητα). Το κανάλι σε κάθε συχνότητα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Γκαουσιανό. Τυπικό παράδειγμα: Συστήματα DSL.
  - Το μοντέλο παράλληλων Γκαουσιανών καναλιών μπορεί, επίσης, να εφαρμοστεί σε κανάλια με διαλείψεις (fading). Στην περίπτωση επίπεδων (flat) διαλείψεων το κάθε ένα από τα k κανάλια αντιστοιχεί σε μια χρονική στιγμή.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (2)

- Επομένως, για το κανάλι j,

$$Y_j = X_j + Z_j,\ j = 1, 2, \ldots, k,\ \text{και}\ Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j).$$

- Τέλος, θεωρούμε ότι η συνολική ισχύς που είναι διαθέσιμη για μετάδοση είναι πεπερασμένη. Δηλαδή, $E\left[\sum_{j=1}^{k} X_j^2\right] \leq P$.

- Ποια είναι η χωρητικότητα του συστήματος και πώς επιτυγχάνεται;

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (3)

- Η "πληροφοριακή" χωρητικότητα των k παράλληλων καναλιών ισούται με

$$C = \max_{f(x_1,x_2,\ldots,x_k):\sum EX_i^2 \le P} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k).$$

- Αποδεικνύεται ότι, και για τα παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια, η "λειτουργική" χωρητικότητα ισούται με την "πληροφοριακή".
- Δεδομένου ότι οι Z_i είναι ανεξάρτητες,

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Y_1, \ldots, Y_k | X_1, \ldots, X_k) \\ &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k | X_1, \ldots, X_k) \\ &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k) \\ &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i) \end{aligned}$$

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (4)

$$
\begin{aligned}
I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i) \\
&\overset{(a)}{\leq} \sum_i h(Y_i) - h(Z_i) \overset{(b)}{\leq} \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right),
\end{aligned}
$$

όπου $P_i = EX_i^2$.

- Η ισότητα στο (a) ισχύει όταν οι Y_i είναι ανεξάρτητες (και, επομένως, οι X_i, δεδομένου ότι οι Z_i είναι ανεξάρτητες). Η ισότητα στο (b) ισχύει για Γκαουσιανές X_i.
- Επομένως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε $(X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} P_i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & P_k \end{bmatrix}\right)$.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (5)

- Απομένει να βρούμε την κατανομή ισχύος (δηλαδή τα $P_i : \sum_i P_i \leq P$) η οποία μεγιστοποιεί την $I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$.

- Πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \text{μεγιστοποίησε την ποσότητα} \quad & \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right) \\ \text{με τον περιορισμό} \quad & \sum_i P_i = P \end{aligned}$$

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (6)

- Με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange (βλ. π.χ. Cover 9.4.) ότι η λύση δίνεται από την

$$P_i = (\nu - N_i)^+,$$

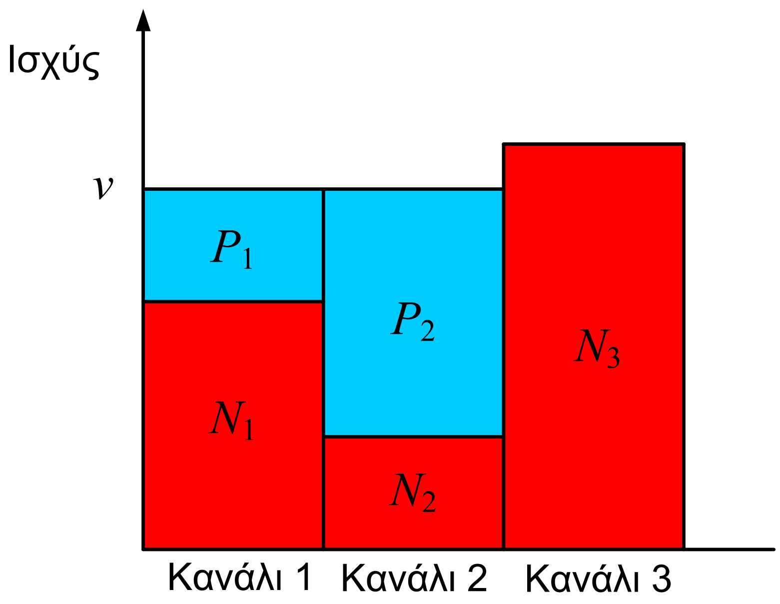
όπου

$$(x)^+ = \begin{cases} x & \text{εάν} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{εάν} \quad x < 0 \end{cases}$$

και $\sum_i (\nu - N_i)^+ = P$.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια – **Waterfilling**

- Η κατανομή ισχύος ονομάζεται waterfilling (ή waterpouring) γιατί η διαθέσιμη ισχύς χρησιμοποιείται για να "γεμίσει" δοχεία με ύψος πάτου ανάλογο της ισχύος του θορύβου.



Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια – **Waterfilling** (2)

- Στην πράξη, ο αλγόριθμος waterfilling, μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής (βλ. και Cioffi `http://www.stanford.edu/group/cioffi/book/chap4.pdf`).

1. Έστω ότι K^* είναι ο αριθμός των καναλιών που χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση (όπου, δηλαδή, $P_i > 0$). Αρχικά υποθέτουμε ότι όλα τα κανάλια είναι "ενεργά" και τα κατατάσσουμε ως προς το θόρυβο. Το κανάλι 1 έχει τη μικρότερη διασπορά θορύβου ($N_i \leq N_j$ για $i < j$).
2. Επομένως, $K^* = K$, $P_i = (\nu - N_i)$, και $P = \sum_{i=1}^{K} P_i = K\nu - \sum_{i=1}^{K} N_i$.
3. Λύνουμε ως προς τον άγνωστο ν.
4. Θεωρούμε το κανάλι K^* με το μεγαλύτερο θόρυβο.
   - Εάν $P_{K^*} = \nu - N_{K^*} \leq 0$, και τα K^* κανάλια χρησιμοποιούνται (εκτός, πιθανώς, από κάποια με $P_i = 0$) και η βέλτιστη κατανομή δίνεται από τα $P_i = \nu - N_i$, $i = 1, \ldots, K^*$.
   - Εάν $P_{K^*} = \nu - N_{K^*} < 0$, το κανάλι K^* δε χρησιμοποιείται και το αφαιρούμε. Θέτουμε $K^* = K^* - 1$ και επιστρέφουμε στο βήμα 3.