EE728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

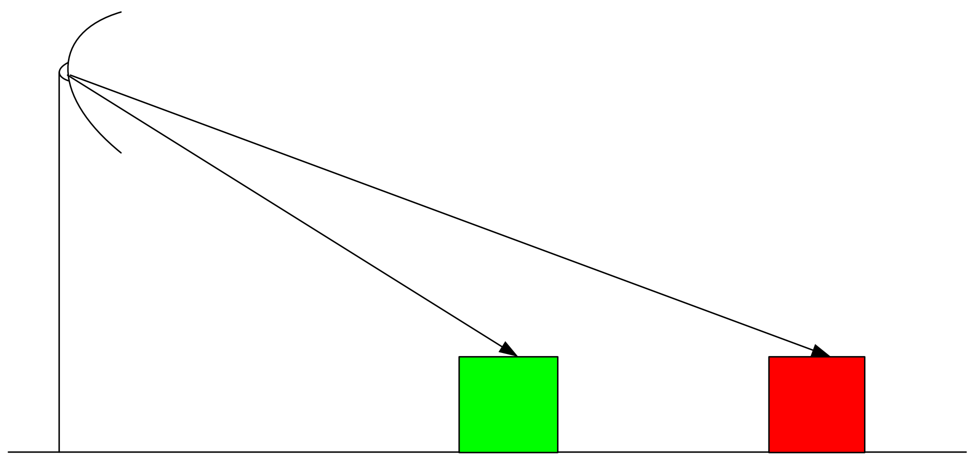
Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

11ο Μάθημα – 22 Μαΐου 2008

Περιεχόμενα Σημερινού Μαθήματος

- Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel – BC)

Κανάλι Ευρυεκπομής (**Broadcast Channel – BC**)



- Ένας κεντρικός σταθμός που στέλνει διαφορετική πληροφορία (στη γενική περίπτωση) σε πολλούς χρήστες. Παράδειγμα: Σταθμός βάσης προς κινητά τερματικά (**downlink**).
- Το γενικό BC δεν έχει επιλυθεί (ακόμα ;). Γνωρίζουμε, όμως, την περιοχή χωρητικότητας για την περίπτωση του υποβαθμισμένου (**degraded**) BC.

BC – Ορισμοί

- Το κανάλι ευρυεκπομπής (2 χρηστών) αποτελείται από ένα αλφάβητο εισόδου $\mathcal{X}$, 2 αλφάβητα εξόδου $\mathcal{Y}_1$ και $\mathcal{Y}_2$ και ένα πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $p(y_1, y_2|x)$.
- Το BC δεν έχει μνήμη όταν $p(y_1^n, y_2^n|x^n) = \prod_{i=1}^n p(y_{1i}, y_{2i}|x_i)$.
- Ένας κώδικας $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το BC με ανεξάρτητη πληροφορία ανά χρήστη αποτελείται από έναν <u>κωδικοποιητή</u> (encoder) $X : (\{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\} \times \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}) \to \mathcal{X}^n$, και 2 <u>αποκωδικοποιητές</u> (decoders) $g_1 : \mathcal{Y}_1^n \to \{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\}$ και $g_2 : \mathcal{Y}_2^n \to \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}$.
- Μέση πιθανότητα σφάλματος: $P_e^{(n)} = \Pr\{g_1(Y_1^n) \neq W_1$ ή $g_2(Y_2^n) \neq W_2\}$, όπου τα (W_1, W_2) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένα στο σύνολο $2^{nR_1} \times 2^{nR_2}$.
- Ένα ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι <u>εφικτό</u> για το BC όταν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ με $P_e^{(n)} \to 0$.

BC – Ορισμοί (2)

- Εάν μέρος της πληροφορίας που στέλνει ο πομπός είναι κοινή και για τους δύο δέκτες, οι ορισμοί τροποποιούνται ως εξής:
- Ένας κώδικας $((2^{nR_0}, 2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το BC αποτελείται από έναν κωδικοποιητή (encoder) $X : (\{1, 2, \ldots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\} \times \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}) \to \mathcal{X}^n$, και 2 αποκωδικοποιητές (decoders) $g_1 : \mathcal{Y}_1^n \to \{1, 2, \ldots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\}$ και $g_2 : \mathcal{Y}_2^n \to \{1, 2, \ldots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}$.
- Μέση πιθανότητα σφάλματος: $P_e^{(n)} = \Pr\{g_1(Y_1^n) \neq (W_0, W_1)$ ή $g_2(Y_2^n) \neq (W_0, W_2)\}$, όπου τα (W_0, W_1, W_2) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένα στο σύνολο $2^{nR_0} \times 2^{nR_1} \times 2^{nR_2}$.
- Μια τριάδα ρυθμών μετάδοσης (R_0, R_1, R_2) είναι εφικτή για το BC όταν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $((2^{nR_0}, 2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ με $P_e^{(n)} \to 0$.

BC – Περιοχή Χωρητικότητας

- Ορισμός: Η περιοχή χωρητικότητας (**capacity region**) του BC είναι το περίβλημα (**closure**) του συνόλου όλων των εφικτών ρυθμών μετάδοσης.
- Θεώρημα (Cover 15.6.1): Η περιοχή χωρητικότητας του BC εξαρτάται μόνο από τις υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές $p(y_1|x)$ και $p(y_2|x)$.

Υποβαθμισμένο (**degraded**) BC

- Ένα BC είναι φυσικά υποβαθμισμένο (physically degraded) εάν $p(y_1, y_2|x) = p(y_1|x)p(y_2|y_1)$.
- Ένα BC είναι στοχαστικά υποβαθμισμένο (stochastically degraded) εάν οι υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές είναι οι ίδιες με αυτές ενός φυσικά υποβαθμισμένου BC. Δηλαδή, υπάρχει κατανομή $p'(y_2|y_1)$ τέτοια ώστε

$$p(y_2|x) = \sum_{y_1} p(y_1|x)p'(y_2|y_1).$$

- Δεδομένου ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 15.6.1, η περιοχή χωρητικότητας του BC εξαρτάται μόνο από τις υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές, η περιοχή χωρητικότητας του φυσικά υποβαθμισμένου BC συμπίπτει με αυτήν του στοχαστικά υποβαθμισμένου BC.

Περιοχή Χωρητικότητας **degraded BC**

- Θεώρημα (Cover 15.6.2): Η περιοχή χωρητικότητας για την αποστολή ανεξάρτητης πληροφορίας στο υποβαθμισμένο BC είναι η κυρτή γάστρα (convex hull) του περιβλήματος (closure) όλων των (R_1, R_2) που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$R_2 \le I(U; Y_2),$$
$$R_1 \le I(X; Y_1|U),$$

για κάποια από κοινού κατανομή $p(u)p(x|u)p(y_1, y_2|x)$, όπου για την απολυτότητα (cardinality) της βοηθητικής τ.μ. U ισχύει $|\mathcal{U}| \le \min\{|\mathcal{X}|, |\mathcal{Y}_1|, |\mathcal{Y}_2|\}$.

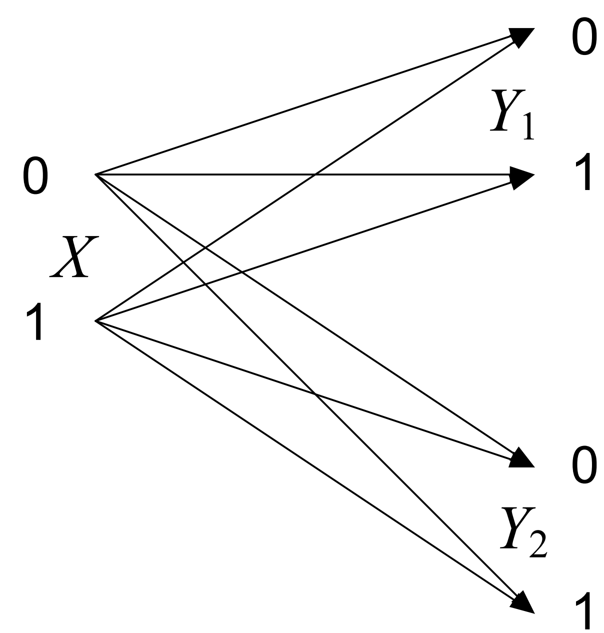
Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση στο **degraded BC**

- Η βασική ιδέα:
  - Ο δέκτης 1 γνωρίζει όλη την πληροφορία που γνωρίζει και ο δέκτης 2. Αντίθετα, ο δέκτης 2 γνωρίζει λιγότερη πληροφορία από το δέκτη 1.
  - Επομένως, ο δέκτης 1 μπορεί να αποκωδικοποιήσει την πληροφορία που προορίζεται για το δέκτη 2.
  - Κωδικοποιούμε το μήνυμα W_2 που προορίζεται για το δέκτη 2 με χρήση της τ.μ. U (2^{nR_2} πιθανές κωδικές λέξεις).
  - Ανάλογα με την τιμή της U, από τη σκοπιά του χρήστη 1 βλέπουμε ένα από 2^{nR_2} πιθανά κανάλια. Ανάλογα με το κανάλι και το μήνυμα W_1 επιλέγουμε την τιμή της τ.μ. $X(W_1, W_2)$ (2^{nR_1} πιθανές κωδικές λέξεις για δεδομένη $U(W_2)$, $2^{n(R_1+R_2)}$ συνολικά) $\longrightarrow$ <u>κωδικοποίηση υπέρθεσης</u> (superposition coding).
  - Ο χρήστης 2 μπορεί να αποκωδικοποιήσει το W_2, αλλά όχι το W_1.
  - Ο (καλύτερος) χρήστης 1 ξεκινά αποκωδικοποιώντας το W_2. Στη συνέχεια, με βάση την τιμή της U προχωρά στην αποκωδικοποίηση του W_1.
  - Διαφορά με το MAC: η αποκωδικοποίηση ξεκινά πάντοτε από την πληροφορία του χειρότερου χρήστη. Επίσης, ο αριθμός των αποκωδικοποιήσεων διαφέρει σε κάθε δέκτη.

Degraded BC: Μετάδοση κοινής πληροφορίας

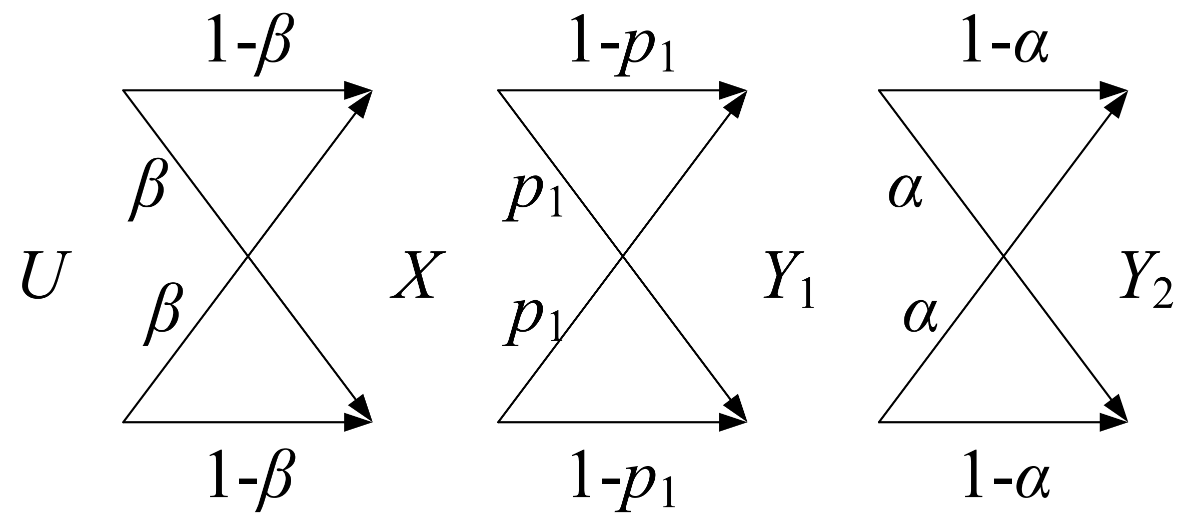
- Θεώρημα (Cover 15.6.4): Εάν το ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι εφικτό σε degraded BC όπου αποστέλλεται ανεξάρτητη πληροφορία, τότε, η τριάδα $(R_0, R_1, R_2 - R_0)$ είναι εφικτή όταν στέλνονται R_0 bits κοινής πληροφορίας, εφόσον $R_0 < R_2$.

Παράδειγμα 10.4 (**Cover 15.6.5**)



- Το κανάλι μπορεί να εκφραστεί ως **degraded** BC. Έστω, χωρίς απώλεια γενικότητας, ότι $p_1 < p_2 < 0.5$. Μπορούμε να εκφράσουμε το κανάλι ως διαδοχή δύο BSC, όπως φαίνεται στην επόμενη διαφάνεια.

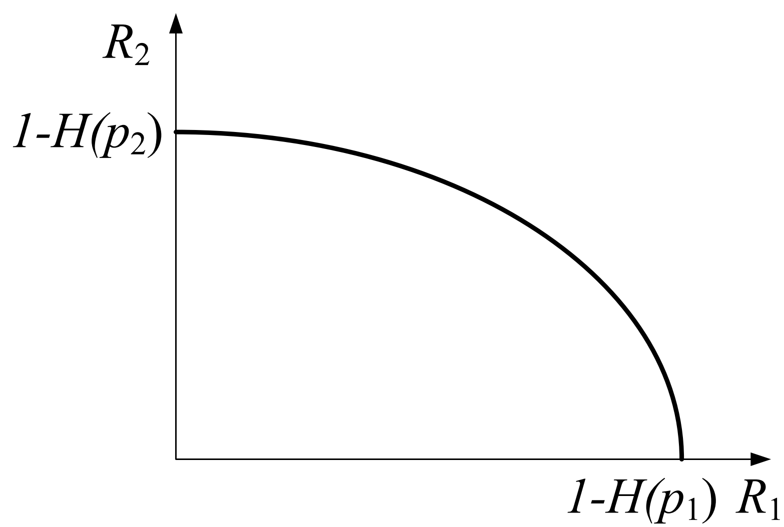
Παράδειγμα 10.4 (**Cover 15.6.5**) (2)



- Πρέπει να ισχύει $p_1(1-\alpha)+(1-p_1)\alpha = p_2 \Rightarrow \alpha = \frac{p_2-p_1}{1-2p_1}$.
- Από το Θεώρημα 15.6.2, $|\mathcal{U}| \leq 2$. Επομένως, επιλέγουμε δυαδική U. Επίσης, λόγω συμμετρίας, $\Pr\{X=U\} = 1-\beta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- $I(U;Y_2) = H(Y_2) - H(Y_2|U)$. Η εντροπία της Y_2 μεγιστοποιείται με χρήση ομοιόμορφης U. Επομένως, $I(U;Y_2) = 1 - H(\beta * p_2)$, με $\beta * p_2 = \beta(1-p_2)+(1-\beta)p_2$.

Παράδειγμα 10.4 (**Cover 15.6.5**) (3)

- Ομοίως, $I(X;Y_1|U) = H(Y_1|U) - H(Y_1|X,U) = H(Y_1|U) - H(Y_1|X) = H(\beta * p_1) - H(p_1)$.
- Μεταβάλλοντας την τιμή της β, μπορούμε να σχεδιάσουμε την περιοχή χωρητικότητας.

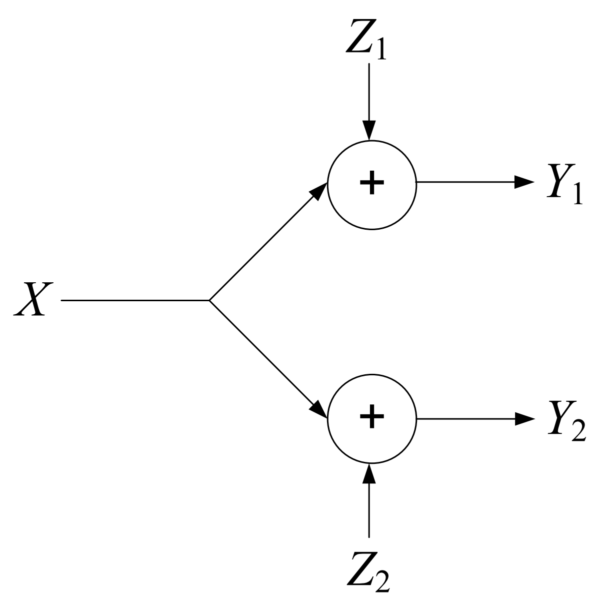


Γκαουσιανό **BC**

- Θεωρούμε το κανάλι 2 χρηστών

$$Y_1 = X + Z_1,$$
$$Y_2 = X + Z_2,$$

όπου $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$ και $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, N_2)$, $N_2 \geq N_1$.

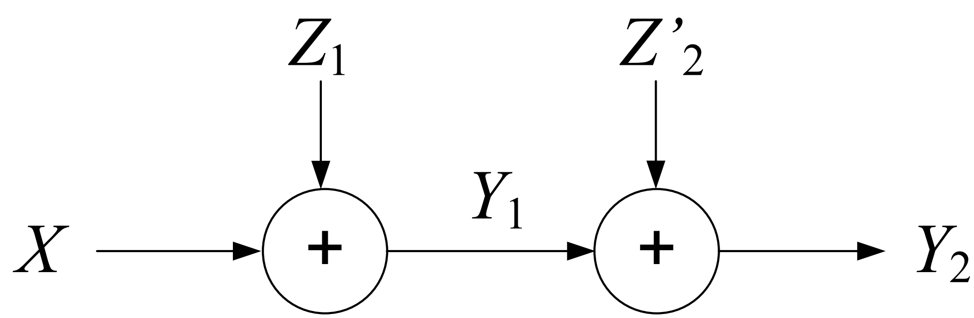


Γκαουσιανό **BC** (2)

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι το Γκαουσιανό BC είναι ισοδύναμο με το **degraded** BC

$$Y_1 = X + Z_1,$$
$$Y_2 = Y_1 + Z_2',$$

με $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$ και $Z_2' \sim \mathcal{N}(0, N_2 - N_1)$.



Περιοχή Χωρητικότητας Γκαουσιανού **BC**

- Για το Γκαουσιανό Κανάλι 2 χρηστών, μπορεί να αποδειχθεί ότι η περιοχή χωρητικότητας δίνεται από τις σχέσεις

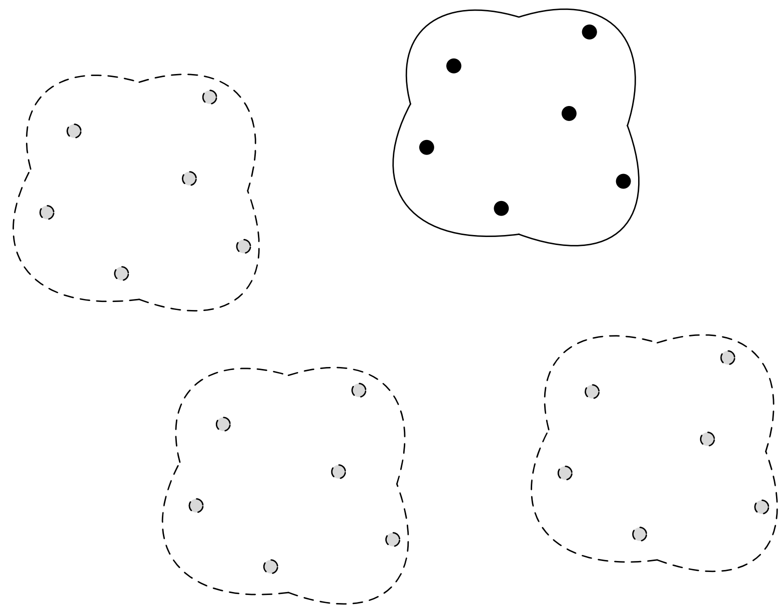
$$R_1 < C\left(\frac{\alpha P}{N_1}\right), \text{ και}$$
$$R_2 < C\left(\frac{(1-\alpha)P}{\alpha P + N_2}\right),$$

με $0 \leq \alpha \leq 1$.

Κωδικοποίηση και Αποκωδικοποίηση στο Γκαουσιανό **BC**

- Ο πομπός δημιουργεί 2 βιβλία κωδίκων: Ένα με ισχύ αP και ρυθμό μετάδοσης R_1 και ένα με ισχύ $(1-\alpha)P$ και ρυθμό R_2 (το ζεύγος (R_1, R_2) πρέπει να βρίσκεται μέσα στην περιοχή χωρητικότητας).
- Αν w_1 και w_2 είναι τα μηνύματα που στέλνονται στο χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα, ο πομπός στέλνει στο κανάλι το άθροισμα των κωδικών λέξεων $\mathbf{X}_1(w_1) + \mathbf{X}_2(w_2)$.
- Ο (χειρότερος) δέκτης 2 βρίσκει την κωδική λέξη $\hat{\mathbf{X}}_2$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο ληφθέν σήμα $\mathbf{Y}_2$ (ή αποκωδικοποιεί με χρήση από κοινού τυπικότητας). Το μήνυμα του δέκτη 1 αποτελεί θόρυβο για το δέκτη 2.
- Ο (καλύτερος) δέκτης 1 αρχίζει βρίσκοντας την κωδική λέξη $\hat{\mathbf{X}}_2$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο ληφθέν σήμα $\mathbf{Y}_2$. Μπορεί να ανιχνεύσει τη $\hat{\mathbf{X}}_2$ γιατί έχει χαμηλότερο θόρυβο από το δέκτη 2. Στη συνέχεια, αφαιρεί τη $\hat{\mathbf{X}}_2$ από το ληφθέν σήμα $\mathbf{Y}_1$ και βρίσκει την κωδική λέξη $\hat{\mathbf{X}}_1$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο σήμα $\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{X}}_2$ (ή αποκωδικοποιεί με χρήση από κοινού τυπικότητας).
- Στο Γκαουσιανό BC (και, γενικά, στο degraded BC) κάθε δέκτης γνωρίζει την πληροφορία των δεκτών που είναι χειρότεροι από αυτόν.

Superposition Coding



- Ο χειρότερος δέκτης μπορεί να δει μόνο ποιο από τα “σύννεφα” έχει σταλεί.
- Ο καλύτερος δέκτης μπορεί να ξεχωρίσει την κωδική λέξη μέσα στο σύννεφο.

FDMA/TDMA downlink

- Ποια είναι η απόδοση ορθογώνιων τρόπων πολύπλεξης στο Γκαουσιανό BC;
- Αποδεικνύεται ότι η μετάδοση με FDMA/TDMA είναι υποβέλτιστη, εκτός από 2 περιπτώσεις:
  1. Τα ακραία σημεία της περιοχής χωρητικότητας όπου μεταδίδεται πληροφορία μόνο σε ένα χρήστη
  2. Στην περίπτωση που ο θόρυβος είναι ο ίδιος και στους 2 δέκτες.
- Η διαφορά στην απόδοση μεγαλώνει όσο μεγαλώνει και η διαφορά μεταξύ των ισχύων θορύβου των χρηστών.

FDMA/TDMA downlink (2)

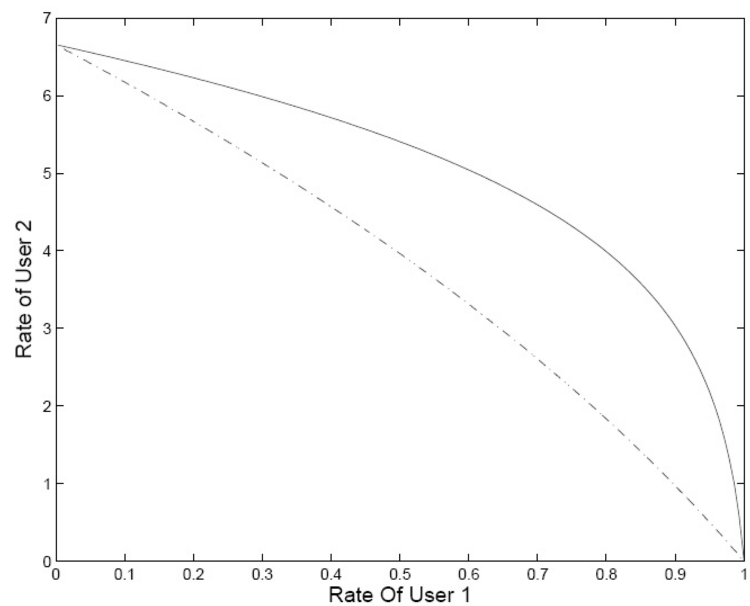


Figure 6.9: The boundary of rate pairs (in bits/s/Hz) achievable by superposition coding (solid line) and orthogonal schemes (dashed line) for the two user asymmetric downlink AWGN channel with the user SNRs equal to 0 and 20 dB (i.e., $P|h_1|^2/N_0 = 1$ and $P|h_2|^2/N_0 = 100$). In the orthogonal schemes, both the power split $P = P_1 + P_2$ and split in degrees of freedom α are jointly optimized to compute the boundary.

Ανακεφαλαίωση 10ου και 11ου μαθήματος

- Multiple Access Channel: Η περιοχή χωρητικότητας είναι, στη γενική περίπτωση, ένα πεντάγωνο.
  - Μετάδοση επάνω στο όριο της περιοχής χωρητικότητας επιτυγχάνεται με ταυτόχρονη μετάδοση των χρηστών.
  - Στο δέκτη, οι χρήστες αποκωδικοποιούνται σειριακά και το αποκωδικοποιημένο σήμα αφαιρείται (onion peeling). Η σειρά αποκωδικοποίησης εξαρτάται από το σημείο της περιοχής χωρητικότητας στο οποίο γίνεται η μετάδοση.
- Broadcast Channel: Η περιοχή χωρητικότητας είναι κυρτή.
  - Μετάδοση επάνω στο όριο της περιοχής χωρητικότητας επιτυγχάνεται με κωδικοποίηση υπέρθεσης (superposition coding).
  - Ο κάθε δέκτης αποκωδικοποιεί την πληροφορία που προορίζεται για όλους τους χειρότερους δέκτες και εφαρμόζει onion peeling πριν αποκωδικοποιήσει τη δική του πληροφορία.
- Τόσο στο Γκαουσιανό MAC όσο και στο Γκαουσιανό BC, μετάδοση με ορθογώνια πολυπλεξία (FDMA/TDMA) είναι, στη γενική περίπτωση, υποβέλτιστη.