EE728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

4ο Μάθημα – 1 Απριλίου 2008

Ανακεφαλαίωση προηγούμενου μαθήματος

- Η εντροπία είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$.

- Η αμοιβαία πληροφορία $I(X;Y)$ είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$ για δεδομένη $p(y|x)$.

- Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων. Η επεξεργασία τ.μ. με χρήση νομοτελειακής συνάρτησης δεν μπορεί να αυξήσει την πληροφορία που περιέχεται σε αυτή.

- Ανισότητα Fano. Δίνει κάτω φράγμα για την πιθανότητα σφάλματος εκτίμησης τ.μ.

- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Asymptotic Equipartition Property). Εισαγωγή στην έννοια της τυπικότητας.

Στο σημερινό μάθημα

- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP) (συνέχεια). Ορισμός τυπικών ακολουθιών και ιδιότητες.
- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής. Απόδειξη για πηγές χωρίς μνήμη.
- Εισαγωγή στην Κωδικοποίηση Καναλιού
  - Διακριτά Κανάλια. Διακριτά Κανάλια Χωρίς Μνήμη.
  - Πληροφοριακή Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη.

Είδη σύγκλισης (υπενθύμιση)

Μια ακολουθία τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ συγκλίνει σε μια τ.μ. X:

1. Κατά πιθανότητα (in probability) εάν, για κάθε $\epsilon > 0$, $\Pr\{|X_n - X| > \epsilon\} \to 0$ για $n \to \infty$. Πιο αυστηρά: Για κάθε δ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε, για $n > n_0$, $\Pr\{|X_n - X| > \epsilon\} < \delta$.

2. Κατά μέση τετραγωνική τιμή (mean square) εάν $E(X_n - X)^2 \to 0$.

3. Με πιθανότητα 1 (ή σχεδόν βέβαια) εάν $\Pr\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$.

Τυπικό Σύνολο (**Typical Set**) και ιδιότητες

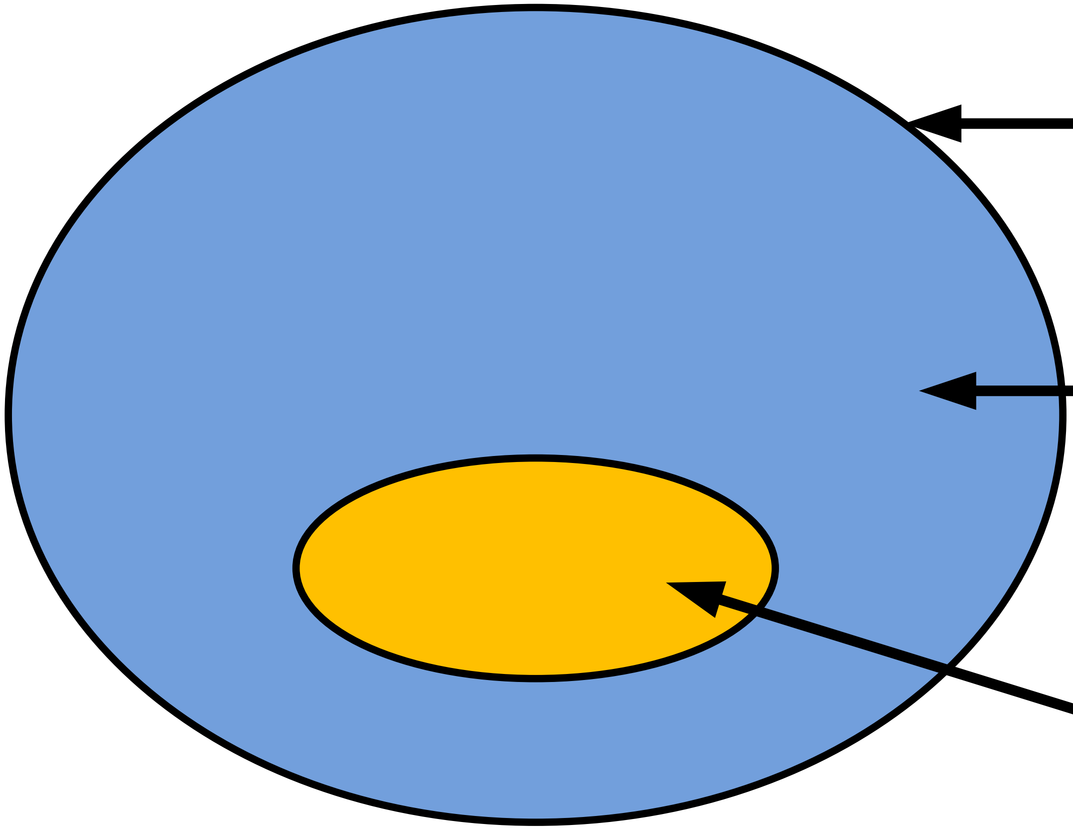
- Ορισμός: Το (ασθενώς) τυπικό σύνολο $A_\epsilon^{(n)}$ που αντιστοιχεί στην κατανομή $p(x)$ αποτελείται από τις ακολουθίες $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$2^{-n(H(X)+\epsilon)} \le p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 2^{-n(H(X)-\epsilon)}.$$

- Ιδιότητες $A_\epsilon^{(n)}$:

1. Εάν $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_\epsilon^{(n)}$, τότε $H(X) - \epsilon \le -\frac{1}{n}\log p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le H(X) + \epsilon$.
2. $\Pr\{A_\epsilon^{(n)}\} > 1 - \epsilon$ για n μεγαλύτερο από κάποια τιμή n_0.
3. $|A_\epsilon^{(n)}| \le 2^{n(H(X)+\epsilon)}$, όπου $|A_\epsilon^{(n)}|$ ο αριθμός των στοιχείων του τυπικού συνόλου $A_\epsilon^{(n)}$.
4. $|A_\epsilon^{(n)}| \ge (1-\epsilon)2^{n(H(X)-\epsilon)}$, για n μεγαλύτερο από κάποια τιμή n_0.

Τυπικό Σύνολο



$\mathcal{X}^n : |\mathcal{X}|^n$ στοιχεία

Μη τυπικό σύνολο

Τυπικό σύνολο

$A_{\in}^{(n)} : 2^{n(H+\in)}$ στοιχεία

Αποδείξεις ιδιοτήτων Τυπικού Συνόλου

1. Εάν $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_\epsilon^{(n)}$, τότε $H(X) - \epsilon \le -\frac{1}{n}\log p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le H(X) + \epsilon$.
   Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του τυπικού συνόλου παίρνοντας το λογάριθμο.

2. $\Pr\{A_\epsilon^{(n)}\} > 1 - \epsilon$ για n μεγαλύτερο από κάποια τιμή n_0.

   Προκύπτει άμεσα από το AEP δεδομένου ότι η πιθανότητα μια ακολουθία να είναι τυπική τείνει στο 1 καθώς το n τείνει στο άπειρο. Επομένως, για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε, για $n \ge n_0$,

$$\Pr\left\{\left|-\frac{1}{n}\log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) - H(X)\right| < \epsilon\right\} > 1 - \delta.$$

   Θέτοντας $\delta = \epsilon$ προκύπτει η ιδιότητα.

Αποδείξεις ιδιοτήτων Τυπικού Συνόλου (συνέχεια)

3. $|A_\epsilon^{(n)}| \le 2^{n(H(X)+\epsilon)}$.

$$1 = \sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}^n} p(\mathbf{x}) \ge \sum_{\mathbf{x}\in A_\epsilon^{(n)}} p(\mathbf{x}) \stackrel{(a)}{\ge} \sum_{\mathbf{x}\in A_\epsilon^{(n)}} 2^{-n(H(X)+\epsilon)} = 2^{-n(H(X)+\epsilon)}|A_\epsilon^{(n)}|.$$

Στο (a) χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός του τυπικού συνόλου.

4. $|A_\epsilon^{(n)}| \ge (1-\epsilon)2^{n(H(X)-\epsilon)}$, για n μεγαλύτερο από κάποια τιμή n_0.

Από τη 2η ιδιότητα, για $n \ge n_0$,

$$1-\epsilon < \Pr\{A_\epsilon^{(n)}\} = \sum_{\mathbf{x}\in A_\epsilon^{(n)}} p(\mathbf{x}) \le \sum_{\mathbf{x}\in A_\epsilon^{(n)}} 2^{-n(H(X)-\epsilon)} = 2^{-n(H(X)-\epsilon)}|A_\epsilon^{(n)}|.$$

Παράδειγμα 3.1 (**Cover Problem 3.6**)

- Έστω οι ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ που ακολουθούν κατανομή $p(x)$. Να βρεθεί η τιμή του ορίου

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ p(X_1, X_2, \ldots, X_n)^{1/n} \right\}.$$

- Απάντηση:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \log p(X_1, X_2, \ldots, X_n)^{1/n} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} \log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \right\} = -H(X)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\{ p(X_1, X_2, \ldots, X_n)^{1/n} \right\} = 2^{-H(X)}.$$

Ισχυρή Τυπικότητα (**Strong Typicality**)

- Έως τώρα ασχοληθήκαμε με την ασθενή τυπικότητα.

- Μια ακολουθία είναι ασθενώς τυπική όταν η εμπειρική της εντροπία βρίσκεται κοντά στην πραγματική εντροπία της πηγής που παράγει την ακολουθία.

- Για να είναι μια ακολουθία ισχυρώς τυπική πρέπει η σχετική συχνότητα με την οποία εμφανίζεται κάθε σύμβολο μέσα στην ακολουθία να βρίσκεται κοντά στην κατανομή της πηγής.

- Για παράδειγμα, για πηγή Bern$(1/2)$, η ακολουθία 0 0 0 1 0 0 0 είναι ασθενώς τυπική, αλλά όχι ισχυρώς τυπική. Η ακολουθία 0 0 0 1 1 0 1 1 είναι ισχυρώς και ασθενώς τυπική.

Ισχυρώς Τυπικό Σύνολο – ορισμός

- Θεωρούμε πηγή χωρίς μνήμη με κατανομή $p(x)$. Έστω ότι $\mathcal{S}_X \subseteq \mathcal{X}$ είναι το σύνολο στο οποίο $p(x) > 0$.

- Το ισχυρώς τυπικό σύνολο $T^n_{[X]\delta}$ που αντιστοιχεί στην κατανομή $p(x)$ αποτελείται από τις ακολουθίες $X_1^n \in \mathcal{X}^n$ για τις οποίες $N(x; X_1^n) = 0$ για $x \notin \mathcal{S}_X$ και

$$\sum_{x \in \mathcal{S}_X} \left| \frac{1}{n} N(x; X_1^n) - p(x) \right| \leq \delta,$$

  όπου $N(x; X_1^n)$ είναι ο αριθμός των εμφανίσεων του στοιχείου x μέσα στην ακολουθία X_1^n και δ είναι αυθαίρετα μικρός πραγματικός αριθμός.

- Οι ακολουθίες που ανήκουν στο $T^n_{[X]\delta}$ ονομάζονται ισχυρώς δ-τυπικές.

Ισχυρή Τυπικότητα – σχόλια

- Αποδεικνύεται ότι αν μια ακολουθία είναι ισχυρώς τυπική τότε είναι και ασθενώς τυπική.

- Το αντίστροφο δεν ισχύει, όπως είδαμε στο παράδειγμα πηγής $\mathsf{Bern}(1/2)$ χωρίς μνήμη.

- Η ισχυρή τυπικότητα είναι πιο ευέλικτη από την ασθενή. Ωστόσο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για τ.μ. με πεπερασμένο αλφάβητο.

- Μπορούμε να αποδείξουμε τις ίδιες ιδιότητες για την ισχυρή AEP όπως και για την ασθενή AEP με παρόμοιο τρόπο.

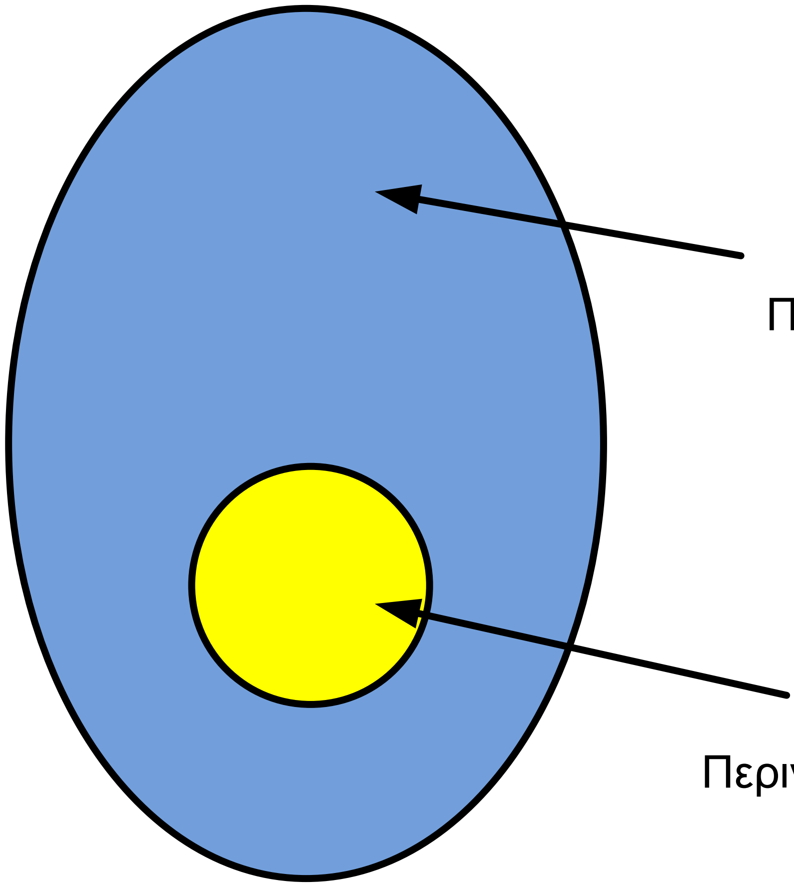
Κωδικοποίηση Σταθερού Μήκους

- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP) (συνέχεια)
- Κωδικοποίηση Σταθερού Μήκους
- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής
- Διακριτά Κανάλια και Χωρητικότητα – Εισαγωγή.

Κωδικοποίηση Σταθερού Μήκους

- Έστω, όπως και προηγουμένως, ανεξάρτητες, ομοίως κατανεμημένες (i.i.d) τ.μ. $X_i \sim p(x)$. Θέλουμε να βρούμε αποδοτική περιγραφή ακολουθιών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ των τ.μ.
- Χωρίζουμε όλες τις $|\mathcal{X}|^n$ πιθανές ακολουθίες σε 2 σύνολα: Το <u>τυπικό</u> σύνολο $A_\epsilon^{(n)}$ και το <u>μη τυπικό</u> σύνολο $A_\epsilon^{(n)^c} = \mathcal{X}^n - A_\epsilon^{(n)}$.
- Διατάσσουμε όλες τις ακολουθίες σε κάθε σύνολο. Για το τυπικό σύνολο, δεδομένου ότι περιέχει το πολύ $2^{n(H+\epsilon)}$ ακολουθίες (σύμφωνα με την ιδιότητα 3), χρειαζόμαστε το πολύ $n(H+\epsilon)+1$ bits (το επιπλέον 1 bit οφείλεται στο ότι ενδέχεται η ποσότητα $n(H+\epsilon)$ να μην είναι ακέραιος).
- Για το μη τυπικό σύνολο, χρειαζόμαστε το πολύ $n \log |\mathcal{X}| + 1$ bits.
- Σχηματίζουμε ακολουθία μήκους $n > n_0$ από τα σύμβολα X_i της πηγής που θέλουμε να κωδικοποιήσουμε. Εάν η ακολουθία είναι τυπική, χρησιμοποιούμε πρόθεμα 0, αλλιώς χρησιμοποιούμε πρόθεμα 1.

Κωδικοποίηση Σταθερού Μήκους με χρήση τυπικού συνόλου



Μη τυπικό σύνολο

Περιγραφή: $n\log|\mathcal{X}|+2$ bits

Τυπικό σύνολο

Περιγραφή: $n(H+\varepsilon)+2$ bits

Κωδικοποίηση Σταθερού Μήκους (συνέχεια)

- Το μέσο μήκος της κωδικής λέξης ισούται με

$$
\begin{aligned}
E[l(X^n)] = \sum_{x^n} p(x^n) l(x^n) &= \sum_{x^n \in A_\epsilon^{(n)}} p(x^n) l(x^n) + \sum_{x^n \in A_\epsilon^{(n)c}} p(x^n) l(x^n) \\
&\leq \sum_{x^n \in A_\epsilon^{(n)}} p(x^n)(nH + \epsilon) + 2) + \sum_{x^n \in A_\epsilon^{(n)c}} p(x^n)(n \log |\mathcal{X}| + 2) \\
&= \Pr\left\{ A_\epsilon^{(n)} \right\} [(nH + \epsilon) + 2] + \Pr\left\{ A_\epsilon^{(n)^c} \right\} [n \log |\mathcal{X}| + 2] \\
&\leq (nH + \epsilon) + 2 + \epsilon(n \log |\mathcal{X}| + 2) = n(H + \epsilon').
\end{aligned}
$$

- Το $\epsilon' = \epsilon + \epsilon \log |\mathcal{X}| + \frac{2+\epsilon}{n}$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό επιλέγοντας κατάλληλη τιμή του n και του ϵ (το οποίο εξαρτάται από το n).
- Συνεπώς, $E\left[\frac{1}{n} l(X^n)\right] \leq H(X) + \epsilon'$ για $n > n_1$.

Παρατηρήσεις

- Δείξαμε ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένας) τρόπος να συμπιέσουμε μια ακολουθία μήκους n με χρήση nH bits (αντί για $n \log |\mathcal{X}|$).

- Η σημαντική παρατήρηση είναι ότι, καθώς το μήκος της ακολουθίας τείνει στο άπειρο, η πιθανότητα να εμφανιστεί μη τυπική ακολουθία τείνει στο 0. Μάλιστα, η κωδικοποίηση των μη τυπικών ακολουθιών έγινε χωρίς να ληφθεί πρόνοια να είναι όσο το δυνατόν αποδοτικότερη (χρησιμοποιώντας, π.χ. $n \log \left| A_\epsilon^{(n)^c} \right|$ bits).

- Παρατηρήστε ότι το τυπικό σύνολο ενδέχεται να περιέχει λίγα στοιχεία (το μέγεθός του είναι $\sim 2^{nH}$). Ωστόσο, τα στοιχεία του περιέχουν (σχεδόν) όλη την πιθανότητα!

Παρατηρήσεις (συνέχεια)

- Δε χάσαμε καθόλου πληροφορία με την κωδικοποίηση, δεδομένου ότι σε κάθε ακολουθία αντιστοιχίσαμε μια μοναδική κωδική λέξη.

- Ωστόσο, παρατηρούμε ότι, για να συμπιέσουμε αποδοτικά, χρειαζόμαστε μεγάλα μήκη ακολουθιών και, επομένως, δημιουργούνται μεγάλες απαιτήσεις σε καθυστέρηση και μνήμη.

- Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει κώδικας χωρίς απώλειες που επιτυγχάνει συμπίεση με λιγότερα bits ανά σύμβολο από την εντροπία (Αντίστροφο Θεωρήματος Κωδικοποίησης Πηγής).

Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής

- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP)
- Κωδικοποίηση Σταθερού Μήκους
- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής
- Διακριτά Κανάλια και Χωρητικότητα – Εισαγωγή.

Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής

- Είδαμε ότι, για πηγή χωρίς μνήμη, μπορούμε να πετύχουμε συμπίεση αυθαίρετα κοντά στην εντροπία αυξάνοντας το μήκος των κωδικοποιούμενων ακολουθιών (εκμεταλλευόμενοι το AEP).

- Στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας", είδαμε, επίσης, ότι για βέλτιστους κώδικες μεταβλητού μήκους και πηγή χωρίς μνήμη, $H(X) \leq E[l^*] < H(X) + 1 \Rightarrow H(X^L) \leq E[\tilde{l}^*] < H(X^L) + 1 \Rightarrow LH(X) \leq E[\tilde{l}^*] < LH(X) + 1 \Rightarrow H(X) \leq E[\tilde{l}^*]/L < H(X) + 1/L$.

- Επομένως, υπάρχει και δεύτερος τρόπος να συμπιέσουμε κοντά στην εντροπία, αυτή τη φορά με κώδικα μεταβλητού μήκους.

- Απομένει να αποδείξουμε ότι, εάν προσπαθήσουμε να συμπιέσουμε με μέσο μήκος μικρότερο από την εντροπία, η πιθανότητα σφάλματος $P_e \rightarrow 1$.

Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής (2)

- Έστω ότι το μήκος της αρχικής (προς συμπίεση) ακολουθίας ισούται με L. Θεωρούμε δυαδικές ακολουθίες (αν και η απόδειξη γενικεύεται εύκολα). Έστω ότι η ακολουθία συμπιέζεται με χρήση N bits, όπου $N < L[H(X) - 2\epsilon]$, $\epsilon > 0$. Επομένως, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το πολύ $2^{L(H(X)-2\epsilon)}$ ακολουθίες στην έξοδο του αποκωδικοποιητή.

- Δεδομένου ότι η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας μιας τυπικής ακολουθίας δεν υπερβαίνει την τιμή $2^{-L(H(X)-\epsilon)}$, η πιθανότητα P_c μια κωδική λέξη να έχει αντιστοιχιστεί σε δεδομένη τυπική ακολουθία είναι $P_c \leq 2^{-L(H(X)-\epsilon)} \cdot 2^{L(H(X)-2\epsilon)} = 2^{-L\epsilon}$.

- Συνεπώς, για την πιθανότητα σφάλματος, ισχύει $P_e = 1 - P_c \geq 1 - 2^{-L\epsilon}$. Για $L \to \infty$, $P_e \to 1$ για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$.

Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής (3)

- Επομένως, αποδείξαμε και το αντίστροφο του θεωρήματος Κωδικοποίησης Πηγής, ότι, δηλαδή, δεν μπορεί να επιτευχθεί συμπίεση χωρίς απώλειες με μέσο μήκος μικρότερο της εντροπίας.
- Το Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής για κωδικοποίηση μεταβλητού μήκους είναι πιο "ισχυρό" από το Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής για κωδικοποίηση σταθερού μήκους, δεδομένου ότι στο όριο η συμπίεση μεταβλητού μήκους συμπίπτει με τη συμπίεση σταθερού μήκους.
- Το Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής ισχύει και για διακριτές στάσιμες εργοδικές πηγές με $H(X) < \infty$: Μπορούμε να συμπιέσουμε με μέσο μήκος που τείνει στο ρυθμό εντροπίας $H(\mathcal{X})$. Ωστόσο, η απόδειξη είναι πιο πολύπλοκη (βλ. π.χ. Gallager 3.5.)
- Στα επόμενα θα θεωρούμε ότι η μέγιστη συμπίεση χωρίς απώλειες που μπορεί να επιτευχθεί ισούται με το ρυθμό εντροπίας (ο οποίος ταυτίζεται με την εντροπία ανά σύμβολο για πηγές χωρίς μνήμη).

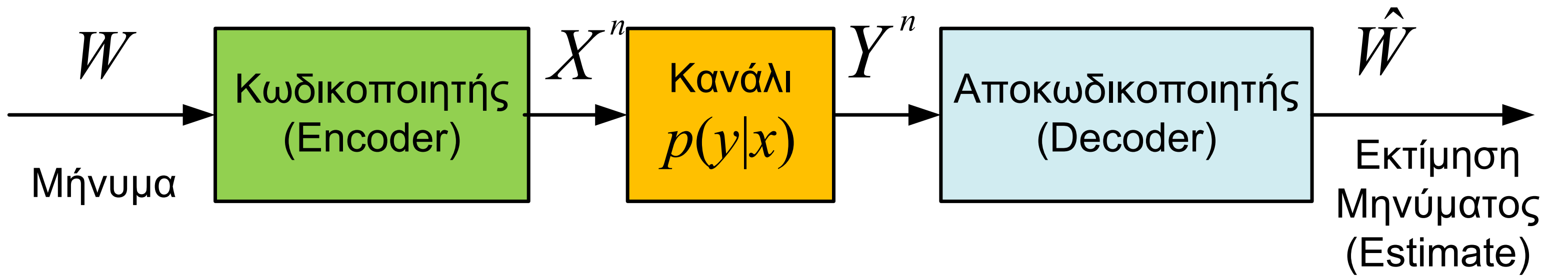
Διακριτά Κανάλια και Χωρητικότητα – Εισαγωγή

- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP)
- Κωδικοποίηση Σταθερού Μήκους
- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής
- $\boxed{\text{Διακριτά Κανάλια και Χωρητικότητα – Εισαγωγή}}$

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή

- Έως τώρα το ενδιαφέρον εστιάστηκε στη βέλτιστη συμπίεση της πληροφορίας που παράγει μια πηγή.

- Το δεύτερο μεγάλο κεφάλαιο της Θεωρίας Πληροφορίας ασχολείται με τη μετάδοση πληροφορίας μέσω ενός καναλιού.



- Στο σχήμα, η πηγή θέλει να μεταδώσει ένα μήνυμα W μέσω ενός καναλιού. Το κανάλι παραμορφώνει/αλλάζει το μήνυμα.

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή (2)

- Πόση είναι η μέγιστη πληροφορία που μπορεί να μεταδοθεί ανά χρήση του καναλιού;
- Πώς αυτή εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του καναλιού;
- Πώς επιτυγχάνεται μετάδοση του μέγιστου αυτού ποσού πληροφορίας;

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή (3)

- Στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας" είδαμε ότι, για κανάλια χωρίς μνήμη, ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης ονομάζεται χωρητικότητα του καναλιού C και ισούται (για κανάλι διακριτού χρόνου) με $\max_{p(x)} I(X;Y)$ (Θεώρημα Χωρητικότητας Καναλιού – θα το αποδείξουμε σύντομα).

- Σε κανάλια με μνήμη ο χαρακτηρισμός είναι πιο σύνθετος και δεν ορίζεται πάντοτε μια μοναδική τιμή χωρητικότητας.

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή (4)

- Δεν είναι προφανές εάν η συμπίεση της πηγής πρέπει να γίνει λαμβάνοντας υπόψη το κανάλι στο οποίο θα μεταδοθεί η πληροφορία ή εάν η κωδικοποίηση πηγής και η κωδικοποίηση καναλιού μπορούν να γίνουν ανεξάρτητα. Το Θεώρημα Διαχωρισμού Πηγής-Καναλιού εξασφαλίζει ότι οι δύο κωδικοποιήσεις μπορούν να γίνουν ανεξάρτητα στην περίπτωση διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη.

- Επομένως, εάν για μια πηγή ισχύει $H(\mathcal{X}) < C$, η πληροφορία που παράγει η πηγή μπορεί να μεταδοθεί μέσω του καναλιού με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος.

- Το Θεώρημα Διαχωρισμού Πηγής-Καναλιού ενοποιεί τη συμπίεση και την κωδικοποίηση καναλιού (για διακριτά κανάλια ενός χρήστη, χωρίς μνήμη).

Διακριτά κανάλια – Ορισμοί

- Ένα διακριτό κανάλι $(\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y})$ αποτελείται από δύο πεπερασμένα σύνολα $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ και ένα σύνολο δεσμευμένων συναρτήσεων μάζας πιθανότητας $p(y|x)$, μια για κάθε $x \in \mathcal{X}$, ώστε, για κάθε x και y, $p(y|x) \geq 0$ και, για κάθε x, $\sum_y p(y|x) = 1$. Η τ.μ. X είναι η είσοδος του καναλιού και η Y η έξοδός του.

- Έστω ότι χρησιμοποιούμε ένα διακριτό κανάλι n φορές. Ορίζουμε τη n-οστή επέκταση του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη $(\mathcal{X}^n, p(y^n|x^n), \mathcal{Y}^n)$, όπου

$$p(y_k|x^k, y^{k-1}) = p(y_k|x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Μετάδοση σε διακριτά κανάλια χωρίς ανάδραση

- Εάν το κανάλι χρησιμοποιείται χωρίς ανάδραση, δηλαδή η είσοδος στο κανάλι δεν εξαρτάται από τις εξόδους σε προηγούμενες χρονικές στιγμές, $p(x_k|x^{k-1}, y^{k-1}) = p(x_k|x^{k-1})$, και

$$p(y^n|x^n) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i|x_i).$$

Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη

- "Πληροφοριακή" Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη ("Information" Channel Capacity):

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$

- Παραδείγματα διακριτών καναλιών χωρίς μνήμη (επανάληψη από το μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας")
  - Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (Binary Symmetric Channel – BSC): $C = 1 - H(p)$ bits, επιτυγχάνεται με ομοιομορφη κατανομή εισόδου $p(x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
  - Δυαδικό Κανάλι με Διαγραφή (Binary Erasure Channel): $C = 1 - \alpha$, όπου α η πιθανότητα διαγραφής. Επιτυγχάνεται με ομοιομορφη κατανομή εισόδου $p(x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
  - Η χωρητικότητα του δυαδικού καναλιού με διαγραφή παραμένει η ίδια εάν χρησιμοποιήσουμε ανάδραση.
  - Θα δούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό, δηλαδή ότι η χρήση ανάδρασης δεν αυξάνει τη χωρητικότητα, ισχύει γενικά για όλα τα διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη.

Ανακεφαλαίωση μαθήματος

- Κωδικοποίηση σταθερού μήκους με χρήση του AEP. Στο όριο αρκεί να έχουμε αποδοτική περιγραφή μόνο για τις τυπικές ακολουθίες. Μπορούμε είτε να αγνοήσουμε τις μη τυπικές, είτε να τις κωδικοποιήσουμε με μη αποδοτικό τρόπο, δεδομένου ότι η συνεισφορά τους στο μέσο μήκος του κώδικα είναι αμελητέα.

- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής. Μπορούμε να Κωδικοποιήσουμε με $E[l]$ αυθαίρετα κοντά στην εντροπία (στο ρυθμό εντροπίας, γενικότερα) με κώδικα σταθερού ή μεταβλητού μήκους. Εάν προσπαθήσουμε να κωδικοποιήσουμε με μικρότερο μέσο μήκος, $P_e \to 1$.

- Η χωρητικότητα Διακριτών Καναλιών Χωρίς μνήμη είναι ο μέγιστος εφικτός ρυθμός μετάδοσης και ισούται με $\max_{p(x)} I(X;Y)$ (Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού).

Προεπισκόπηση επόμενου μαθήματος

- Χωρητικότητα Συμμετρικών Καναλιών.
- Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP). Από κοινού τυπικές (jointly typical) ακολουθίες.
- Η χωρητικότητα Διακριτών Καναλιών Χωρίς μνήμη είναι ο μέγιστος εφικτός ρυθμός μετάδοσης και ισούται με $\max_{p(x)} I(X;Y)$ (Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού).
- Απόδειξη του Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (ευθύ) με χρήση αποκωδικοποίησης από κοινού τυπικότητας (με χρήση του Από Κοινού AEP).
  - Η ιδέα: Μεγάλο μήκος (τυχαία κατασκευασμένου) κώδικα ($\to \infty$), μη μηδενική (αλλά αυθαίρετα μικρή) πιθανότητα σφάλματος, αποκωδικοποίηση με από κοινού τυπικότητα.
  - Θα δείξουμε ότι με αυτή τη μέθοδο επιτυγχάνεται μετάδοση με $P_e^{(n)} \to 0$ όταν $R < \max I(X;Y)$.
- Απόδειξη του αντιστρόφου με χρήση ανισότητας Fano. Δεν μπορεί να κατασκευαστεί κώδικας με $P_e^{(n)} \to 0$ και $R > \max I(X;Y)$.
- Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη με ανάδραση (feedback). Αυξάνει η χωρητικότητα εάν χρησιμοποιηθεί ανάδραση;