EE728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

9ο Μάθημα – 14 Μαΐου 2008

Ανακεφαλαίωση προηγούμενου μαθήματος

- Θεώρημα Διαχωρισμού Πηγής - Καναλιού (για Διακριτά Κανάλια χωρίς μνήμη). Η κωδικοποίηση πηγής και καναλιού μπορεί να γίνει ανεξάρτητα χωρίς απώλεια απόδοσης.
- Οι ποσότητες της Θεωρίας Πληροφορίας χρησιμοποιούνται (με κάποιες αλλαγές) και για την περιγραφή συνεχών τ.μ. Ομοίως, το AEP ισχύει και για συνεχείς τ.μ.
- Για δεδομένο πίνακα συσχέτισης, η κατανομή που μεγιστοποιεί τη Διαφορική Εντροπία είναι η πολυμεταβλητή Γκαουσιανή.
- Η Εντροπία διακριτοποιημένης τ.μ. συνδέεται με τη Διαφορική Εντροπία της συνεχούς τ.μ. καθώς και με το βήμα κβαντισμού.

Προεπισκόπηση σημερινού μαθήματος

- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού.
- Απόδειξη του Θεωρήματος Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι.
- Χωρητικότητα καναλιού Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN).
- Χωρητικότητα συστήματος από παράλληλα και ανεξάρτητα κανάλια AWGN. Waterfilling.
- Κανάλια Προσθετικού Έγχρωμου Γκαουσιανού Θορύβου (ACGN). Χωρητικότητα.
- Κανάλι Προσθετικού Γκαουσιανού Θορύβου με ανάδραση. Στην περίπτωση έγχρωμου θορύβου η χωρητικότητα μπορεί να αυξηθεί κατά $1/2$, το πολύ, bit.

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι.
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια. Waterfilling
- Γκαουσιανό Κανάλι με έγχρωμο θόρυβο (μνήμη).
- Γκαουσιανό Κανάλι με Ανάδραση.

AEP για συνεχείς τ.μ.

- Για την περίπτωση συνεχών τ.μ. το AEP μπορεί να αποδειχθεί με παρόμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση διακριτών τυχαίων μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα,
  1. $\Pr\{A_\epsilon^{(n)}\} > 1 - \epsilon$ για $n > n_0$.
  2. $\mathsf{Vol}\left(A_\epsilon^{(n)}\right) \leq 2^{n(h(X)+\epsilon)}$ για όλα τα n.
  3. $\mathsf{Vol}\left(A_\epsilon^{(n)}\right) \geq (1-\epsilon)2^{n(h(X)-\epsilon)}$ για $n > n_0$.
- Παρατηρήστε ότι, για συνεχείς τ.μ., η ποσότητα που αναλογεί στον αριθμό στοιχείων του τυπικού συνόλου $|A_\epsilon^{(n)}|$ είναι ο όγκος $\mathsf{Vol}(A)$ του συνόλου A:

$$\mathsf{Vol}(A) = \int_A dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

- Όσο μικρότερη είναι η εντροπία μιας συνεχούς τ.μ., τόσο μικρότερος είναι ο όγκος που καταλαμβάνει το σύνολο που περιέχει σχεδόν όλη την πιθανότητα (για δεδομένο n).

Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι

- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια. Waterfilling
- Γκαουσιανό Κανάλι με έγχρωμο θόρυβο (μνήμη).
- Γκαουσιανό Κανάλι με Ανάδραση.

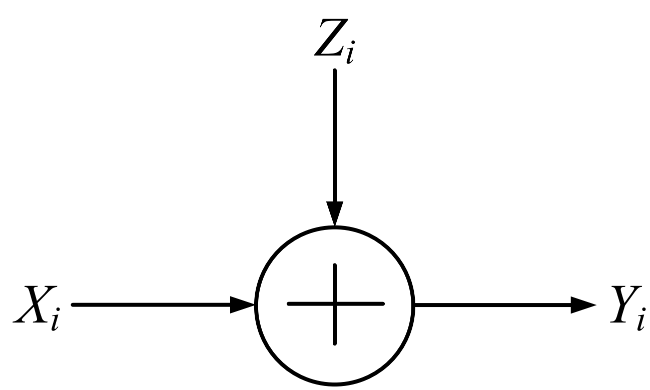
Το Γκαουσιανό Κανάλι – Εισαγωγή

- Κανάλι διακριτού χρόνου με συνεχές αλφάβητο.
- Δίνεται από τη σχέση

$$Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N),$$

όπου οι τ.μ. Z_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ανεξάρτητες από τις X_i.

- Αποτελεί πολύ καλό και ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο για συστήματα επικοινωνιών.



Το Γκαουσιανό Κανάλι – Εισαγωγή (συνέχεια)

- Ποια είναι η χωρητικότητα του Γκαουσιανού Καναλιού; Εξαρτάται από τις υποθέσεις!
- Εάν η διασπορά του θορύβου ισούται με 0, η έξοδος του καναλιού ισούται με την είσοδό του. Επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε με άπειρο ρυθμό (χρησιμοποιώντας συνεχές η άπειρο διακριτό αλφάβητο για τη X).
- Το ίδιο ισχύει εάν ο θόρυβος έχει πεπερασμένη διασπορά, αλλά δεν υπάρχει περιορισμός πλάτους ή ισχύος της εισόδου. Μπορούμε πάντα να χρησιμοποιήσουμε είσοδο τέτοιου πλάτους ώστε να μπορούμε να ανακτήσουμε το μεταδοθέν σήμα στην έξοδο με πιθανότητα σφάλματος που τείνει στο 0.
- Στην πράξη, ο θόρυβος Z έχει μη μηδενική διασπορά (ισχύ). Επίσης, υπάρχει περιορισμός ως προς τη διαθέσιμη ισχύ της X.
- Στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας" είδαμε ότι, για την περίπτωση πεπερασμένης ισχύος $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq P$, η χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού ισούται με

$$C = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N}\right) \text{ bits/χρήση καναλιού.}$$

Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού με περιορισμό ισχύος

- Η "πληροφοριακή" χωρητικότητα του Γκαουσιανού Καναλιού με περιορισμό ισχύος (power contraint) P ορίζεται ως

$$C = \max_{f_X(x): EX^2 \leq P} I(X;Y).$$

- Θα επαναλάβουμε την απόδειξη για τη χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού που παρουσιάστηκε στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας".

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= h(Y) - h(Y|X) = h(Y) - h(X+Z|X) \\ &= h(Y) - h(Z|X) \stackrel{(a)}{=} h(Y) - h(Z) = h(Y) - \frac{1}{2}\log 2\pi e N. \end{aligned}$$

(a) η Z (θόρυβος) είναι ανεξάρτητη της X.

- Για τη διασπορά της Y, και δεδομένου ότι $EZ = 0$, ισχύει

$$EY^2 = E(X+Z)^2 = EX^2 + 2EXEZ + EZ^2 = P + N.$$

Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού με περιορισμό ισχύος (συνέχεια)

- Επομένως, $h(Y) \leq \frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N)$, με $=$ όταν η X ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή. Συνεπώς,

$$I(X;Y) = h(Y) - \frac{1}{2}\log 2\pi e N \leq \frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N) - \frac{1}{2}\log 2\pi e N \Rightarrow$$
$$C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right).$$

- $X = Y - N$. Από τη Θεωρία Πιθανοτήτων, ο γραμμικός συνδυασμός δύο Γκαουσιανών τ.μ. ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή. Συνεπώς, όταν η Y ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή, το ίδιο ισχύει και για τη X.
- Άρα, η χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού επιτυγχάνεται με χρήση Γκαουσιανής εισόδου.
- Απομένει να αποδείξουμε ότι η "πληροφοριακή" χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού ισούται με τη "λειτουργική" του χωρητικότητα.

Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι

- Σημείωση: Η απόδειξη του ευθέος είναι παρόμοια με αυτή για το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη και δίνεται στο Κεφάλαιο 9.1 του Cover. Θα επισημάνουμε μόνο τις διαφορές.
- Όπως και για το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη, κατασκευάζονται κωδικές λέξεις μήκους n. Η μόνη διαφορά είναι ότι πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό ισχύος: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2(w) \leq nP,\ w = 1, 2, \ldots, M$, όπου M ο αριθμός των μηνυμάτων (και ίσος με 2^{nR}).
- Εάν κατασκευάσουμε τα σύμβολα των κωδικών λέξεων με βάση Γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0, P-\epsilon)$, για μεγάλο n, $\frac{1}{n}\sum X_i^2 \to P-\epsilon$ και, επομένως, ο περιορισμός ικανοποιείται με πιθανότητα που τείνει στο 1.
- Μετά την κατασκευή του τυχαίου κώδικα, αυτός αποκαλύπτεται τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη. Θεωρούμε ότι η αποκωδικοποίηση στο δέκτη γίνεται με χρήση από κοινού τυπικότητας.
- Σε σύγκριση με τα διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη, υπάρχει ένα επιπλέον ενδεχόμενο που συμβάλλει στην πιθανότητα σφάλματος: Το ενδεχόμενο η κωδική λέξη που έχει αποσταλεί να μην ικανοποιεί τον περιορισμό ισχύος. Ωστόσο, για μεγάλα n η πιθανότητα αυτή μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή. Συνεπώς, και η συνολική πιθανότητα σφάλματος μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή, όπως και στην περίπτωση του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη.

Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο)

- Και για το αντίστροφο, η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή για το αντίστροφο του Θεωρήματος Κωδικοποίησης για διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη.
- Θεωρούμε ότι οι κωδικές λέξεις ικανοποιούν τον περιορισμό ισχύος, δηλαδή ότι $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(w) \leq P$.
- Επιπλέον, θεωρούμε ότι η κατανομή των 2^{nR} μηνυμάτων είναι ομοιόμορφη και χρησιμοποιούμε την ανισότητα Fano.

$$H(W|\hat{W}) \leq H(P_e^{(n)}) + P_e^{(n)} \log|\mathcal{X}| = 1 + nP_e^{(n)}R = n\left(\frac{1}{n} + P_e^{(n)}R\right) = n\epsilon_n,$$

όπου $\epsilon_n \to 0$ καθώς $P_e^{(n)} \to 0$.

- Όπως και στην περίπτωση διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη, $I(X^n;Y^n) \leq \sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y_i)$.

Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο) (2)

$$I(X^n;Y^n) = h(Y^n) - h(Y^n|X^n) = h(Y^n) - h(Z^n) \leq \sum_{i=1}^{n} h(Y_i) - h(Z^n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h(Y_i) - \sum_{i=1}^{n} h(Z_i) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i, Y_i).$$

- Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$nR = H(W) = I(W;\hat{W}) + H(W|\hat{W}) \overset{(a)}{\leq} I(W;\hat{W}) + n\epsilon_n \overset{(b)}{\leq} I(X^n;Y^n) + n\epsilon_n$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} I(X_i, Y_i) + n\epsilon_n.$$

(a) Ανισότητα Fano, (b) Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων

Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο) (3)

- Ορίζουμε $P_i = \frac{1}{2^{nR}} \sum_w x_i^2(w)$, δηλαδή τη μέση ισχύ του $i-$οστού συμβόλου των κωδικών λέξεων. Επομένως, $EY_i^2 = P_i + N$, και $h(Y) \leq \frac{1}{2} \log 2\pi e(P_i + N)$.
- Δεδομένου ότι οι κωδικές λέξεις ικανοποιούν τον περιορισμό ισχύος, $\frac{1}{n} \sum_i P_i \leq P$. Επομένως,

$$nR \leq \sum_i I(X_i; Y_i) + n\epsilon_n \leq \sum_i \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_i}{N}\right) + n\epsilon_n \Rightarrow$$

$$R \leq \sum_i \frac{1}{n} I(X_i; Y_i) + \epsilon_n \stackrel{(a)}{\leq} \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{N}\right) \leq \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{N}\right).$$

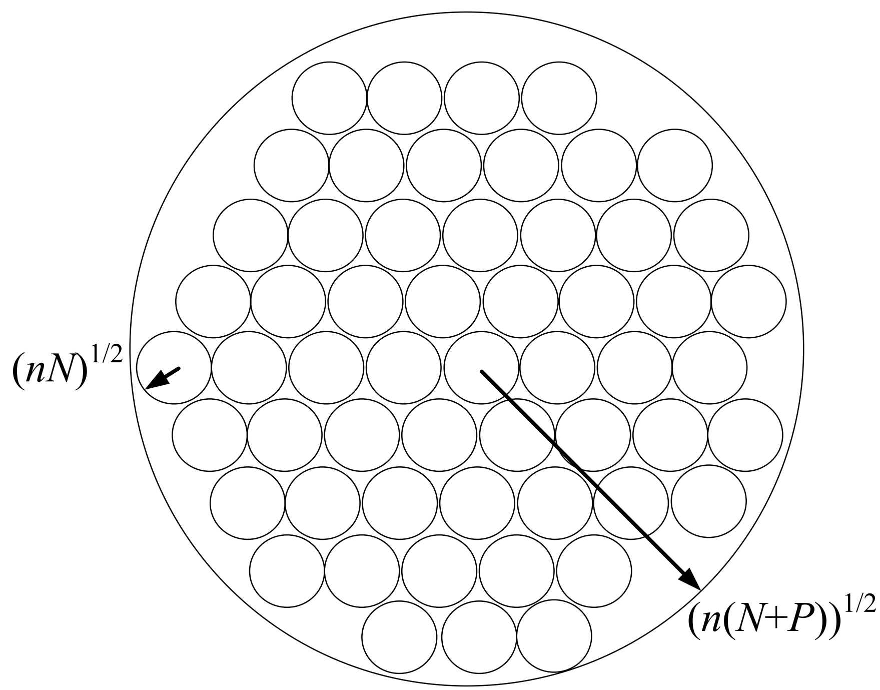
  (a) από την ανισότητα Jensen.
- Συνεπώς, για $P_e^{(n)} \to 0$, $R \leq \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{N}\right)$ και δεν υπάρχει κώδικας που να ικανοποιεί τον περιορισμό ισχύος και να επιτυγχάνει $R > C$.

Γεωμετρικό Επιχείρημα (**Sphere Packing Argument**)

- Διαισθητικά, το Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού για Γκαουσιανά κανάλια μπορεί περιγραφεί με το ακόλουθο γεωμετρικό επιχείρημα.
- Μια κωδική λέξη $\boldsymbol{x}^n$ αποτελεί ένα διάνυσμα στο $\boldsymbol{n}-$ διάστατο χώρο. Επομένως, η ακολουθία $\boldsymbol{y}^n$ που λαμβάνεται στο δέκτη και αντιστοιχεί στο $\boldsymbol{x}^n$ βρίσκεται μέσα σε μια $\boldsymbol{n}-$διάστατη σφαίρα με κέντρο $\boldsymbol{x}^n$ και ακτίνα $\sqrt{\boldsymbol{n}(N+\epsilon)}$. Καθώς το $\boldsymbol{n}$ αυξάνει, η $\boldsymbol{y}^n$ βρίσκεται μέσα στη σφαίρα με ολοένα αυξανόμενη πιθανότητα (και με $\epsilon \longrightarrow 0$).
- Για μεγάλο $\boldsymbol{n}$, ο χώρος όλων των πιθανών ακολουθιών στο δέκτη έχει ακτίνα περίπου ίση με $\sqrt{\boldsymbol{n}(P+N)}$. Δεδομένου ότι σε κάθε $\boldsymbol{x}^n$ αντιστοιχεί μια σφαίρα ακτίνας περίπου $\sqrt{\boldsymbol{n}N}$ και ότι ο όγκος μιας $\boldsymbol{n}-$ διαστατης σφαίρας είναι της μορφής $C_n \boldsymbol{r}^n$, ο αριθμός "σφαιρών" που αντιστοιχούν σε μηνύματα και τις οποίες μπορούμε να χωρέσουμε στο χώρο όλων των $\boldsymbol{y}^n$ προκειμένου αυτές να μην επικαλύπτονται (και, επομένως, να μη γίνονται σφάλματα εκτίμησης στο δέκτη) δε μπορεί να υπερβεί τις

$$\frac{C_n(\sqrt{n(P+N)})^n}{C_n(\sqrt{nN})^n} \Rightarrow \log\left(\frac{C_n(\sqrt{n(P+N)})^n}{C_n(\sqrt{nN})^n}\right) = \frac{n}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right).$$

Γεωμετρικό Επιχείρημα (**Sphere Packing Argument**)



Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης

- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια. Waterfilling
- Γκαουσιανό Κανάλι με έγχρωμο θόρυβο (μνήμη).
- Γκαουσιανό Κανάλι με Ανάδραση.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης

- Στη φύση, τα κανάλια είναι όχι μόνο συνεχών τιμών αλλά και συνεχούς χρόνου (waveform channels).
- Το Γκαουσιανό κανάλι συνεχούς χρόνου δίνεται από τη σχέση

$$Y(t) = (X(t) + Z(t)) * h(t),$$

  όπου $Z(t)$ είναι λευκός Γκαουσιανός θόρυβος και $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με $f_{\max} = W$.
- Από το Θεώρημα Δειγματοληψίας Shannon-Nyquist γνωρίζουμε ότι οποιοδήποτε βαθυπερατό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί χωρίς απώλεια πληροφορίας με χρήση τουλάχιστον $2W$ δειγμάτων του ανά δευτερόλεπτο.
- Επομένως, για σήματα $X(t)$ τα οποία δεν έχουν φασματικό περιεχόμενο σε συχνότητες μεγαλύτερες της W, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα δείγματά τους και, επομένως, διακριτό μοντέλο καναλιού.
- Για πληρέστερη δικαιολόγηση δείτε π.χ. Cover 9.3.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (2)

- Έστω ότι παρατηρούμε το σήμα $X(t)$ εύρους ζώνης W για T s. Εάν η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) της $Z(t)$ ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}$, η ισχύς του θορύβου ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}2W = \mathcal{N}_0 W$. Επομένως, η μεταβλητότητα κάθε δείγματος θορύβου (από τα $2WT$,συνολικά) ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0 WT}{2WT} = \frac{\mathcal{N}_0}{2}$.
- Η ενέργεια ανά δείγμα ισούται με $\frac{PT}{2WT} = \frac{P}{2W}$.
- Αποδεικνύεται ότι τα δείγματα λευκού Γκαουσιανού θορύβου είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d.) Γκαουσιανές τ.μ.
- Συνεπώς, η χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού με περιορισμένο εύρος ζώνης ισούται με

$$C = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{P}{2W}}{\frac{\mathcal{N}_0}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{ bits/δείγμα} \Rightarrow$$

$$C = W\log\left(1+\frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{bits/s.}$$

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (3)

$$C = W \log \left(1 + \frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{ bits/s}$$

Παρατηρήσεις:

- Η χωρητικότητα έχει λογαριθμική εξάρτηση από την ισχύ. Επομένως, καθώς αυξάνουμε την ισχύ, το "κέρδος" που αποκομίζουμε μειώνεται.
- Ή αλλιώς: Για δεδομένη ισχύ, εάν είναι διαθέσιμα δύο Γκαουσιανά κανάλια (ταυτόχρονα) με ίδιο θόρυβο, είναι καλύτερο να μοιράσουμε την ισχύ στα κανάλια.
- Για $W \to \infty$, $C = \frac{P}{\mathcal{N}_0} \log_2 e$ bits/s. Επομένως, για άπειρο εύρος ζώνης, η χωρητικότητα αυξάνει γραμμικά με την ισχύ.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια. **Waterfilling**

- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια. Waterfilling
- Γκαουσιανό Κανάλι με έγχρωμο θόρυβο (μνήμη)
- Γκαουσιανό Κανάλι με Ανάδραση.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια

- Έστω k παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μετάδοση πληροφορίας.
  - Για παράδειγμα, μπορεί να έχουμε Γκαουσιανό κανάλι συνεχούς χρόνου με έγχρωμο θόρυβο (με διαφορετική, δηλαδή, πυκνότητα ισχύος σε κάθε συχνότητα). Το κανάλι σε κάθε συχνότητα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Γκαουσιανό. Τυπικό παράδειγμα: Συστήματα DSL.
  - Το μοντέλο παράλληλων Γκαουσιανών καναλιών μπορεί, επίσης, να εφαρμοστεί σε κανάλια με διαλείψεις (fading). Στην περίπτωση επίπεδων (flat) διαλείψεων το κάθε ένα από τα k κανάλια αντιστοιχεί σε μια χρονική στιγμή.
- Επομένως, για το κανάλι j,

$$Y_j = X_j + Z_j,\ j = 1, 2, \ldots, k,\ \text{και}\ Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j).$$

- Τέλος, θεωρούμε ότι η συνολική ισχύς που είναι διαθέσιμη για μετάδοση είναι πεπερασμένη. Δηλαδή, $E \sum_{j=1}^{k} X_j^2 \leq P$.
- Ποια είναι η χωρητικότητα του συστήματος και πώς επιτυγχάνεται;

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (2)

- Η "πληροφοριακή" χωρητικότητα των k παράλληλων καναλιών ισούται με

$$C = \max_{f(x_1, x_2, \ldots, x_k): \sum E X_i^2 \le P} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k).$$

- Αποδεικνύεται ότι, και για τα παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια, η "λειτουργική" χωρητικότητα ισούται με την "πληροφοριακή".
- Δεδομένου ότι οι Z_i είναι ανεξάρτητες,

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Y_1, \ldots, Y_k | X_1, \ldots, X_k) \\ &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k | X_1, \ldots, X_k) \\ &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k) \\ &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i) \end{aligned}$$

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (3)

$$I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = h(Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i)$$
$$\stackrel{(a)}{\leq} \sum_i h(Y_i) - h(Z_i) \stackrel{(b)}{\leq} \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right),$$

όπου $P_i = EX_i^2$.

- Η ισότητα στο (a) ισχύει όταν οι Y_i είναι ανεξάρτητες (και, επομένως, οι X_i, δεδομένου ότι οι Z_i είναι ανεξάρτητες). Η ισότητα στο (b) ισχύει για Γκαουσιανές X_i.
- Επομένως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε $(X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} P_i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & P_k \end{bmatrix}\right)$.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (4)

- Απομένει να βρούμε την κατανομή ισχύος (δηλαδή τα $P_i : \sum_i P_i \leq P$) η οποία μεγιστοποιεί την $I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$.
- Πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{array}{rl} \text{μεγιστοποίησε την ποσότητα} & \sum_i \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_i}{N_i}\right) \\ \text{με τον περιορισμό} & \sum_i P_i = P \end{array}$$

- Με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange (βλ. π.χ. Cover 9.4.) ότι η λύση δίνεται από την

$$P_i = (\nu - N_i)^+,$$

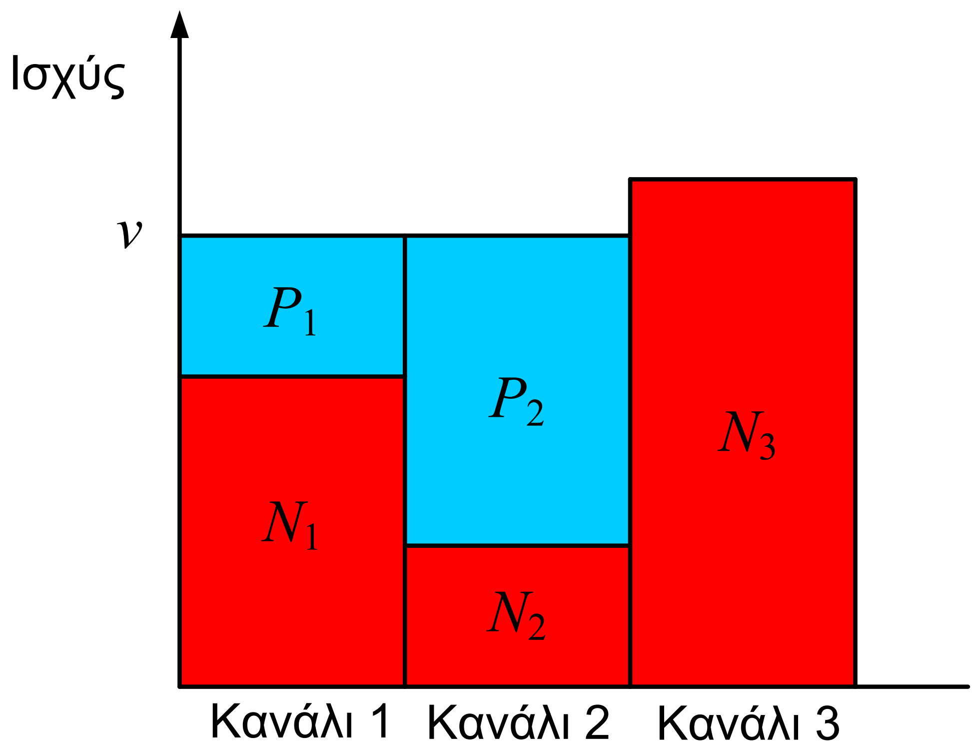
όπου

$$(x)^+ = \begin{cases} x & \text{εάν} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{εάν} \quad x < 0 \end{cases}$$

και $\sum_i (\nu - N_i)^+ = P$.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια – **Waterfilling**

- Η κατανομή ισχύος ονομάζεται **waterfilling** (ή **waterpouring**) γιατί η διαθέσιμη ισχύς χρησιμοποιείται για να "γεμίσει" δοχεία με ύψος πάτου ανάλογο της ισχύος του θορύβου.



Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια – **Waterfilling** (2)

- Στην πράξη, ο αλγόριθμος waterfilling, μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής (βλ. και Cioffi `http://www.stanford.edu/class/ee379c/readerfiles/chap4.pdf`).

1. Έστω ότι K^* είναι ο αριθμός των καναλιών που χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση (όπου, δηλαδή, $P_i > 0$). Αρχικά υποθέτουμε ότι όλα τα κανάλια είναι "ενεργά" και τα κατατάσσουμε ως προς το θόρυβο. Το κανάλι 1 έχει τη μικρότερη μεταβλητότητα θορύβου ($N_i \leq N_j$ για $i < j$).
2. Επομένως, $K^* = K$, $P_i = (\nu - N_i)$, και $P = \sum_{i=1}^{K} P_i = K\nu - \sum_{i=1}^{K} N_i$.
3. Λύνουμε ως προς τον άγνωστο ν.
4. Θεωρούμε το κανάλι K^* με το μεγαλύτερο θόρυβο.
   - Εάν $P_{K^*} = \nu - N_{K^*} \leq 0$, και τα K^* κανάλια χρησιμοποιούνται (εκτός, πιθανώς, από κάποια με $P_i = 0$) και η βέλτιστη κατανομή δίνεται από τα $P_i = \nu - N_i$, $i = 1, \ldots, K^*$.
   - Εάν $P_{K^*} = \nu - N_{K^*} < 0$, το κανάλι K^* δε χρησιμοποιείται και το αφαιρούμε. Θέτουμε $K^* = K^* - 1$ και επιστρέφουμε στο βήμα 3.

Γκαουσιανό Κανάλι με έγχρωμο θόρυβο (μνήμη)

- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια. Waterfilling
- Γκαουσιανό Κανάλι με έγχρωμο θόρυβο (μνήμη)
- Γκαουσιανό Κανάλι με Ανάδραση.

Γκαουσιανά Κανάλια με έγχρωμο θόρυβο (**colored noise**)

- Στην πιο γενική περίπτωση, ένα Γκαουσιανό κανάλι με μνήμη δε μπορεί να αποσυντεθεί σε παράλληλα κανάλια με ανεξάρτητο θόρυβο.
- Θεωρούμε n διαδοχικές χρήσεις του καναλιού, και ότι υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του θορύβου σε κάθε χρήση, η οποία δίνεται από τον πίνακα συσχέτισης K_Z.
- Όπως και στην περίπτωση παράλληλων Γκαουσιανών καναλιών, η μέση ισχύς μετάδοσης είναι περιορισμένη:

$$\frac{1}{n}\sum_i EX_i^2 \leq P \Rightarrow \frac{1}{n}tr(K_X) \leq P,$$

όπου $tr(A) = \sum_i A_{ii}$ είναι το ίχνος του πίνακα A.

- Υπολογίζουμε την "πληροφοριακή" χωρητικότητα του καναλιού

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Y_1, \ldots, Y_k | X_1, \ldots, X_k) \\ &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k | X_1, \ldots, X_k) \\ &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k). \end{aligned}$$

Γκαουσιανά Κανάλια με έγχρωμο θόρυβο (2)

$$I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k).$$

- Η $h(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)$ εξαρτάται από τα στατιστικά του θορύβου και δε μπορούμε να τη μεταβάλουμε.
- Επομένως, προκειμένου να μεγιστοποιήσουμε την $I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την $h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$.
- Για δεδομένο πίνακα συσχέτισης K_Y, η κατανομή που μεγιστοποιεί την εντροπία είναι η (από κοινού) Γκαουσιανή. Επομένως, θέλουμε $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, K_Y)$. Επομένως, και η $\mathbf{X}$ πρέπει να είναι Γκαουσιανή, δεδομένου ότι η $\mathbf{Z}$ είναι Γκαουσιανή.
- Λόγω της ανεξαρτησίας των $\mathbf{X}$ και $\mathbf{Z}$, $K_Y = K_X + K_Z$.
- Συνεπώς, $h(\mathbf{Y}) \leq \frac{1}{2}\log((2\pi e)^n |K_X + K_Z|)$.
- Απομένει να μεγιστοποιήσουμε την ορίζουσα του πίνακα $K_X + K_Z$ με τον περιορισμό $\frac{1}{n}tr(K_X) \leq P$.

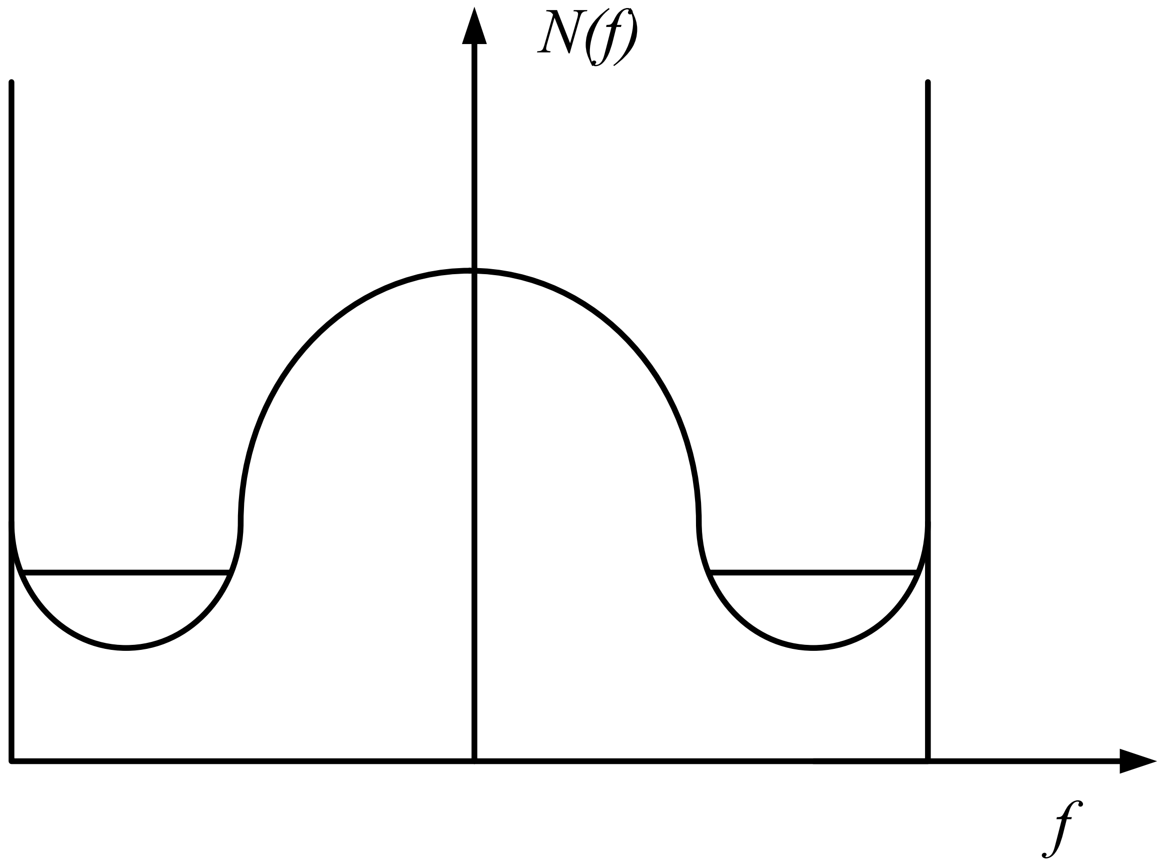
Γκαουσιανά Κανάλια με έγχρωμο θόρυβο (3)

- Αποδεικνύεται ότι και σε αυτήν την περίπτωση η βέλτιστη κατανομή προκύπτει με waterfilling:
$$A_{ii} = (\nu + \lambda_i)^+, \text{ και } A_{ij} = 0, \; i \neq j,$$
όπου λ_i οι ιδιοτιμές του πίνακα συσχέτισης του θορύβου που προκύπτουν από τη διαγωνιοποίηση $K_Z = Q\Lambda Q^T$ και $A = Q^T K_X Q$.
- Επομένως, η ιδέα είναι να διαγωνιοποιήσουμε το θόρυβο σε παράλληλα κανάλια (λεύκανση – whitening), να κάνουμε waterfilling, και να ανασυνθέσουμε το κανάλι με έγχρωμο θόρυβο.
- Αποδεικνύεται ότι, για $n \to \infty$, στην ουσία κάνουμε waterfilling στο φάσμα του θορύβου και επιτυγχάνουμε τη χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού συνεχούς χρόνου με έγχρωμο προσθετικό θόρυβο (ACGN)

$$C = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(1 + \frac{(\nu - N(f))^+}{N(f)}\right) df, \text{ με } \nu \text{ τέτοιο ώστε } \int (\nu - N(f))^+ df = P.$$

- Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Cover 9.5.

Γκαουσιανά Κανάλια με έγχρωμο θόρυβο (4)

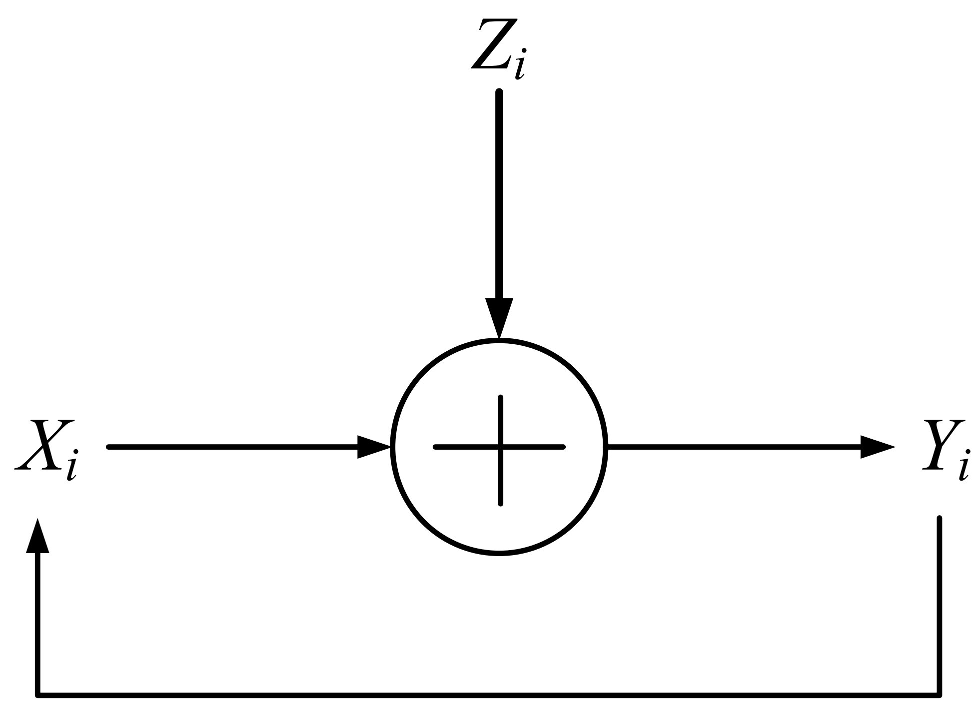


Γκαουσιανό Κανάλι με Ανάδραση

- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια. Waterfilling
- Γκαουσιανό Κανάλι με έγχρωμο θόρυβο (μνήμη)
- Γκαουσιανό Κανάλι με Ανάδραση

Γκαουσιανό Κανάλι με ανάδραση (**feedback**)

- Έχουμε αποδείξει ότι, για διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη, η χρήση ανάδρασης δεν αυξάνει τη χωρητικότητα (παρόλο που ενδέχεται να απλοποιήσει την επικοινωνία).
- Για κανάλια με μνήμη, η ανάδραση ενδέχεται να αυξάνει τη χωρητικότητα.



Γκαουσιανό Κανάλι με ανάδραση (**feedback**) (συνέχεια)

- Αποδεικνύεται ότι, για Γκαουσιανά κανάλια με μνήμη, η χωρητικότητα με ανάδραση ισούται με

$$C_{n,FB} = \max_{\frac{1}{n}tr(K_X^{(n)}) \leq P} \frac{1}{2n} \log \frac{|K_{X+Z}^{(n)}|}{|K_Z^{(n)}|}.$$

- Αποδεικνύεται, επίσης, ότι

$$C_{n,FB} \leq C_n + \frac{1}{2}\text{bits},$$

και

$$C_{n,FB} \leq 2C_n.$$

- Επομένως, η χρήση ανάδρασης σε Γκαουσιανό κανάλι με μνήμη δεν αυξάνει τη χωρητικότητα περισσότερο από μισό bit. Επίσης, στην καλύτερη περίπτωση, η χρήση ανάδρασης διπλασιάζει τη χωρητικότητα.

Ανακεφαλαίωση μαθήματος

- Το Γκαουσιανό Κανάλι είναι συνεχών τιμών, αλλά διακριτού χρόνου. Αποτελεί σημαντικό μοντέλο τηλεπικοινωνιακών συστημάτων.
- Το Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι όταν υπάρχει περιορισμός ισχύος στην είσοδο αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση καναλιών διακριτών τιμών (με κατάλληλη, ωστόσο, τροποίηση ώστε να ληφθεί υπόψη ο περιορισμός ισχύος).
- Χωρητικότητα καναλιού Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN). Για πεπερασμένο εύρος ζώνης, η σχέση ισχύος - χωρητικότητας είναι λογαριθμική. Για άπειρο εύρος ζώνης (ή πολύ μικρό SNR) η εξάρτηση είναι γραμμική.
- Χωρητικότητα συστήματος από παράλληλα και ανεξάρτητα κανάλια AWGN. Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με χρήση waterfilling.
- Κανάλια Προσθετικού Έγχρωμου Γκαουσιανού Θορύβου (ACGN). Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με χρήση waterfilling στις ιδιοτιμές του πίνακα συσχέτισης θορύβου και μετασχηματισμούς ορθογωνιότητας.
- Κανάλι Προσθετικού Γκαουσιανού Θορύβου με ανάδραση. Στην περίπτωση έγχρωμου θορύβου η χωρητικότητα μπορεί να αυξηθεί κατά 1/2, το πολύ, bit.

Προεπισκόπηση επόμενου μαθήματος

- Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων.
- Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (MAC). Περιοχή Χωρητικότητας και Τρόπος Μετάδοσης.
- Κατανεμημένη Κωδικοποίηση Πηγής. Θεώρημα Slepian-Wolf.
- Κανάλι Ευρυεκπομπής (BC). Χωρητικότητα και Τρόπος Μετάδοσης.
- Κανάλι Μεταγωγής (Relay Channel). Χωρητικότητα και Τρόπος Μετάδοσης.