EE728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

3ο Μάθημα – 12 Μαρτίου 2008

Ανακεφαλαίωση προηγούμενου μαθήματος

- Η εντροπία διακριτής τ.μ. είναι κοίλη ($\cap$) και μεγιστοποιείται από την ομοιόμορφη κατανομή (για δεδομένο μέγεθος αλφαβήτου $|\mathcal{X}|$).
- Η σχετική εντροπία ποσοτικοποιεί το κόστος που συνεπάγεται η αβεβαιότητα για την πραγματική κατανομή p μιας πηγής.
- Η αμοιβαία πληροφορία ποσοτικοποιεί την ελάττωση της αβεβαιότητας για μια τ.μ. (κατά μέσο όρο) όταν αποκαλύπτεται η τιμή κάποιας άλλης τ.μ. Είναι πάντοτε ≥ 0.
- Ανισότητα Jensen: $Ef(X) \geq f(EX)$ όταν η f είναι κυρτή ($\cup$).

Προεπισκόπηση σημερινού μαθήματος

- Η αμοιβαία πληροφορία είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$ για δεδομένη $p(y|x)$.
- Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων
- Ανισότητα Fano
- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Asymptotic Equipartition Property).

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- $\boxed{\text{Ιδιότητες } I(X;Y) \text{ (συνέχεια)}}$
- Ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων.
- Ανισότητα Fano.
- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP).

Η $I(X;Y)$ είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$ για δεδομένη $p(y|x)$

- Απόδειξη: $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - \sum_x p(x)H(Y|X=x)$.
- 1ος όρος: $p(y) = \sum_x p(y|x)p(x)$. Συνεπώς, για δεδομένη $p(y|x)$, η $p(y)$ είναι γραμμική συνάρτηση της $p(x)$. Η $H(Y)$ είναι κοίλη συνάρτηση της $p(y)$ και, επομένως, και της $p(x)$.
- 2ος όρος: Γραμμική συνάρτηση της $p(x)$.
- Επομένως, η $I(X;Y)$ είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$ για δεδομένη $p(y|x)$.
- Θυμηθείτε ότι σε διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη η χωρητικότητα ισούται με τη μέγιστη τιμή της $I(X;Y)$. Το γεγονός ότι η $I(X;Y)$ είναι κοίλη για δεδομένο κανάλι ($p(y|x)$) σημαίνει ότι εάν βρούμε ένα τοπικό μέγιστο, τότε είναι και ολικό μέγιστο και η αντίστοιχη κατανομή πηγής $p^*(x)$ είναι αυτή η οποία επιτυγχάνει τη χωρητικότητα.

Η $I(X;Y)$ είναι κυρτή ($\cup$) συνάρτηση της $p(y|x)$ για δεδομένη $p(x)$

- Έστω δύο υπό συνθήκη κατανομές μάζας πιθανότητας $p_1(y|x)$ και $p_2(y|x)$. $p_1(x,y) = p(x)p_1(y|x)$ και $p_2(x,y) = p(x)p_2(y|x)$. Επίσης, $p_1(y) = \sum_x p_1(x,y)$ και $p_2(y) = \sum_x p_2(x,y)$. Η περιθώρια κατανομή των $p_1(x,y)$ και $p_2(x,y)$ ως προς x είναι η $p(x)$.
- Έστω, τώρα, η υπό συνθήκη κατανομή που προκύπτει από την "ανάμιξη" των $p_1(y|x)$ και $p_2(y|x)$:

$$p_\lambda(y|x) = \lambda p_1(y|x) + (1-\lambda)p_2(y|x),\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Συνεπώς, ισχύει, επίσης,

$$p_\lambda(x,y) = p_\lambda(y|x)p(x) = \lambda p_1(y|x)p(x) + (1-\lambda)p_2(y|x)p(x) = \lambda p_1(x,y) + (1-\lambda)p_2(x,y)$$

και

$$p_\lambda(y) = \lambda p_1(y) + (1-\lambda)p_2(y).$$

Η $I(X;Y)$ είναι κυρτή ($\cup$) συνάρτηση της $p(y|x)$ για δεδομένη $p(x)$ (συνέχεια)

- Ορίζουμε την κατανομή $q_\lambda(x,y)$ ως το γινόμενο των περιθώριων κατανομών:

$$q_\lambda(x,y) = p(x)p_\lambda(y) = \lambda q_1(x,y) + (1-\lambda)q_2(x,y).$$

- Από τον ορισμό της αμοιβαίας πληροφορίας παρατηρούμε ότι $I(X;Y) = D(p_\lambda(x,y)||p_\lambda(x)p_\lambda(y)) = D(p_\lambda(x,y)||p(x)p_\lambda(y)) = D(p_\lambda(x,y)||q_\lambda(x,y))$.
- Η $D(p||q)$ είναι κυρτή συνάρτηση του ζεύγους (p,q). Επομένως, και η $I(X;Y)$ είναι κυρτή συνάρτηση της $p(y|x)$.
- Επομένως, για δεδομένη κατανομή πηγής, υπάρχει κάποιο κανάλι το οποίο ελαχιστοποιεί την πληροφορία που μπορούμε να μεταδώσουμε στο δέκτη.

Ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων

- Ιδιότητες $I(X;Y)$ (συνέχεια)
- Ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων
- Ανισότητα Fano.
- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP).

Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων (Επανάληψη)

- Οι X, Y, Z σχηματίζουν αλυσίδα Markov ($X \to Y \to Z$) εάν $p(x,y,z) = p(x)p(y|x)p(z|y)$.
- Ισοδύναμα, $X \to Y \to Z$ εάν και μόνο εάν $p(x,z|y) = p(x|y)p(z|y)$ (δηλαδή, οι x και z είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δεδομένης της y).
- $X \to Y \to g(Y)$.
- Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων (Data Processing Inequality): Εάν $X \to Y \to Z$, τότε $I(X;Y) \geq I(X;Z)$.
- Απόδειξη: Από τον κανόνα αλυσίδας για την αμοιβαία πληροφορία, $I(X;Y,Z) = I(X;Z) + I(X;Y|Z) = I(X;Y) + I(X;Z|Y) = I(X;Y)$, λόγω της υπό συνθήκη ανεξαρτησίας των X και Z δεδομένης της Y. Λαμβάνοντας, επίσης, υπόψη ότι $I(X;Y|Z) \geq 0$, προκύπτει η ανισότητα.
- Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε, επίσης, να δείξουμε ότι $I(X;Y|Z) \leq I(X;Y)$.
- $I(X;Y) \geq I(X;g(Y))$. Συνεπώς, η πληροφορία για τη X που περιέχεται στην Y δε μπορεί να αυξηθεί με επεξεργασία της Y (αντίθετα, μάλιστα, ενδέχεται να μειωθεί). Ωστόσο, κατάλληλη επεξεργασία της Y ενδέχεται να διευκολύνει την εξαγωγή της πληροφορίας.

Η $I(X;Y)$ είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$ για δεδομένη $p(y|x)$ – Εναλλακτική Απόδειξη (**Gallager**)

- Με χρήση ανισότητας επεξεργασίας δεδομένων.
- Έστω κανάλι με είσοδο X, πίνακα μετάβασης $p(y|x)$ και εξόδους Y.
- Έστω αυθαίρετες κατανομές p_1 και p_2 και I_1 και I_2 οι αμοιβαίες πληροφορίες των X και Y όταν η κατανομή εισόδου είναι η p_1 και p_2, αντίστοιχα. Έστω τυχαία παράμετρος θ, με $0 < \theta < 1$, $p = \theta p_1 + (1-\theta)p_2$ και I η αμοιβαία πληροφορία που αντιστοιχεί στην κατανομή εισόδου p. Θα δείξουμε ότι

$$\theta I_1 + (1-\theta) I_2 \leq I.$$

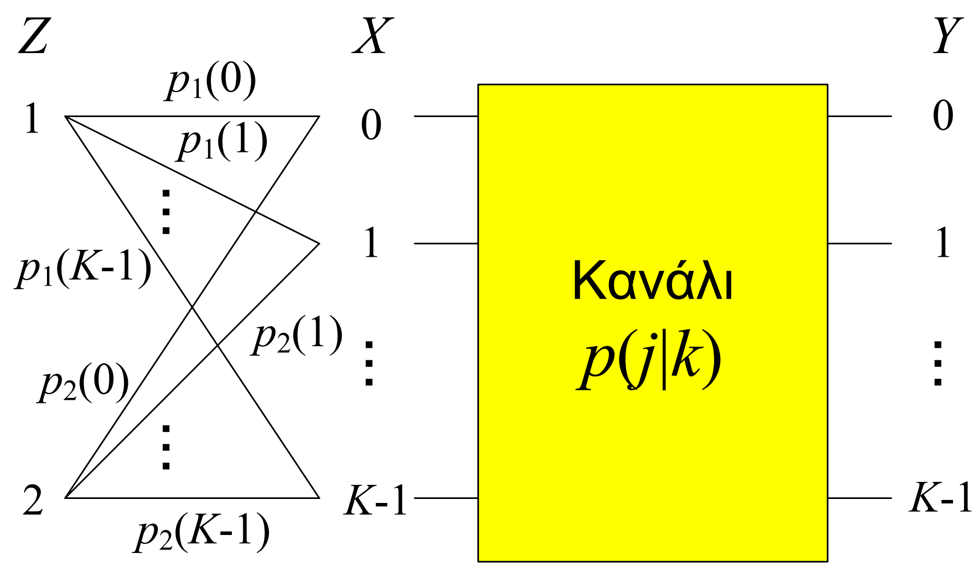
- Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι p_1 και p_2 είναι υπό συνθήκη κατανομές που εξαρτώνται από μια δυαδική τ.μ. Z:

$$p_1(x) = p_{X|Z}(x|1), \qquad p_2(x) = p_{X|Z}(x|2)$$

- Θέτουμε $p_Z(1) = \theta$ και $p_Z(2) = 1-\theta$.

Η $I(X;Y)$ είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$ για δεδομένη $p(y|x)$ – Εναλλακτική Απόδειξη (συνέχεια)

Το πρόβλημα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι $Z \to X \to Y$ και $p(y|x,z) = p(y|x)$.

Επίσης, $\theta I_1 + (1-\theta) I_2 = I(X;Y|Z)$ και $I = I(X;Y)$.

Η $I(X;Y)$ είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$ για δεδομένη $p(y|x)$ – Εναλλακτική Απόδειξη (συνέχεια)

- Δεδομένου ότι οι Z και Y είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες, $I(Y;Z|X) = 0$.
- Επίσης, όπως και στην απόδειξη της ανισότητας επεξεργασίας δεδομένων,

$$I(Y;X,Z) = I(Y;Z) + I(Y;X|Z) = I(Y;X) + I(Y;Z|X) \Rightarrow$$
$$I(Y;Z) + I(Y;X|Z) = I(Y;X) \Rightarrow$$
$$I(Y;X|Z) = I(X;Y|Z) \leq I(Y;X).$$

- Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι η $I(X;Y)$ είναι κυρτή ($\cup$) συνάρτηση της $p(y|x)$ για δεδομένη $p(x)$ (Gallager Theorem 4.4.3).

Ανισότητα **Fano**

- Ιδιότητες $I(X;Y)$ (συνέχεια)
- Ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων
- Ανισότητα Fano
- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP).

Εκτίμηση τιμής τυχαίας μεταβλητής

- Σκοπός της επικοινωνίας είναι ο δέκτης να λάβει την πληροφορία που του στέλνει ο πομπός μέσω ενός καναλιού.
- Έστω ότι η τ.μ. Y περιέχει κάποια πληροφορία για τη X (οπότε, οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες, και $I(X;Y) > 0$).
- Εκτιμητής (estimator): Μια συνάρτηση της Y η οποία παράγει μια εκτίμηση (estimate) για τη X: $\hat{X} = g(Y)$.
- Θέλουμε να βρούμε ποια είναι η πιθανότητα η εκτίμηση $\hat{X}$ να μην ισούται με την πραγματική τιμή της τ.μ. X που μετέδωσε ο πομπός.
- Ορίζουμε την Πιθανότητα Σφάλματος $P_e = \Pr\{\hat{X} \neq X\}$.
- Προφανώς, εάν $H(X|Y) = 0$, υπάρχει εκτιμητής, ο οποίος παράγει εκτιμήσεις με $P_e = 0$.
- Διαισθητικά περιμένουμε ότι μικρές τιμές της $H(X|Y)$ θα οδηγούν σε εκτιμήσεις με μικρή P_e (εφόσον, βέβαια, χρησιμοποιηθεί καλός εκτιμητής).
- Η ανισότητα Fano δίνει ένα <u>κάτω</u> φράγμα για την P_e συναρτήσει της $H(X|Y)$.

Ανισότητα **Fano**

- Για κάθε εκτιμητή τέτοιο ώστε $X \to Y \to \hat{X}$,

$$\boxed{H(P_e) + P_e \log|\mathcal{X}| \geq H(X|\hat{X}) \geq H(X|Y),}$$

  όπου $H(P_e) = -P_e \log P_e - (1 - P_e)\log(1 - P_e)$.

- Παρατηρήστε ότι ο εκτιμητής δεν είναι, κατ΄ ανάγκη, νομοτελειακή συνάρτηση της Y. Επίσης, $P_e = 0 \Rightarrow H(X|Y) = 0$.
- Θέτοντας $H(P_e) = \max_p H(p) = 1$ προκύπτει ένα λιγότερο ακριβές κάτω φράγμα,

$$1 + P_e \log|\mathcal{X}| \geq H(X|Y) \Rightarrow P_e \geq \frac{H(X|Y) - 1}{\log|\mathcal{X}|}.$$

- Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Fano στην απόδειξη του Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (αντίστροφο).

Απόδειξη Ανισότητας **Fano**

(Cover Theorem 2.10.1)

- Έστω η τ.μ. που δηλώνει εάν έχει συμβεί σφάλμα εκτίμησης

$$E = \begin{cases} 1 & \text{εάν} \quad \hat{X} \neq X, \\ 0 & \text{εάν} \quad \hat{X} = X. \end{cases}$$

- Αναπτύσσουμε την $H(E, X|\hat{X})$ με χρήση του κανόνα αλυσίδας για την εντροπία:

$$\begin{aligned} H(E, X|\hat{X}) &= H(X|\hat{X}) + \underbrace{H(E|X, \hat{X})}_{=0} \\ &= \underbrace{H(E|\hat{X})}_{\leq H(E) = H(P_e)} + \underbrace{H(X|E, \hat{X})}_{\leq P_e \log |\mathcal{X}|}. \end{aligned}$$

  – $H(E|X, \hat{X}) = 0$ γιατί εάν ξέρουμε τις τιμές των $\hat{X}$ και X γνωρίζουμε εάν έχει εμφανιστεί σφάλμα εκτίμησης.

Απόδειξη Ανισότητας **Fano** (συνέχεια)

  - $H(E|\hat{X}) \leq H(E)$. Δεδομένου ότι η πιθανότητα σφάλματος ($E = 1$) ισούται με P_e, η τ.μ. ακολουθεί κατανομή Bernoulli με παράμετρο P_e, και $H(E) = H(P_e)$.
  - $H(X|E, \hat{X}) = \Pr(E = 0) H(X|\hat{X}, E = 0) + \Pr(E = 1) H(X|\hat{X}, E = 1) \leq (1 - P_e)0 + P_e \log|\mathcal{X}|$, δεδομένου ότι εάν δεν υπάρχει σφάλμα εκτίμησης $X = \hat{X}$, ενώ η χειρότερη περίπτωση εάν έχει συμβεί σφάλμα είναι η X να ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή.
- Επομένως, $H(P_e) + P_e \log|\mathcal{X}| \geq H(X|\hat{X})$.
- Δεδομένου ότι $X \to Y \to \hat{X}$, $I(X;Y) \geq I(X;\hat{X}) \Rightarrow H(X) - H(X|Y) \geq H(X) - H(X|\hat{X}) \Rightarrow H(X|\hat{X}) \geq H(X|Y)$. Συνεπώς,

$$H(P_e) + P_e \log|\mathcal{X}| \geq H(X|\hat{X}) \geq H(X|Y).$$

- Εάν απαιτήσουμε η εκτιμώμενη τιμή $\hat{X}$ να ανήκει στο σύνολο $\mathcal{X}$, $H(X|E, \hat{X}) \leq P_e \log(|\mathcal{X}| - 1)$ και

$$H(P_e) + P_e \log(|\mathcal{X}| - 1) \geq H(X|\hat{X}) \geq H(X|Y).$$

Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (**AEP**)

- Ιδιότητες $I(X;Y)$ (συνέχεια)
- Ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων
- Ανισότητα Fano
- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP)

Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (**AEP**) – Εισαγωγή

- Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων, ομοίως κατανεμημένων (i.i.d.) διακριτών τ.μ. X_i: $X_1^n = X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας των τ.μ. που αποτελούν την ακολουθία ισούται με $p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^n p(X_i)$.
- Έστω ότι οι X_i ακολουθούν κατανομή Bernoulli με παράμετρο $p = \Pr\{X_i = 1\}$.
- Asymptotic Equipartition Property – AEP: Αυξάνοντας το μήκος της ακολουθίας,

$$
\begin{aligned}
-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) &= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \prod_{i=1}^{n} p(X_i) \\
&= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log p(X_i) = -E[\log p(X)] = H(X),
\end{aligned}
$$

από τον Ασθενή Νόμο Μεγάλων Αριθμών (Weak Law of Large Numbers).

Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (**AEP**) – Εισαγωγή (συνέχεια)

- Επομένως, εάν σχηματίσουμε μια ακολουθία πολύ μεγάλου μήκους, η από κοινού συνάρτηση κατανομής μάζας πιθανότητας θα συγκλίνει <u>κατά πιθανότητα</u> στην τιμή $2^{-nH(X)}$.
- Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν περίπου $2^{nH(X)}$ τέτοιες, τυπικές, ακολουθίες και ότι το άθροισμα των από κοινού συναρτήσεων μάζας πιθανότητάς τους προσεγγίζει το 1.
- Το άθροισμα των πιθανοτήτων των υπόλοιπων, μη τυπικών, ακολουθιών μήκους n τείνει στο 0.
- Επομένως, μπορούμε να κωδικοποιήσουμε μόνο τις τυπικές ακολουθίες $\longrightarrow$ χρειαζόμαστε nH bits αντί για n.
- Επειδή η πιθανότητα να εμφανιστεί μη τυπική ακολουθία τείνει στο 0, η πιθανότητα να μη μπορούμε να κωδικοποιήσουμε την ακολουθία X_1^n με χρήση nH bits τείνει στο 0 για $n \rightarrow \infty$.
- Το AEP αποτελεί έναν από τους στυλοβάτες της Θεωρίας Πληροφορίας.

Είδη σύγκλισης (υπενθύμιση)

Μια ακολουθία τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ συγκλίνει σε μια τ.μ. X:

1. Κατά πιθανότητα (in probability) εάν, για κάθε $\epsilon > 0$, $\Pr\{|X_n - X| > \epsilon\} \to 0$ για $n \to \infty$. Πιο αυστηρά: Για κάθε δ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε, για $n > n_0$, $\Pr\{|X_n - X| > \epsilon\} < \delta$.
2. Κατά μέση τετραγωνική τιμή (mean square) εάν $E(X_n - X)^2 \to 0$.
3. Με πιθανότητα 1 (ή σχεδόν βέβαια) εάν $\Pr\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$.

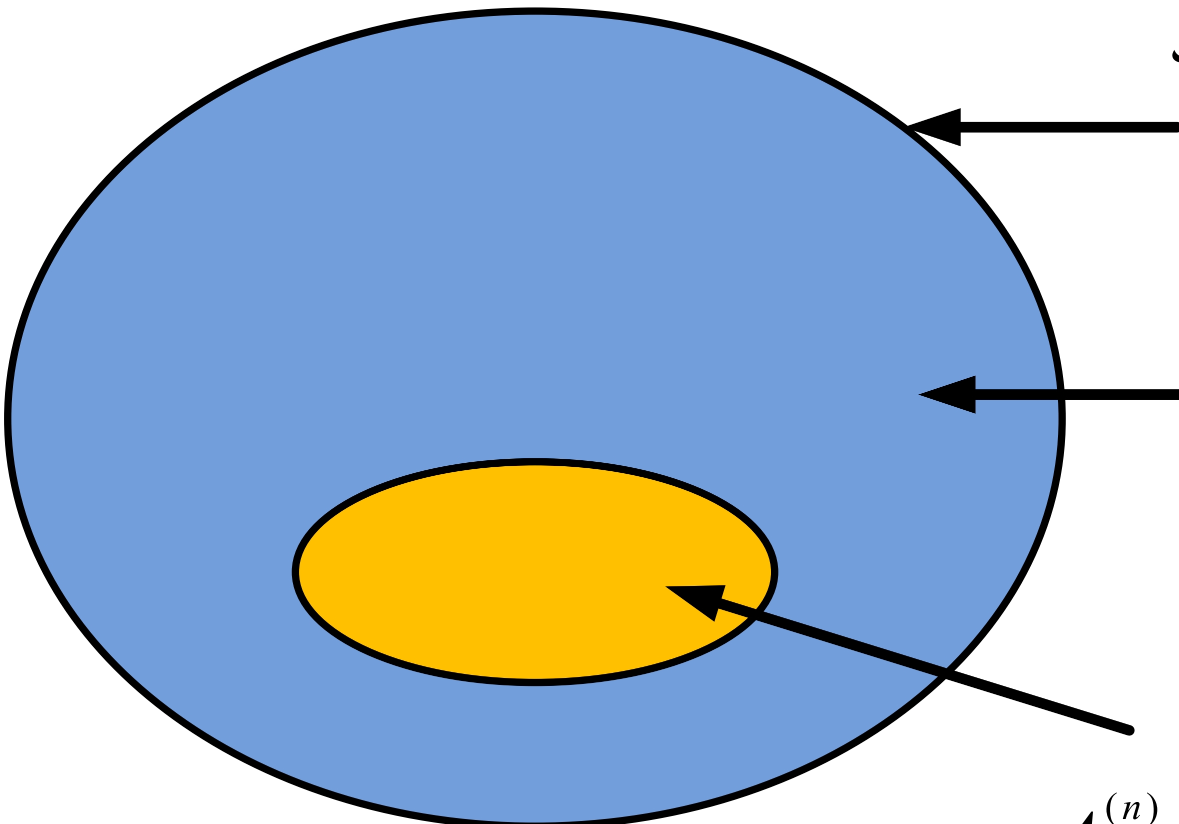
Τυπικό Σύνολο (**Typical Set**) και ιδιότητες

- <u>Ορισμός</u>: Το <u>τυπικό σύνολο $A_\epsilon^{(n)}$</u> που αντιστοιχεί στην κατανομή $p(x)$ αποτελείται από τις ακολουθίες $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$2^{-n(H(X)+\epsilon)} \leq p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 2^{-n(H(X)-\epsilon)}.$$

- Ιδιότητες $A_\epsilon^{(n)}$:
  1. Εάν $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_\epsilon^{(n)}$, τότε $H(X) - \epsilon \leq -\frac{1}{n}\log p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq H(X) + \epsilon$.
  2. $\Pr\{A_\epsilon^{(n)}\} > 1 - \epsilon$ για n μεγαλύτερο από κάποια τιμή n_0.
  3. $|A_\epsilon^{(n)}| \leq 2^{n(H(X)+\epsilon)}$, όπου $|A\epsilon^{(n)}|$ ο αριθμός των στοιχείων του τυπικού συνόλου $A\epsilon^{(n)}$.
  4. $|A_\epsilon^{(n)}| \geq (1-\epsilon)2^{n(H(X)-\epsilon)}$, για n μεγαλύτερο από κάποια τιμή n_0.

Τυπικό Σύνολο



$\mathcal{X}^n : |\mathcal{X}|^n$ στοιχεία

Μη τυπικό σύνολο

Τυπικό σύνολο

$A_\epsilon^{(n)} : 2^{n(H+\epsilon)}$ στοιχεία

Αποδείξεις ιδιοτήτων Τυπικού Συνόλου

1. Εάν $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_\epsilon^{(n)}$, τότε $H(X) - \epsilon \leq -\frac{1}{n} \log p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq H(X) + \epsilon$.

   Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του τυπικού συνόλου παίρνοντας το λογάριθμο.

2. $\Pr\{A_\epsilon^{(n)}\} > 1 - \epsilon$ για n μεγαλύτερο από κάποια τιμή n_0.

   Προκύπτει άμεσα από το AEP δεδομένου ότι η πιθανότητα μια ακολουθία να είναι τυπική τείνει στο 1 καθώς το n τείνει στο άπειρο. Επομένως, για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε, για $n \geq n_0$,

$$\Pr\left\{\left|-\frac{1}{n} \log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) - H(X)\right| < \epsilon\right\} > 1 - \delta.$$

   Θέτοντας $\delta = \epsilon$ προκύπτει η ιδιότητα.

Αποδείξεις ιδιοτήτων Τυπικού Συνόλου (συνέχεια)

3. $|A_\epsilon^{(n)}| \leq 2^{n(H(X)+\epsilon)}$.

$$1 = \sum_{x \in \mathcal{X}^n} p(\mathbf{x}) \geq \sum_{x \in A_\epsilon^{(n)}} p(\mathbf{x}) \overset{(a)}{\geq} \sum_{x \in A_\epsilon^{(n)}} 2^{-n(H(X)+\epsilon)} = 2^{-n(H(X)+\epsilon)}|A_\epsilon^{(n)}|.$$

Στο (a) χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός του τυπικού συνόλου.

4. $|A_\epsilon^{(n)}| \geq (1-\epsilon)2^{n(H(X)-\epsilon)}$, για n μεγαλύτερο από κάποια τιμή n_0.
Από τη 2η ιδιότητα, για $n \geq n_0$,

$$1 - \epsilon < \Pr\{A_\epsilon^{(n)}\} \leq \sum_{x \in A_\epsilon^{(n)}} 2^{-n(H(X)-\epsilon)} = 2^{-n(H(X)-\epsilon)}|A_\epsilon^{(n)}|.$$

Ανακεφαλαίωση μαθήματος

- Η αμοιβαία πληροφορία είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$ για δεδομένη $p(y|x)$. Σημαντικό για τη χωρητικότητα του καναλιού, όπως θα δούμε αργότερα.
- Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων: Δε μπορούμε να "δημιουργήσουμε" νέα πληροφορία. Αντίθετα, σε ορισμένες περιπτώσεις, ενδέχεται να απωλέσουμε πληροφορία με την επεξεργασία μιας τ.μ.
- Ανισότητα Fano. Δίνει κάτω φράγμα για την πιθανότητα σφάλματος όταν εκτιμάται μια τ.μ. με βάση παρατήρηση άλλης τ.μ. (και άνω φράγμα για την $H(X|Y)$ δεδομένης της P_e). Θα τη χρησιμοποιήσουμε στο Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού για να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει κώδικας με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος ο οποίος επιτυγχάνει μετάδοση με ρυθμό μεγαλύτερο της χωρητικότητας (αντίστροφο).
- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Asymptotic Equipartition Property). Έστω ακολουθίες μεγάλου μήκους οι οποίες δημιουργούνται με βάση την έξοδο μιας εργοδικής πηγής. Μπορούμε να τις κατατάξουμε σε δύο σύνολα: Το τυπικό (που περιέχει σχεδόν όλη την πιθανότητα) και το μη τυπικό που περιέχει σχεδόν μηδενική πιθανότητα (αλλά όχι, κατ' ανάγκη, λίγες ακολουθίες). Αποτελεί τη βάση της συμπίεσης.

Προεπισκόπηση επόμενου μαθήματος

- Εφαρμογή του AEP στην κωδικοποίηση. Κωδικοποίηση σταθερού μήκους.
- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής. Δε μπορούμε να συμπιέσουμε περισσότερο από την εντροπία (ή το ρυθμό εντροπίας για εργοδικές πηγές με μνήμη). Απόδειξη για πηγές χωρίς μνήμη.
- Εισαγωγή στην Κωδικοποίηση Καναλιού
  - Διακριτά Κανάλια. Διακριτά Κανάλια Χωρίς Μνήμη.
  - Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη.
  - Συμμετρικά Κανάλια και Χωρητικότητα.
- Από Κοινού Τυπικότητα και Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP).
- Εισαγωγή στο Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού και 1ο μέρος απόδειξης.