ΕΕ728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

7ο Μάθημα – 29 Απριλίου 2008

Ανακεφαλαίωση προηγούμενου μαθήματος

- Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού για διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη – Εισαγωγή και ορισμοί.

Προεπισκόπηση σημερινού μαθήματος

- Απόδειξη θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού για διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη (ευθύ).

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού – Εισαγωγή

- Θα αναφερθούμε στην απόδειξη η οποία χρησιμοποιεί την Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP).
- Η ιδέα:
  - Στέλνουμε στο κανάλι ακολουθία $X^n = x^n(W)$ μήκους n.
  - Στην έξοδο του καναλιού λαμβάνουμε ακολουθία Y^n η οποία εξαρτάται από τη X^n, καθώς και από τον πίνακα μετάβασης, $p(y|x)$, του καναλιού.
  - Στο δέκτη αναζητούμε ακολουθία $\hat{X}^n$ η οποία να είναι από κοινού τυπική με την Y^n. Εάν υπάρχει, ο δέκτης θεωρεί ότι η $\hat{X}^n$ είναι η ακολουθία που μετέδωσε ο πομπός.
  - Από την Ιδιότητα από κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης, με μεγάλη πιθανότητα η ληφθείσα ακολουθία θα είναι από κοινού τυπική με τη μεταδοθείσα.
  - Ωστόσο, υπάρχει η πιθανότητα η Y^n να μην είναι από κοινού τυπική με καμία από τις πιθανές κωδικές λέξεις X^n ή να είναι από κοινού τυπική με άλλη ακολουθία από αυτή που μεταδόθηκε. Στην περίπτωση αυτή εμφανίζεται σφάλμα μετάδοσης.
  - Θα δείξουμε ότι, εάν $R < C$, καθώς το n τείνει στο άπειρο, η πιθανότητα σφάλματος τείνει στο 0.

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης (ευθύ)

- Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού – Εισαγωγή
- $\boxed{\text{Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης (ευθύ)}}$

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού

- Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού:
  - Σε ένα Διακριτό Κανάλι Χωρίς Μνήμη, όλοι οι ρυθμοί οι οποίοι είναι μικρότεροι από την πληροφοριακή χωρητικότητα είναι εφικτοί. Δηλαδή, για κάθε ρυθμό $R < C$, υπάρχει ακολουθία κωδίκων $\left(\lceil 2^{nR} \rceil, n\right)$ με μέγιστη πιθανότητα σφάλματος $\lambda^{(n)} \to 0$.
  - Αντίστροφα, για οποιαδήποτε ακολουθία από κώδικες $\left(\lceil 2^{nR} \rceil, n\right)$ με $\lambda^{(n)} \to 0$ πρέπει να ισχύει $R \leq C$.
- Απόδειξη (ευθύ).

  Για απλοποίηση και χωρίς απώλεια γενικότητας υποθέτουμε ότι ο αριθμός κωδικών λέξεων $\lceil 2^{nR} \rceil$ είναι ακέραιος.

  Θεωρούμε δεδομένη πιθανότητα συμβόλων εισόδου $p(x)$ και δημιουργούμε 2^{nR} τυχαίες κωδικές λέξεις x^n μήκους n θεωρώντας ανεξάρτητες ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) τ.μ. x_i. Η πιθανότητα να δημιουργήσουμε μιας συγκεκριμένη κωδική λέξη (ακολουθία) x^n ισούται με $p(x^n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i)$.

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (2)

- Οι 2^{nR} κωδικές λέξεις αποτελούν τις γραμμές του πίνακα

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \ldots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \ldots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(2^{nR}) & x_2(2^{nR}) & \ldots & x_n(2^{nR}) \end{bmatrix}$$

- Η πιθανότητα να δημιουργηθεί ένας συγκεκριμένος κώδικας (πίνακας) $\mathcal{C}$ ισούται με $\Pr(\mathcal{C}) = \prod_{w=1}^{2^{nR}} \prod_{i=1}^{n} p(x_i(w))$.

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (3)

- Θεωρούμε την παρακάτω ακολουθία βημάτων

1. Δημιουργείται ένας τυχαίος κώδικας $\mathcal{C}$ σύμφωνα με την κατανομή $p(x)$ όπως περιγράφτηκε παραπάνω.
2. Ο κώδικας αποκαλύπτεται στον πομπό και στο δέκτη. Επίσης, τόσο ο πομπός όσο και ο δέκτης γνωρίζουν τον πίνακα μετάβασης του καναλιού, $p(y|x)$.
3. Επιλέγεται ένα μήνυμα W σύμφωνα με ομοιόμορφη κατανομή $\Pr\{W = w\} = 2^{-nR}$, $w = 1, 2, \ldots, 2^{nR}$.
4. Στέλνεται στο κανάλι η $w-$οστή κωδική λέξη $X^n(w)$ η οποία αντιστοιχεί στη w-οστή γραμμή του πίνακα $\mathcal{C}$.
5. Ο δέκτης λαμβάνει ακολουθία Y^n με δεσμευμένη κατανομή $p(y^n|x^n(w)) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i|x_i(w))$.

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (4)

6. Ο δέκτης εκτιμά ποιο μήνυμα έχει σταλεί. Ο <u>βέλτιστος</u> δέκτης χρησιμοποιεί ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας (δεδομένου ότι θεωρούμε ομοιόμορφη κατανομή μηνυμάτων). Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε, για την απόδειξη θα θεωρήσουμε ανίχνευση με βάση την από κοινού τυπικότητα. Παρόλο που ο δέκτης αυτός δεν είναι βέλτιστος, θα αποδείξουμε ότι, και σε αυτήν την περίπτωση, $\lambda^{(n)} \to 0$ για $n \to \infty$ (ο δέκτης είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος). Ο δέκτης αποφασίζει (εκτιμά) ότι εστάλη το μήνυμα $\hat{W}$ εάν ικανοποιούνται <u>ταυτόχρονα</u> οι εξής δύο συνθήκες:

   α. Το ζεύγος ακολουθιών $(X^n(\hat{W}), Y^n)$ είναι από κοινού τυπικό.

   β. Δεν υπάρχει άλλος δείκτης μηνύματος $W' \neq \hat{W}$ για τον οποίο να ισχύει $(X^n(W'), Y^n) \in A_\epsilon^{(n)}$. Δηλαδή, δεν υπάρχει ακολουθία $X^n(W')$ που αντιστοιχεί σε μήνυμα $X^n(W') \neq \hat{W}$ (δηλαδή ανήκει στο βιβλίο κωδίκων) η οποία να είναι από κοινού τυπική με την Y^n.

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (5)

7. Εάν $\hat{W} \neq W$, εμφανίζεται σφάλμα ανίχνευσης. Έστω $\mathcal{E}$ το ενδεχόμενο $\{\hat{W} \neq W\}$.

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (6)
Ανάλυση της πιθανότητας σφάλματος – Εισαγωγή

- Η ιδέα: Αντί να υπολογίσουμε την πιθανότητα σφάλματος για ένα συγκεκριμένο κώδικα, θα υπολογίσουμε τη <u>μέση</u> πιθανότητα σφάλματος για τυχαία δημιουργία κωδίκων.

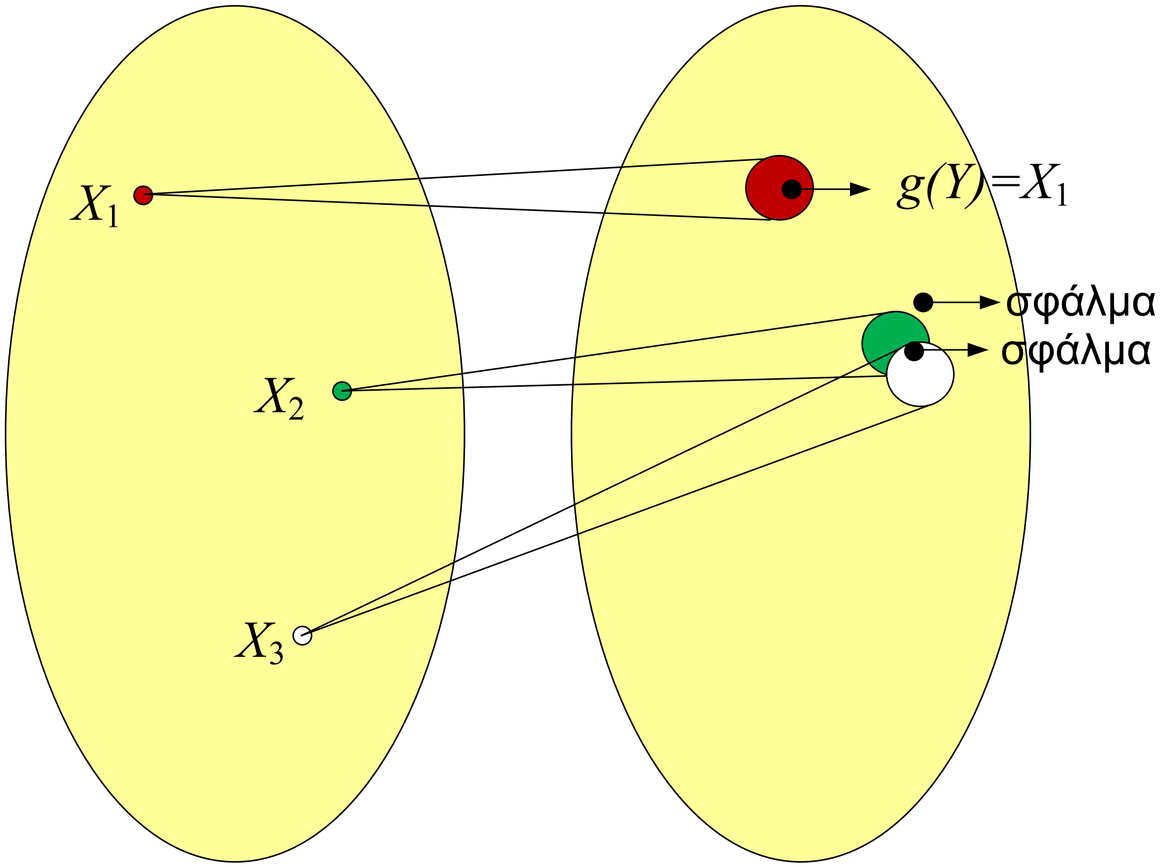
- Όταν χρησιμοποιείται αποκωδικοποίηση με χρήση από κοινού τυπικότητας, υπάρχουν δύο πηγές σφάλματος: Είτε η έξοδος Y^n δεν είναι από κοινού τυπική με την ακολουθία που εκπέμπει ο πομπός ή υπάρχει τουλάχιστον μια ακόμα κωδική λέξη η οποία είναι από κοινού τυπική με την Y^n.

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (7)
Ανάλυση της πιθανότητας σφάλματος – Εισαγωγή

- Από την Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης, η πιθανότητα η ληφθείσα ακολουθία να είναι από κοινού τυπική με την εκπεμφθείσα τείνει στο 1 για $n \to \infty$. Επίσης, η πιθανότητα η ληφθείσα ακολουθία να είναι από κοινού τυπική με ακολουθία διαφορετική από την εκπεμφθείσα ισούται περίπου με $2^{-nI(X;Y)}$. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περίπου 2^{nI} κωδικές λέξεις και, ταυτόχρονα, να διασφαλίσουμε μικρή πιθανότητα σφάλματος.

- Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τα παραπάνω και με την απαραίτητη μαθηματική αυστηρότητα.

Αποκωδικοποίηση με χρήση από κοινού τυπικότητας



Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (8)
Υπολογισμός Πιθανότητας Σφάλματος (I)

- Έστω ότι το μήνυμα W που εκπέμπεται επιλέγεται με ομοιόμορφη κατανομή από τα 2^{nR} πιθανά μηνύματα. $\mathcal{E} \triangleq \{\hat{W}(Y^n) \neq W\}$ είναι το ενδεχόμενο σφάλματος.

- Θα υπολογίσουμε τη <u>μέση</u> πιθανότητα σφάλματος για όλα τα πιθανά βιβλία κωδίκων.

$$\Pr\{\mathcal{E}\} = \sum_{\mathcal{C}} \Pr(\mathcal{C}) P_e^{(n)}(\mathcal{C}) =$$

$$= \sum_{\mathcal{C}} \Pr(\mathcal{C}) \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \lambda_w(\mathcal{C}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \sum_{\mathcal{C}} \Pr(\mathcal{C}) \lambda_w(\mathcal{C}).$$

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (9) Υπολογισμός Πιθανότητας Σφάλματος (II)

- Δεδομένου ότι η αντιστοίχιση μηνυμάτων σε κωδικές λέξεις γίνεται τυχαία και επειδή για όλους τους πιθανούς κώδικες το μήνυμα W θα αντιστοιχίζεται κάθε φορά σε διαφορετική κωδική λέξη, η ποσότητα $\sum_{\mathcal{C}} \Pr(\mathcal{C})\lambda_w(\mathcal{C})$ είναι ανεξάρτητη του μηνύματος w. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι εστάλη η κωδική λέξη με δείκτη $w = 1$.

- Επομένως, η $\Pr(\mathcal{E})$ ισούται με

$$\Pr\{\mathcal{E}\} = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \sum_{\mathcal{C}} \Pr(\mathcal{C})\lambda_w(\mathcal{C}) = \sum_{\mathcal{C}} \Pr(\mathcal{C})\lambda_1(\mathcal{C}) \triangleq \Pr(\mathcal{E}).$$

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (10) Υπολογισμός Πιθανότητας Σφάλματος (III)

- Ορίζουμε τα ενδεχόμενα $E_i = \{(X^n(i), Y^n) \in A_\epsilon^{(n)}\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$, δηλαδή τα ενδεχόμενα η κωδική λέξη $X^n(i)$ (που αντιστοιχεί στο μήνυμα i) να είναι από κοινού τυπική με τη ληφθείσα ακολουθία Y^n η οποία προήλθε από μετάδοση της κωδικής λέξης $X^n(1)$.

- Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\Pr(\mathcal{E}) &= P(E_1^c \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_{2^{nR}} | W = 1) \\ &\leq P(E_1^c | W = 1) + \sum_{i=2}^{2^{nR}} P(E_i | W = 1).\end{aligned}$$

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (11) Υπολογισμός Πιθανότητας Σφάλματος (IV)

$$\Pr(\mathcal{E}) \leq P(E_1^c|W=1) + \sum_{i=2}^{2^{nR}} P(E_i|W=1).$$

- Από την ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης, η πιθανότητα η Y^n να μην είναι από κοινού τυπική με τη $X^n(1)$ τείνει στο 0 για $n \to \infty$: Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $P(E_1^c|W=1) \leq \epsilon$, για $n > n_0$.
- Επίσης, από τον τυχαίο τρόπο δημιουργίας του κώδικα, οι κωδικές λέξεις $X^n(1)$ και $X^n(i)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους για $i \neq 1$, με αποτέλεσμα η Y^n να είναι ανεξάρτητη από τις $X^n(i)$ για $i \neq 1$. Από την Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης, η πιθανότητα οι $X^n(i)$ και Y^n να είναι από κοινού τυπικές ενώ επιλέχθηκαν ανεξάρτητα είναι $\leq 2^{-n(I(X;Y)-3\epsilon)}$.

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (12) Υπολογισμός Πιθανότητας Σφάλματος (V)

- Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω,

$$\Pr(\mathcal{E}) \leq P(E_1^c|W=1) + \sum_{i=2}^{2^{nR}} P(E_i|W=1) \leq \epsilon + \sum_{i=2}^{2^{nR}} 2^{-n(I(X;Y)-3\epsilon)}$$

$$= \epsilon + \left(2^{nR} - 1\right) 2^{-n(I(X;Y)-3\epsilon)} \leq \epsilon + 2^{-n(I(X;Y)-3\epsilon-R)} \leq 2\epsilon.$$

  Η τελευταία ανισότητα ισχύει εφόσον $n > n_1$ και $R < I(X;Y) - 3\epsilon$.

- Επομένως, εάν $R < I(X;Y)$, μπορούμε να επιλέξουμε n τέτοιο ώστε η <u>μέση</u> πιθανότητα σφάλματος υπολογισμένη επάνω σε όλους τους πιθανούς κώδικες και σε $\overline{\text{όλες}}$ τις πιθανές κωδικές λέξεις να μην υπερβαίνει το 2ϵ, για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$.
- Δεν τελειώσαμε ακόμα... Πρέπει να δείξουμε ότι η <u>μέγιστη</u> πιθανότητα σφάλματος $\lambda^{(n)} \to 0$ και ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας κώδικας με $\overline{\lambda^{(n)} \to 0}$.

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (13)
Επιλογή βιβλίου κωδίκων

- Εάν οι κώδικες δημιουργηθούν με βάση την κατανομή $p^*(x)$ η οποία μεγιστοποιεί την αμοιβαία πληροφορία, $I_{p^*}(X;Y) = C$, και, επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε με $R < C$.

- Δεδομένου ότι η μέση πιθανότητα σφάλματος για όλους τους τυχαίους κώδικες δεν υπερβαίνει το 2ϵ, υπάρχει τουλάχιστον ένα βιβλίο κωδίκων (κώδικας) $\mathcal{C}^*$ για το οποίο η μέση πιθανότητα σφάλματος δεν υπερβαίνει το 2ϵ: $\Pr(\mathcal{E}|\mathcal{C}^*) \leq 2\epsilon$. Ο $\mathcal{C}^*$ μπορεί να βρεθεί με αναζήτηση μέσα σε όλους τους 2^{nR} κώδικες. Επομένως,

$$\Pr(\mathcal{E}|\mathcal{C}^*) \leq \frac{1}{2^{nR}} \sum \lambda_i(\mathcal{C}^*) \leq 2\epsilon.$$

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (14)
Επιλογή βιβλίου κωδίκων (συνέχεια)

- Το γεγονός ότι η μέση πιθανότητα σφάλματος του κώδικα $\mathcal{C}^*$ είναι $\leq 2\epsilon$, δεν εγγυάται ότι η πιθανότητα σφάλματος που αντιστοιχεί στη μετάδοση ενός συγκεκριμένου μηνύματος W (και, επομένως, μιας συγκεκριμένης κωδικής λέξης $X^n(W)$) θα είναι $\leq 2\epsilon$.

- Εάν θέλουμε να διασφαλίσουμε μικρή πιθανότητα σφάλματος για <u>κάθε</u> κωδική λέξη (και, άρα, για κάθε μήνυμα) μπορούμε να αφαιρέσουμε τις μισές χειρότερες κωδικές λέξεις του κώδικα (δηλαδή τις 2^{nR-1} κωδικές λέξεις με τη μεγαλύτερη πιθανότητα σφάλματος).

- Δεδομένου ότι η μέση πιθανότητα σφάλματος είναι $\leq 2\epsilon$, η <u>μέγιστη</u> πιθανότητα σφάλματος των μισών "καλύτερων" λέξεων που απομένουν δε θα υπερβαίνει το 4ϵ.

Απόδειξη Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (15) Επιλογή βιβλίου κωδίκων (συνέχεια)

- Ο νέος κώδικας έχει 2^{nR-1} κωδικές λέξεις και, άρα, ρυθμό $R' = R - \frac{1}{n}$. Για μεγάλα n, η απώλεια ρυθμού μετάδοσης είναι αμελητέα.

- Επομένως, δείξαμε ότι μπορούμε να επιτύχουμε οποιοδήποτε ρυθμό μετάδοσης που δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα, και, ταυτόχρονα, η <u>μέγιστη</u> πιθανότητα σφάλματος $\lambda^{(n)} \leq 4\epsilon$.

Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού (Ευθύ) – Ανακεφαλαίωση

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού

- Δημιουργήσαμε όλους τους πιθανούς κώδικες (βιβλία κωδίκων) με κωδικές λέξεις μεγάλου μήκους n.
- Η δημιουργία των κωδικών λέξεων έγινε με βάση την κατανομή $p^*(x)$ που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα καναλιού.
- Κρατήσαμε τον καλύτερο από τους τυχαίους κώδικες $\mathcal{C}^*$ (τον κώδικα στον οποίο αντιστοιχεί η μικρότερη μέση πιθανότητα σφάλματος).
- Δείξαμε ότι, για αρκούντως μεγάλα μήκη κωδικών λέξεων n, εφόσον $R < I(X;Y)$, η πιθανότητα η ακολουθία εξόδου να μην είναι τυπική με τη μεταδοθείσα κωδική λέξη ή να είναι τυπική με κωδική λέξη διαφορετική από αυτή που μεταδόθηκε τείνει στο 0. Επομένως, η μέση πιθανότητα σφάλματος μπορεί να περιοριστεί αυθαίρετα κοντά στο 0.
- Με τροποποίηση του κώδικα (και αυθαίρετα μικρή απώλεια ρυθμού μετάδοσης) δείξαμε ότι όχι μόνο η μέση, αλλά και η μέγιστη πιθανότητα σφάλματος μπορεί να περιοριστεί αυθαίρετα κοντά στο 0.

Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού (Ευθύ) – Σχόλια

- Η δημιουργία τυχαίων κωδίκων οδηγεί μεν σε (μια) απόδειξη του Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού, αλλά δεν αποτελεί πρακτικό τρόπο μετάδοσης.

- Η δημιουργία του κώδικα, αν και πολύπλοκη, μπορεί να γίνει μια φορά υποθέτοντας ότι ο πίνακας μετάβασης του καναλιού $p(y|x)$ δεν αλλάζει. Παρατηρήστε ότι ο βέλτιστος κώδικας μπορεί να βρεθεί από τον πομπό και το δέκτη ανεξάρτητα, χωρίς συνεννόηση, εάν γνωρίζουν και οι δύο τον πίνακα μετάβασης καναλιού και αν δημιουργήσουν όλους τους πιθανούς κώδικες (και κρατήσουν τον καλύτερο από άποψη ελάχιστης πιθανότητας σφάλματος).

Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού (Ευθύ) – Σχόλια (συνέχεια)

- Το σημαντικότερο πρόβλημα βρίσκεται στην αποκωδικοποίηση, καθώς ο αριθμός των κωδικών λέξεων των οποίων η από κοινού τυπικότητα με την Y^n θα πρέπει να ελεγχθεί αυξάνει εκθετικά με το n.

- Το πρόβλημα αυτό παραμένει ακόμα και όταν η αποκωδικοποίηση γίνεται με χρήση άλλων κριτηρίων (π.χ. ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας).

- Η επίτευξη ρυθμών μετάδοσης κοντά στη χωρητικότητα του καναλιού με υλοποιήσιμους τρόπους αποτελεί αντικείμενο της Θεωρίας Κωδικοποίησης. Η μετάδοση κοντά στη χωρητικότητα είναι σήμερα εφικτή με πολυπλοκότητα που δεν είναι απαγορευτική για την υλοποίηση των αποκωδικοποιητών.

Ανακεφαλαίωση μαθήματος και Προεπισκόπηση επόμενου μαθήματος

- Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού (για Διακριτά Κανάλια Χωρίς Μνήμη)
  - Ευθύ: Για $n \to \infty$, η πιθανότητα να αποκωδικοποιήσουμε λάθος σύμβολο ή να μη μπορούμε να αποκωδικοποιήσουμε τείνει στο 0, εφόσον $R < C = \max_{p(x)} I(X;Y)$.
  - Την επόμενη φορά: Αντίστροφο: Με χρήση της ανισότητας **Fano** θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει κώδικας με $\lambda^{(n)} \to 0$ που να επιτυγχάνει $R > C$.
- Χωρητικότητα Διακριτών Καναλιών Χωρίς Μνήμη με Ανάδραση.
  - Η χωρητικότητα διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη δεν αυξάνει εάν χρησιμοποιήσουμε ανάδραση!

Ανακεφαλαίωση μαθήματος και Προεπισκόπηση επόμενου μαθήματος (2)

- Βέλτιστη μέθοδος αποκωδικοποίησης (με χρήση Μέγιστης Πιθανοφάνειας – Maximum Likelihood).
- Εκθέτης Σφάλματος (Error Exponent): Παρέχει ένα άνω φράγμα για το σφάλμα αποκωδικοποίησης με χρήση ML για δεδομένο μήκος κώδικα, n.
- Απόδειξη Θεωρήματος Διαχωρισμού Πηγής - Καναλιού. Η κωδικοποίηση πηγής και καναλιού μπορούν να γίνουν ανεξάρτητα χωρίς απώλεια ρυθμού μετάδοσης (για κανάλια μιας εισόδου - μιας εξόδου).