EE725
Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

9 Μαρτίου 2011

Γενικές Πληροφορίες

- Διδάσκων: Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης. `dtouba@upatras.gr`.
- Σκοπός του μαθήματος:
  - Να συμβάλει στη βαθύτερη κατανόηση της Ψηφιακής Μετάδοσης.
  - Να εμβαθύνει σε κάποια θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών.
  - Να βοηθήσει την έρευνά σας.
- Θέματα προς συζήτηση
  - Καθορισμός ωρών γραφείου κατά τις οποίες θα δίνεται προτεραιότητα σε όσους έχουν δηλώσει το μάθημα.
  - Καθορισμός τρόπου εξέτασης / αξιολόγησης.

Σχετικά Βιβλία/Συγγράμματα

- Θα χρησιμοποιηθούν διαφάνειες. *Δε θα δοθεί βιβλίο*. Εάν ζητηθεί, θα υποδειχθούν κεφάλαια από Ελληνόγλωσσα βιβλία.
- Τα παρακάτω βιβλία/συγγράμματα καλύπτουν θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών. Θα είναι διαθέσιμα από το διδάσκοντα για δανεισμό για λίγες ώρες.
    - J. R. Barry, E. A. Lee, and D. G. Messerschmitt, *Digital Communication*, 3rd ed.
      Καλό βιβλίο, περισσότερο από την πλευρά της Επεξεργασίας Σήματος. Περιέχει και εισαγωγικά κεφάλαια. Η 3η έκδοση καλύπτει και συστήματα MIMO.
    - J. G. Proakis & M. Salehi, *Digital Communications*, 5th ed.
      Κλασσικό βιβλίο Ψηφιακών Επικοινωνιών. Γενικά υπεισέρχεται σε περισσότερες λεπτομέρειες από τους Lee & Messerschmitt.

Σχετικά Βιβλία/Συγγράμματα (2)

- John M. Cioffi, *Digital Communication*, Class Reader, `http://www.stanford.edu/group/cioffi/`.
  Καλύπτει ένα μεγάλο εύρος θεμάτων. Προϋποθέτει καλή γνώση πιθανοτήτων, σημάτων και συστημάτων και στοχαστικών διαδικασιών. Εκτενής αναφορά σε συστήματα DMT, στη γενικευμένη θεωρία ισοσταθμιστών (GDFE) και σε συστήματα πολλών χρηστών (multiuser).
- R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*.
  Κλασικό βιβλίο Θεωρίας Πληροφορίας. Το 8ο κεφάλαιο περιέχει εκτενή ανάλυση της μετάδοσης σε συνεχή κανάλια πεπερασμένου εύρους ζώνης.
- S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing - Volume 1, Estimation Theory*.
  Επικεντρώνεται στη Θεωρία Εκτίμησης.

Σχετικά Βιβλία/Συγγράμματα (3)

- A. Lapidoth, *A Foundation in Digital Communication*.
  Καινούργιο βιβλίο. Δίνει μεγάλη σημασία στη μαθηματική αυστηρότητα και στη γεωμετρική θεώρηση των Ψηφιακών Επικοινωνιών.
- D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communications*.
  Πολύ καλογραμμένο βιβλίο με σύγχρονα θέματα. Δεν καλύπτει λεπτομέρειες σχεδίασης συστημάτων. Αναλύει τα Ασύρματα Συστήματα από τη σκοπιά της Επεξεργασίας Σήματος και της Θεωρίας Πληροφορίας.

Σχετικά Βιβλία/Συγγράμματα (4)

- A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3rd ed.
  Κλασικό βιβλίο πιθανοτήτων και στοχαστικών διαδικασιών. Πολύ χρήσιμο ως αναφορά.
- A. Leon-Garcia, *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, 2nd ed.
  Όπως φανερώνει και ο τίτλος του, είναι προσαρμοσμένο στις ανάγκες του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού.

Ύλη Μαθήματος

- Φέτος θα το μάθημα θα γίνει μαζί με το μάθημα "Μετάδοση Πληροφορίας" του Τμήματος Φυσικής.
- Αρχικά (μαζί με τους φοιτητές του Τμήματος Φυσικής):
  - Στοχαστικές Διαδικασίες. Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες και Είδη Θορύβου.
  - Βασικές αρχές Ψηφιακής Μετάδοσης: Διανυσματική Αναπαράσταση Κυματομορφών, Κανάλι Γκαουσιανού Θορύβου, Βέλτιστη Ανίχνευση, Πιθανότητα Σφάλματος, Είδη Αστερισμών και Διαμόρφωσης, Ανάλυση βαθυπερατών συστημάτων.

Ύλη Μαθήματος (συνέχεια)

- Στη συνέχεια (πιθανώς μόνο οι Ηλεκτρολόγοι), θα καλύψουμε κάποια από τα παρακάτω θέματα (αναλόγως του χρόνου/των ενδιαφερόντων σας)
  - Ανάλυση ζωνοπερατών Ψηφιακών Συστημάτων.
  - Διασυμβολική Παρεμβολή (ISI), Κριτήριο Nyquist, Ισοστάθμιση (Linear/DFE, ZF/MMSE), Προκωδικοποιητής Tomlinson.
  - Συστήματα DMT/OFDM.
  - Ασύρματα συστήματα. Χωρητικότητα καναλιών και τρόποι μετάδοσης. Συστήματα MIMO.
  - Συγχρονισμός συστημάτων. Εκτίμηση καναλιού.

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

1. Ψηφιακή Μετάδοση
2. Βασικές έννοιες στοχαστικών διαδικασιών και σημάτων και συστημάτων
   - Χώρος πιθανότητας και η έννοια της τυχαίας μεταβλητής
   - Πολλές τυχαίες μεταβλητές και δεσμευμένες κατανομές
   - Βασικές έννοιες στοχαστικών διαδικασιών
   - Συστήματα

Αντιστοιχία με συγγράμματα

- Cioffi: –
- Lee & Messerschmitt (3rd ed): Κεφ. 1, 2.1 – 2.3, 2-A, 3.1, 3.2
- Proakis 4th edition: Κεφ. 1, 2

Ψηφιακή Μετάδοση

- Σκοπός της Ψηφιακής Μετάδοσης είναι να στείλει μηνύματα από τον πομπό στο δέκτη δια μεσου του καναλιού.
  - Τα μηνύματα που στέλνονται ανήκουν σε ένα πεπερασμένο σύνολο.
  - Η αποστολή των μηνυμάτων γίνεται με τη χρήση σημάτων (κυματομορφών).
  - Επομένως, σε επίπεδο φυσικού καναλιού, η Ψηφιακή Μετάδοση είναι αναλογική.
  - Επίσης, η Ψηφιακή Μετάδοση είναι, στην ουσία, μετάδοση διακριτών μηνυμάτων. Εάν τα μηνύματα προέρχονται από ψηφία δια μέσου κάποιας απεικόνισης ή εάν τα αναπαραστήσουμε με ψηφία μπορούμε, ισοδύναμα, να θεωρήσουμε ότι στέλνουμε ομάδες ψηφίων.

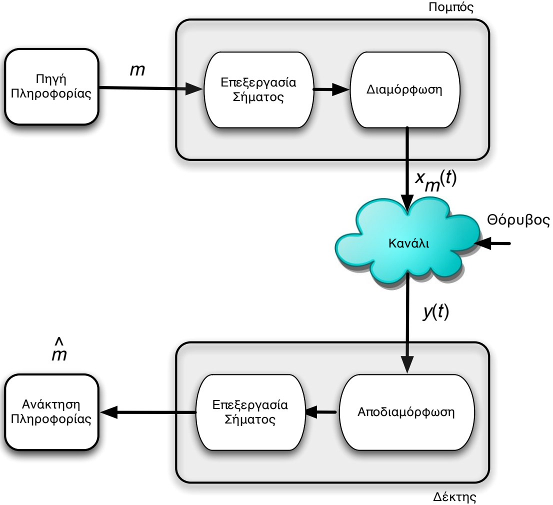
Ψηφιακή Μετάδοση (2)

- Η μετάδοση είναι επιτυχής όταν ο δέκτης ανιχνεύσει το ίδιο μήνυμα με αυτό που έστειλε ο πομπός.
- Στην πράξη, η μετάδοση αποτυγχάνει με κάποια πιθανότητα σφάλματος P_e λόγω
  - Θορύβου/μεταβολών του καναλιού/παραμόρφωσης, θορύβου στο δέκτη
  - Ανεπαρκούς γνώσης του καναλιού
  - Μη βέλτιστης σχεδίασης του συστήματος ώστε να μειωθεί η πολυπλοκότητα και, επομένως, το κόστος ή/και η κατανάλωση ισχύος.
- Ακόμα και αν η σχεδίαση είναι η βέλτιστη υπάρχει κάποιο όριο στο ρυθμό με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε δια μέσου του καναλιού. Τα όρια στη μετάδοση μελετώνται από τη Θεωρία Πληροφορίας.

Ψηφιακή Μετάδοση (3)

- Αρχικά, η πληροφορία που θέλουμε να στείλουμε στο δέκτη μετατρέπεται σε κάποιο από τα μηνύματα με χρήση κωδικοποιητή.
- Στη συνέχεια, τα μηνύματα μετατρέπονται σε (αναλογικές) κυματομορφές/ηλεκτρικά σήματα με τη χρήση διαμορφωτή και στέλνονται στο κανάλι για μετάδοση.
- Το κανάλι παραμορφώνει τις μεταδιδόμενες κυματομορφές τόσο με γνωστό τρόπο (π.χ. απόσβεση, διασπορά) όσο και με τυχαίο (θόρυβος, διαλείψεις (fading)).
- Στο δέκτη το σήμα αποδιαμορφώνεται, γίνεται ανίχνευση του μηνύματος που μεταδόθηκε και, στη συνέχεια, αποκωδικοποίηση.

Ψηφιακή Μετάδοση (4)



Ψηφιακή Μετάδοση (5)

- Τα μηνύματα που στέλνει ο πομπός είναι τυχαία από τη σκοπιά του δέκτη (αλλιώς δε θα είχε νόημα η μετάδοση).
- Ο θόρυβος του καναλιού είναι ένα άγνωστο και, συνήθως, τυχαίο σήμα.
- Ακόμα και η παραμόρφωση καναλιού μπορεί να είναι τυχαία (για παράδειγμα, στα ασύρματα κανάλια που παρουσιάζουν διαλείψεις και πολλαπλή όδευση – multipath).
- Επομένως, τόσο τα μεταδιδόμενα όσο και τα λαμβανόμενα σήματα και μηνύματα είναι στοχαστικά.

Ψηφιακή Μετάδοση (6)

- Παρόλο που δε γνωρίζουμε εκ των προτέρων την τιμή των σημάτων, γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητές τους. Βασιζόμενοι σε αυτές μπορούμε να κάνουμε υποθέσεις για τις τιμές τους. Η πιθανότητα σφάλματος εξαρτάται από την κατανομή των εκπεμπόμενων και των λαμβανόμενων σημάτων και, φυσικά, από τους αλγορίθμους ανίχνευσης που χρησιμοποιεί ο δέκτης.
- Η κατανομή των λαμβανόμενων σημάτων εξαρτάται από την κατανομή των εκπεμπόμενων σημάτων και από τον τρόπο που επιδρά σε αυτά το κανάλι.

Βασικές έννοιες στοχαστικών διαδικασιών και σημάτων και συστημάτων

Διευκρίνιση

Η επισκόπηση των εννοιών Θεωρίας Πιθανοτήτων, Στοχαστικών Διαδικασιών και Σημάτων και Συστημάτων στις επόμενες διαφάνειες γίνεται εν είδει επανάληψης. Για το λόγο αυτό δίνεται προτεραιότητα στη σημασία και στην εφαρμογή των εννοιών στις Ψηφιακές Επικοινωνίες σε βάρος της μαθηματικής αυστηρότητας και πληρότητας. Είναι, ωστόσο, σημαντικό να ελέγχουμε εάν ισχύουν οι απαραίτητες συνθήκες και υποθέσεις κάθε φορά που χρησιμοποιούμε κάποιο μαθηματικό εργαλείο για τους σκοπούς των Ψηφιακών Επικοινωνιών.

Χώρος Πιθανότητας

- Ο χώρος πιθανότητας (probability space) είναι μια τριάδα οντοτήτων, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, όπου
  - Το Ω είναι ένα σύνολο δειγμάτων (δειγματικός χώρος – sample space). Τα στοιχεία του Ω είναι τα στοιχειώδη αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος. Ο χώρος Ω μπορεί να είναι διακριτός (πεπερασμένος ή απείρως αριθμήσιμος (countably infinite)) ή συνεχής.
  - Το $\mathcal{F}$ είναι το σύνολο των *ενδεχομένων* (set of events), δηλαδή ένα σύνολο από υποσύνολα του Ω. Ένα ενδεχόμενο $A \subset \Omega$ εμφανίζεται εάν το στοιχειώδες αποτέλεσμα $\omega \in A$.
  - Τα στοιχεία του $\mathcal{F}$ πρέπει να συνιστούν σ-άλγεβρα – δε θα υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες. Για διακριτό Ω, ένα πιθανό $\mathcal{F}$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω (power set).
  - Το *μέτρο πιθανότητας* (probability measure), P, είναι μια απεικόνιση (mapping) από το $\mathcal{F}$ στο διάστημα $[0, 1]$ που αντιστοιχίζει μία τιμή πιθανότητας σε κάθε $A \in \mathcal{F}$.

Παραδείγματα Χώρων Πιθανότητας

- Διακριτοί
  - Ρίψη κέρματος μία φορά. $\Omega = \{\text{Κ}, \text{Γ}\}$.
  - Ρίψη κέρματος n φορές. Το Ω περιέχει όλες τις πιθανές (2^n) ακολουθίες που ενδέχεται να προκύψουν.
  - Ρίψη κέρματος έως ότου έρθει για πρώτη φορά Κορώνα. $\Omega = \{\text{Κ}, \text{ΓΚ}, \text{ΓΓΚ}, \text{ΓΓΓΚ}, \ldots\}$ (απείρως αριθμήσιμο).
- Συνεχείς
  - Τυχαίος πραγματικός αριθμός μεταξύ 0 και 1. $\Omega = [0, 1]$.
  - Χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων 2 πακέτων. $\Omega = (0, +\infty)$.
  - Σημείο επάνω σε δίσκο μοναδιαίας ακτίνας. $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Αξιώματα και Ιδιότητες Μέτρου Πιθανότητας

- Ένα μέτρο πιθανότητας, P, πρέπει να ικανοποιεί τα εξής αξιώματα:

1. $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Εάν $A_1, A_2, \ldots$ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset$ για όλα τα $i \neq j$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Αξιώματα και Ιδιότητες Μέτρου Πιθανότητας (συνέχεια)

- Με βάση τα παραπάνω αξιώματα, μπορεί, επίσης, να αποδειχτεί ότι
  - $P(\emptyset) = 0$.
  - $P(A^c) = 1 - P(A)$, όπου A^c είναι το συμπλήρωμα του A.
  - Εάν $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$.
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
  - $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$. Γενίκευση: Φράγμα Ένωσης Ενδεχομένων (Union of Events Bound):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Νόμος Ολικής Πιθανότητας

- Νόμος ολικής πιθανότητας (law of total probability):
  Εάν $A_1, A_2, \ldots$ είναι ενδεχόμενα που διαμερίζουν τον Ω, δηλαδή
  - είναι ασυμβίβαστα ($A_i \cap A_j = \emptyset$ για όλα τα $i \neq j$) και
  - $\cup_i A_i = \Omega$,

  για κάθε ενδεχόμενο B,

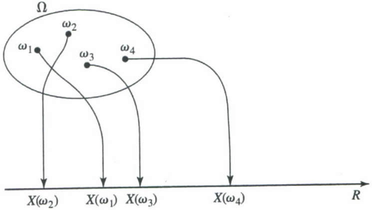
$$P(B) = \sum_i P(A_i \cap B).$$

- Ο Νόμος Ολικής Πιθανότητας είναι πολύ χρήσιμος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες, όπως θα δούμε αργότερα.

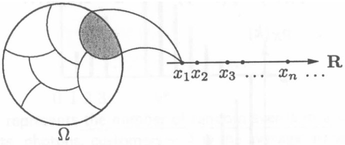
Τυχαίες μεταβλητές

- Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.) (random variable): Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο Ω. Οι τιμές της μπορεί να είναι πραγματικές ή μιγαδικές, συνεχείς ή διακριτές.
  - Παράδειγμα 1.1: $A =$ Αποτέλεσμα του αγώνα Ολυμπιακός - Παναθηναϊκός. $\Omega = \{1, 2, \mathrm{X}\}$. $A(\omega) = \omega$.
  - Παράδειγμα 1.2: $B = 1$ αν νικήσει κάποιος, αλλιώς 0. $\Omega = \{1, 2, \mathrm{X}\}$. $B(\omega) = 1$ όταν $\omega =$ '1' ή '2', $B(\text{'X'}) = 0$.
  - Παράδειγμα 1.3: $C =$ Θερμοκρασία στην Πάτρα. $\Omega =?$ $C(\omega) =?$

Διακριτές τ.μ.



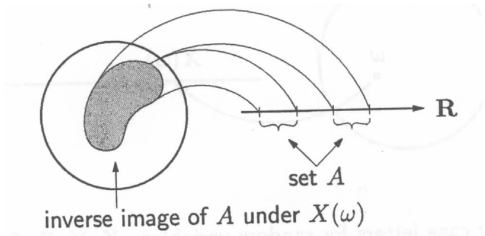
Αντιστοίχιση στοιχείων του Ω στο $\mathbb{R}$ από την τ.μ. Σχήμα από J. Proakis & M. Salehi



Γενικότερα, η $X(\omega)$ χωρίζει το Ω σε σύνολα $\{\omega : X(\omega) = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots$

Σχήμα από A. El Gamal, *Introduction to Statistical Signal Processing*, Lecture Notes, Stanford University 2009.

Συνεχείς τ.μ.



Για συνεχείς τ.μ. πρέπει να γενικεύσουμε.

$\Pr\{X \in A\} = \Pr(\{\omega : X(\omega) \in A\})$, για κάθε σύνολο Borel $A \subset \mathbb{R}$.

Σχήμα από A. El Gamal, *Introduction to Statistical Signal Processing*, Lecture Notes, Stanford University 2009.

Τυχαίες μεταβλητές (2)

- Γενικά, η περίπτωση συνεχών δειγματικών χώρων και τ.μ. είναι πιο δύσκολη στο χειρισμό της απ΄ ό,τι η διακριτή. Στη συνέχεια θα θυσιάσουμε τη μαθηματική αυστηρότητα και δε θα αναφερθούμε σε λεπτομέρειες (sigma algebras, Borel fields κτλ.) για να εστιάσουμε στο αντικείμενο του μαθήματος.
- Από αυστηρώς μαθηματική σκοπιά, μια τ.μ. μπορεί να παίρνει μόνο πραγματικές τιμές (δηλαδή $X : \Omega \to \mathbb{R}$). Εμείς θα θεωρούμε και μιγαδικές τ.μ. (οι οποίες είναι, στην ουσία, ζεύγη πραγματικών τ.μ. ορισμένες στον ίδιο δειγματικό χώρο), καθώς και τυχαία διανύσματα (στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ ή του $\mathbb{C}^n$ – $n-$άδες ή $2n-$άδες τ.μ., αντίστοιχα).
- Επίσης, θα επιτρέπουμε μη αριθμητικές τιμές (π.χ. Παράδειγμα 1.1) παρόλο που ούτε αυτό είναι σωστό από τη μαθηματική σκοπιά, γιατί το πρόβλημα λύνεται εύκολα με μια αντιστοιχιση 1-προς-1 στο $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα, στο Παράδειγμα 1.1, θα μπορούσαμε να αντιστοιχίσουμε την τιμή 3 στο ενδεχόμενο ‘Χ’)

Τυχαίες μεταβλητές (3)

- Για να είναι μία συνάρτηση τυχαία μεταβλητή πρέπει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
$$A_x \triangleq \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F},$$
δηλαδή το σύνολο A_x να είναι ενδεχόμενο.
- Μπορούμε να φανταστούμε το κάθε στοιχείο ω του Ω ως ένα αποτέλεσμα πειράματος που εκτελεί η φύση και στο οποίο δεν έχουμε πλήρη (ή, σε κάποιες περιπτώσεις, καθόλου) έλεγχο. Εμείς βλέπουμε μόνο το αποτέλεσμα και, μάλιστα, όχι το ίδιο το ω, αλλά μια εικόνα του $X(\omega)$ μέσω της απεικόνισης (τ.μ.) X.
- Πολλές φορές ενδέχεται να μη γνωρίζουμε ούτε την ίδια την απεικόνιση (τ.μ.) X.
- Για μια ενδιαφέρουσα συζήτηση δείτε το βιβλίο του Γ. Μουστακίδη, *Βασικές Τεχνικές Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων*, Εκδ. Τζιόλα 2004.

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

- Οι διακριτές τ.μ. περιγράφονται με χρήση της *συνάρτησης μάζας πιθανότητας* (σ.μ.π.) $p_X(x) = \Pr\{X = x\}$ (probability mass function - pmf).
- $\sum_{a \in \Omega} p_X(a) = 1$.
- $F_X(x) = \Pr\{X \leq x\} = \sum_{a: a \leq x} p_X(a)$. *Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας* (cumulative distribution function - cdf).
  - Παράδειγμα 1.4: (ΟΣΦΠ-ΠΑΟ): $p_A(A = \text{`1'}) = 1$, $p_A(A = \text{`X'}) = p_A(A = \text{`2'}) = 0$. $p_B(B = 1) = 1$, $p_B(B = 0) = 0$.
- Η cdf είναι αύξουσα συνάρτηση του x: $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ για $x_1 < x_2$. Επίσης, ισχύει $F_X(-\infty) = 0$ και $F_X(+\infty) = 1$.
- Τόσο η pmf όσο και η cdf ορίζουν μονοσήμαντα μία κατανομή και αποτελούν *πλήρη* περιγραφή της. Δηλαδή, αν διαθέτουμε μία από αυτές, γνωρίζουμε την τ.μ.
- Παρατηρήστε ότι τόσο η pmf όσο και η cdf είναι *ντετερμινιστικές* συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν μία τυχαία συνάρτηση (την τ.μ.).

Σημαντικές διακριτές τ.μ.

- Bernoulli ($X \sim$ Bern(p))
  - Το αποτέλεσμα ενός δυαδικού πειράματος με πιθανότητα επιτυχίας (ή αποτυχίας) p (για παράδειγμα, ρίψη κέρματος).
  - $p_X(x) = \begin{cases} p & \text{όταν} \quad x = 1 \\ 1 - p & \text{όταν} \quad x = 0 \end{cases}$
- Διωνυμική (Binomial) ($X \sim$ Binom(n, p))
  - Ο αριθμός των επιτυχιών μετά από n *ανεξάρτητα* πειράματα Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας (ή αποτυχίας) p.
  - $p_X(k) = \Pr\{k \text{ επιτυχίες}\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n.$
  - Προφανώς, η p.m.f. εξαρτάται από το συνολικό αριθμό πειραμάτων, n.

Σημαντικές διακριτές τ.μ. (2)

- Γεωμετρική (Geometric) ($X \sim \text{Geom}(p)$)
  - Ο αριθμός *ανεξάρτητων* πειραμάτων Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p μέχρι την πρώτη επιτυχία.
  - $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \ldots$
  - Εναλλακτικά, ο αριθμός των αποτυχιών έως ότου πετύχουμε: $p_X(k) = (1-p)^k p$, $k = 0, 1, \ldots$
- Poisson ($X \sim \text{Poisson}(\lambda)$)
  - Ο αριθμός *ανεξάρτητων* συμβάντων στη μονάδα του χρόνου όταν ο ρυθμός εμφάνισης των συμβάντων ισούται με λ.
  - $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.
  - Αποδεικνύεται ότι η κατανομή Poisson είναι το όριο της διωνυμικής όταν $p = \frac{\lambda}{n}$ και $n \to \infty$.

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

- Οι συνεχείς τ.μ. περιγράφονται με χρήση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) (probability density function - pdf) $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$.
  - Η $f_X(x)$ δεν υπάρχει πάντα. Στις περιπτώσεις που θα θεωρήσουμε εμείς, η $f_X(x)$ υπάρχει.
  - $\int_{x\in X(\Omega)} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.
  - $\Pr\{X \in \mathcal{S}\} = \int_{\mathcal{S}} f_X(x)dx$. Για παράδειγμα, $\Pr\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$.
  - $f_X(x) \geq 0$, αλλά όχι, απαραίτητα, ≤ 1.
    - Παράδειγμα 1.5: Ομοιόμορφη (uniform) κατανομή στο $[0, 0.1]$: $f_X(x) = 10, x \in [0, 0.1]$ και $f_X(x) = 0, x \notin [0, 0.1]$.

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (2)

- Η $f_X(x)$ δεν είναι πιθανότητα, είναι *πυκνότητα* πιθανότητας. Αντίθετα, η $p_X(x)$ είναι πιθανότητα.
- Για αμιγώς συνεχείς τ.μ., $\Pr\{X = x_0\} = 0$ για όλα τα x_0.
- Εναλλακτικά, αντί για pmf, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει pdf με συναρτήσεις Dirac $f_X(x) = \sum_{a \in \Omega} p_x(a)\delta(x - a)$ (αν και, συνήθως, οι Μαθηματικοί το αποφεύγουν).

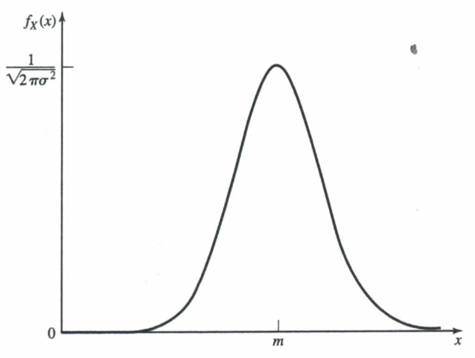
Κανονική (Γκαουσιανή) Κατανομή

Γκαουσιανή κατανομή

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2).$$

- Μία πολύ σημαντική συνεχής τ.μ. Θα τη χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον στα επόμενα. Η χρήση της δικαιολογείται από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem): Το άθροισμα N ανεξάρτητων και ομοίως κατανεμημένων (i.i.d.) τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη μέση τιμή και πεπερασμένη διασπορά τείνει στην Γκαουσιανή κατανομή για $N \to \infty$ ανεξάρτητα από την κατανομή τους.
- Μάλιστα, συνήθως η προσέγγιση αθροίσματος i.i.d. ως Γκαουσιανή τ.μ. είναι πολύ ικανοποιητική ακόμη και για μικρές τιμές του N.
- Η Γκαουσιανή κατανομή, μεταξύ άλλων, μοντελοποιεί πολύ καλά το θερμικό θόρυβο στα ηλεκτρονικά κυκλώματα (περισσότερα σύντομα).

Κανονική (Γκαουσιανή) Κατανομή

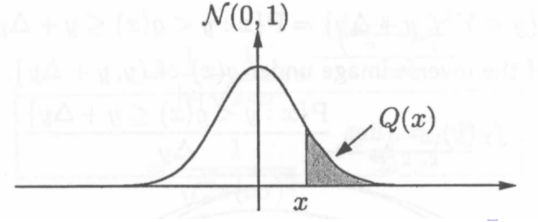


Σχήμα από J. Proakis & M. Salehi.

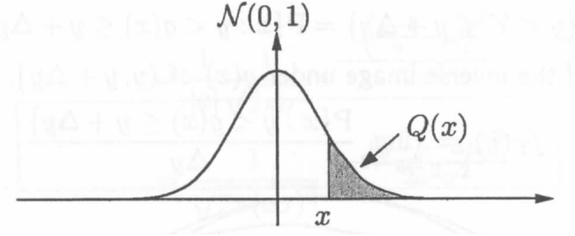
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2).$$

Η συνάρτηση Q

- Θεωρούμε την Γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0,1)$ η οποία ονομάζεται τυποποιημένη (standard).
- Ορίζουμε $Q(x) \triangleq 1 - F_X(x) = \Pr\{X > x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{a^2}{2}} da = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ (erfc είναι η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος (complementary error function)).
- Δηλαδή, η $Q()$ δίνει το εμβαδόν της "ουράς" της Γκαουσιανής καμπύλης.



Η συνάρτηση Q (2)



- Εάν $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\Pr\{X > x\} = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$.
- Η συνάρτηση $Q()$ δεν έχει αναλυτική έκφραση. Για μεγάλες τιμές του x προσεγγίζεται πολύ καλά από την $\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Όπως θα δούμε, χρησιμεύει στον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος εκτίμησης συμβόλου ή/και bit στα Ψηφιακά Συστήματα.

Άλλες σημαντικές συνεχείς τ.μ.

- Ομοιόμορφη στο διάστημα $[a, b]$ (Uniform) ($X \sim \text{Unif}[a, b]$)
  - $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{για } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$
- Εκθετική (Exponential) ($X \sim \text{Exp}(\lambda)$)
  - $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{για } x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Σημαντικές Ποσότητες

- (Στοχαστικός) Μέσος όρος ή μέση τιμή τ.μ. (stochastic mean value or expectation)
  $\mathbb{E}_p[X] = \sum_{x\in\Omega} xp_X(x)$ για διακριτές τ.μ.,
  $\mathbb{E}_f[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$ για συνεχείς.
- Μέση τιμή συνάρτησης $g(\cdot)$ τ.μ.
  $\mathbb{E}_f[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$.
  Αντίστοιχα για διακριτές τ.μ.
- Διασπορά τ.μ. (variance)
  $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.
  Για μιγαδικές τ.μ. $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[|(X - \mathbb{E}[X])|^2] = \mathbb{E}[XX^*] - (\mathbb{E}[X])(\mathbb{E}[X])^*$.

Σημαντικές Ποσότητες (2)

- Η μέση τιμή και η διασπορά δε μας δίνουν όλη την πληροφορία για μία τ.μ. Για παράδειγμα, παρατηρήστε ότι εντελώς διαφορετικές κατανομές μπορεί να έχουν την ίδια μέση τιμή.
- Χαρακτηριστική Συνάρτηση (Characteristic Function) $\Phi_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx$.
- Αντίθετα, η χαρακτηριστική συνάρτηση ορίζει πλήρως μία κατανομή.

Πολλές τυχαίες μεταβλητές και δεσμευμένες κατανομές

Πολλές τυχαίες μεταβλητές

- Θεωρούμε, τώρα, περισσότερες από μία τ.μ., οι οποίες ορίζονται στον *ίδιο* δειγματικό χώρο Ω.
- Για παράδειγμα, η θερμοκρασία και η υγρασία στην Πάτρα.
- Από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (joint cdf) δύο (συνεχών) τ.μ.:
$F_{X,Y}(x,y) = \Pr\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(a,b)dadb.$
- $f_{X,Y}(x,y)$: Από κοινού σ.π.π. (joint pdf).
- Περιθώρια σ.π.π. (marginal pdf): $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy.$

Ανεξαρτησία δύο τ.μ.

- Δύο τ.μ. είναι (στατιστικώς) ανεξάρτητες ((statistically) independent) όταν για οποιαδήποτε διαστήματα I και J, $\Pr\{X \in I \cap Y \in J\} = \Pr\{X \in I\} \Pr\{Y \in J\}$. Ισοδύναμα, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ ή $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$.
- Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε από κοινού και περιθώριες συναρτήσεις και την έννοια της ανεξαρτησίας για διακριτές τ.μ.

Συσχέτιση δύο τ.μ.

- Ορίζουμε τη *συνδιασπορά* (covariance) δύο τ.μ. ως

$$\mathrm{Cov}[X,Y] \triangleq \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])\,(Y-\mathbb{E}[Y])^*\right] \overset{(a)}{=} \mathbb{E}[XY^*]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y^*].$$

  (a): Αποδείξτε το για εξάσκηση για συνεχείς και για διακριτές τ.μ.

- Μερικές φορές η συνδιασπορά ονομάζεται και συσχέτιση (correlation). Ωστόσο, συνήθως η συσχέτιση ορίζεται ως $\mathbb{E}[XY^*]$. Αυτόν τον ορισμό θα χρησιμοποιήσουμε και εμείς.
  - Για τ.μ. μηδενικής μέσης τιμής ($\mathbb{E}[X]=0$ ή $\mathbb{E}[Y]=0$), $\mathrm{Cov}[X,Y]=\mathbb{E}[XY^*]$.

Ασυσχέτιστες τ.μ.

- Δύο *πραγματικές* τ.μ. καλούνται *ασυσχέτιστες* (uncorrelated) όταν

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

- Αν δύο τ.μ. είναι ανεξάρτητες (independent) είναι και ασυσχέτιστες.

$$\mathbb{E}[XY] = \int\int x \cdot y \cdot p_{XY}(x, y) dxdy = \int\int x \cdot y \cdot p_X(x) \cdot p_Y(y) dxdy$$
$$= \int x \cdot p_X(x) dx \int y \cdot p_Y(y) dy = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X].$$

- Αντίθετα, ασυσχέτιστες τ.μ. δεν είναι, απαραίτητα, ανεξάρτητες. Ωστόσο, εάν οι τ.μ. είναι Γκαουσιανές και ασυσχέτιστες, τότε είναι και ανεξάρτητες (θα δούμε την απόδειξη για τη γενικότερη περίπτωση από κοινού Γκαουσιανών τ.μ. σύντομα).

Περισσότερες από δύο τ.μ. (τυχαία διανύσματα) – Μέση τιμή

- Για περισσότερες τ.μ., αν τις χειριστούμε ως ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \triangleq [X_1, X_2, \ldots, X_n]$, στην περίπτωση συνεχών τ.μ.,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbf{X}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} [x_1, x_2, \ldots, x_n] f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \ldots, \right. \\
&\quad \left. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_n f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \right] \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1) dx_1, \ldots, \int_{-\infty}^{\infty} x_n f_{X_n}(x_n) dx_n \right] \\
&= [\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2], \cdots, \mathbb{E}[X_n]] .
\end{aligned}
$$

Περισσότερες από δύο τ.μ. (τυχαία διανύσματα) – Πίνακας Συνδιασποράς

- Ο πίνακας συνδιασποράς (Covariance matrix) της $n-$άδας τ.μ. (του τυχαίου διανύσματος) $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ορίζεται ως

$$\Sigma \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}, \text{όπου } \sigma_{ij} = \mathrm{Cov}[X_i, Y_j].$$

- Αποδεικνύεται ότι ο πίνακας συνδιασποράς, Σ, είναι πάντοτε θετικώς ορισμένος (positive definite). Δηλαδή, για οποιοδήποτε διάνυσμα (-στήλη) $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ με $|\mathbf{x}| \neq 0$, $\mathbf{x}^H \Sigma \mathbf{x} > 0$ ($\mathbf{x}^H$ είναι το ανάστροφο συζυγές διάνυσμα (-γραμμή) του $\mathbf{x}$).
- Ισοδύναμα, $|\Sigma| = \det(\Sigma) > 0$ (μερικές φορές γράφουμε και $\Sigma \succ 0$).

Παράδειγμα 1.6 – Από κοινού Γκαουσιανές τ.μ.

- Ένα σύνολο πραγματικών τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι από κοινού Γκαουσιανές (jointly Gaussian) εάν η από κοινού σ.π.π. τους ισούται με

$$f_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{m})},$$

όπου $\mathbf{m} \triangleq \mathbb{E}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ και Σ είναι ο πίνακας συνδιασποράς (Covariance matrix) της $n-$άδας τ.μ. (του τυχαίου διανύσματος) $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

- $\mathbf{x}^T$ είναι το ανάστροφο διάνυσμα (transpose) του $\mathbf{x}$, Σ^{-1} είναι ο αντίστροφος πίνακας (inverse matrix) του (τετραγωνικού) πίνακα Σ.
- Για τις n τ.μ. (το τυχαίο διάνυσμα) $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ γράφουμε $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$.

Παράδειγμα 1.6 – Από κοινού Γκαουσιανές τ.μ. (2)

$$f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})},$$

- Παρατηρήστε ότι, για να βρούμε τη σ.π.π. των από κοινού Γκαουσιανών τ.μ. αρκεί να γνωρίζουμε (μόνο) τις τιμές του μέσου όρου, $\mathbf{m}$, και του πίνακα συνδιασποράς, Σ.
- Επομένως, στην (ειδική) περίπτωση που ένα σύνολο τ.μ. είναι από κοινού Γκαουσιανές, ο μέσος όρος και ο πίνακας συνδιασποράς τους αρκούν για την πλήρη περιγραφή τους (ενώ, στη γενική περίπτωση, χρειαζόμαστε την $f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπως, άλλωστε και στην περίπτωση μίας τ.μ.).

Παράδειγμα 1.6 – Από κοινού Γκαουσιανές τ.μ. (3)

- Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
- Θεωρούμε ότι όλες οι τ.μ. είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους, δηλαδή Cov$[X_k, X_l] = 0$ για $k \neq l$ (παρατηρήστε ότι πρέπει Cov$[X_k, X_k] = \mathbb{E}[X_k^2] > 0$, αλλιώς η τ.μ. X_k δεν είναι τυχαία).
- Επομένως, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2)$, ένας διαγώνιος πίνακας.
- Αν οι τ.μ. είναι, επίσης, από κοινού Γκαουσιανές, αντικαθιστώντας στην από κοινού σ.π.π. προκύπτει ότι

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n),$$

όπου $f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}}$ (δείξτε το ως άσκηση).
- Η παραπάνω σχέση ισχύει και για οποιοδήποτε υποσύνολο των $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Επομένως, αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ασυσχέτιστες και από κοινού Γκαουσιανές, είναι και ανεξάρτητες.
- Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ιδιότητα όταν μιλήσουμε για τη λευκή Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία.

Άθροισμα από κοινού Γκαουσιανών τ.μ.

- Έστω n από κοινού Γκαουσιανές τ.μ. (όχι, απαραίτητα, ανεξάρτητες): $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$.
- Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των τ.μ. με βάρη, $Z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$, ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i \text{ και}$$

$$\text{Var}[Z] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}.$$

- Για την απόδειξη, δείτε π.χ. Leon-García, *Probability and Random Processes for Electrical Engineers*.
- Η ιδιότητα αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική στις Επικοινωνίες. Από την ιδιότητα προκύπτει ότι αν η είσοδος σε ένα Γραμμικό Χρονικώς Αμετάβλητο σύστημα είναι Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία, τότε και η έξοδος θα είναι Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία.

Δεσμευμένες Πιθανότητες και Κανόνας του Bayes

- Δεσμευμένη σ.π.π (conditional pdf): $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$ για τις τιμές του y όπου $f_Y(y) \neq 0$.
- Θεώρημα ολικής πιθανότητας:
  $p(y) = \sum_{x\in\Omega_x} p_{XY}(x,y) = \sum_{x\in\Omega_x} p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$.
  $f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$.
- Κανόνας Bayes: $f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$.
- Θεώρημα Bayes: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_X(x)f_{Y|X}(y|x)}{\int_{\Omega_x} f_X(x)f_{Y|X}(y|x)dx}$.
- Για διακριτές τ.μ.: $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_X(x)p_{Y|X}(y|x)}{\sum_{\Omega_x} p_X(x)p_{Y|X}(y|x)}$.

Βασικές έννοιες στοχαστικών διαδικασιών

1. Ψηφιακή Μετάδοση
2. Βασικές έννοιες στοχαστικών διαδικασιών και σημάτων και συστημάτων
   - Χώρος πιθανότητας και η έννοια της τυχαίας μεταβλητής
   - Πολλές τυχαίες μεταβλητές και δεσμευμένες κατανομές
   - Βασικές έννοιες στοχαστικών διαδικασιών
   - Συστήματα

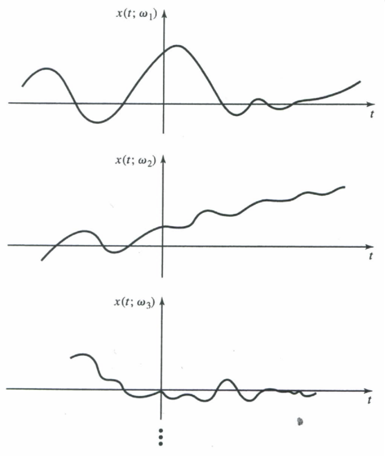
Στοχαστικές Διαδικασίες (Random Processes)

- Υπενθυμίζεται ότι ένας χώρος πιθανότητας (probability space) είναι μία τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, όπου Ω είναι το σύνολο των στοιχειωδών αποτελεσμάτων ενός πειράματος, $\mathcal{F}$ είναι το σύνολο των γεγονότων και P είναι μια απεικόνιση που αντιστοιχίζει πιθανότητες σε ενδεχόμενα.
- Μια τυχαία μεταβλητή X είναι μια απεικόνιση από το σύνολο Ω στο $\mathbb{R}$.
- Μια στοχαστική ανέλιξη/στοχαστική διαδικασία/τυχαία διαδικασία/τυχαία συνάρτηση (random process/stochastic process/random function) είναι μία απεικόνιση σε ένα σήμα (συνεχούς ή διακριτού χρόνου).
- Παρόλο που στις Επικοινωνίες ο δείκτης της στοχαστικής διαδικασίας είναι ο χρόνος, σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να είναι ο χώρος (π.χ. η θερμοκρασία κατά μήκος της Εθνικής Οδού σε μια δεδομένη χρονική στιγμή).

Στοχαστικές Διαδικασίες (2)

- Σημείωση: Θα περιοριστούμε, αρχικά, σε *πραγματικές* στοχαστικές διαδικασίες. Θα επεκτείνουμε τους ορισμούς αργότερα, όταν θα χρειαστούμε μιγαδικές στοχαστικές διαδικασίες.
- Έστω $X(t,\omega)$ (ή $\{X(t)\}$) μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου. Υπάρχουν δύο τρόποι να"δούμε" μια στοχαστική διαδικασία:
  1. Για δεδομένο ενδεχόμενο $\omega_0 \in \Omega$, η $X(t,\omega_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου t (ένα ντετερμινιστικό σήμα). Λέμε ότι η $X(t,\omega_0)$ είναι μία συνάρτηση-δείγμα (sample path/realization/trajectory/sample function). Η στοχαστική διαδικασία αποτελείται από το σύνολο (ensemble) των συναρτήσεων-δειγμάτων.
  2. Για δεδομένη χρονική στιγμή, t_0, η $X(t_0,\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι (βαθμωτή – scalar) τ.μ.
  - Επομένως, μπορούμε να δούμε μια στοχαστική διαδικασία ως μια "τ.μ." της οποίας η τιμή αντί για μια βαθμωτή ποσότητα (ένας αριθμός) είναι ένα σήμα (στη γενική περίπτωση με άπειρες τιμές) ή ως ένα σήμα η τιμή του οποίου σε κάθε χρονική στιγμή είναι μία τ.μ.

Στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου ως σύνολο ντετερμινιστικών συναρτήσεων-δειγμάτων



Σχήμα από J. Proakis & M. Salehi

Στοχαστικές Διαδικασίες Διακριτού Χρόνου

- Στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου $\{X_k\}$: Ένα σύνολο (ensemble) από ακολουθίες (συναρτήσεις-δείγματα διακριτού χρόνου), σε κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί μία μάζα πιθανότητας $p(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.
- Γενικά, μπορούμε να σκεφτόμαστε τις στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου ως ακολουθίες τ.μ., αλλά απαιτείται προσοχή από τη μαθηματική σκοπιά, ειδικά όταν δεν είναι εργοδικές (περισσότερα για την εργοδικότητα σύντομα).
- Μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου είναι μια απεικόνιση $\mathbb{Z} \times \Omega \to \mathbb{R}$.
- Όπως και στην περίπτωση ντετερμινιστικών σημάτων, οι τιμές μιας στοχαστικής διαδικασίας μπορεί να είναι διακριτές (π.χ. αριθμός αυτοκινήτων που περνούν από τα διόδια ανά ώρα) ή συνεχείς (π.χ. η θερμοκρασία στην Πάτρα).

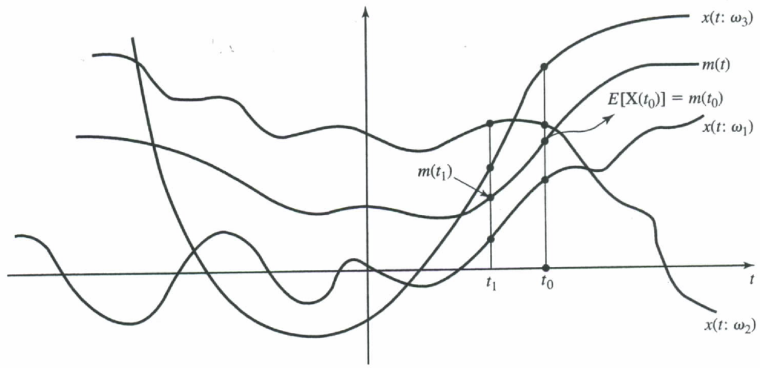
Στοχαστικές Διαδικασίες (3)

- Παρόλο που οι στοχαστικές διαδικασίες είναι τυχαίες, γνωρίζουμε, όπως και στην περίπτωση των τ.μ., κάποιες ιδιότητές τους.
- Αναλυτική περιγραφή (analytic description): με χρήση από κοινού σ.π.π. (ή σ.μ.π.). Για παράδειγμα, η πιθανότητα τα δείγματα X_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_k\}$ να ισούνται με $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ ισούται με $p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.
- Η αναλυτική περιγραφή μίας στοχαστικής διαδικασίας με χρήση από κοινού σ.π.π. ή σ.μ.π. αποτελεί μια *πλήρη* περιγραφή. Ωστόσο, η από κοινού σ.π.π. (σ.μ.π.) πρέπει να είναι διαθέσιμη για *οποιοδήποτε* πλήθος δειγμάτων, N, για *οποιοδήποτε* συνδυασμό $X(t_k)$ (X_k) και για *οποιεσδήποτε* χρονικές στιγμές. Στη γενική περίπτωση αυτό είναι πολύπλοκο ή ακόμη και αδύνατο.
- Παρατηρήστε ότι, εκτός από συναρτήσεις των τ.μ. $X(t_k)$ (X_k), οι σ.π.π. και σ.μ.π. είναι και συναρτήσεις των χρονικών στιγμών που αντιστοιχούν σε κάθε τ.μ.

Μέσος όρος

- Μέση τιμή (ensemble mean or average) στοχαστικής διαδικασίας (στοχαστικός μέσος όρος) τη χρονική στιγμή k (t_k): $m_k = \mathbb{E}[X_k]$, $m(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ (στη γενική περίπτωση εξαρτάται από τη χρονική στιγμή, k (t_k)).
  - $m_k = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x p_{X_k}(x)$.
  - $m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_k}(x) dx$.
  - Παρατηρήστε ότι η μέση τιμή υπολογίζεται ως προς τις διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει η στοχαστική διαδικασία μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, t_k (k).
  - Σε αναλογία με την περίπτωση των τ.μ. όπου χρησιμοποιούμε μια ντετερμινιστική ποσότητα (τη μέση τιμή) για να περιγράψουμε μία ιδιότητα τυχαίας συνάρτησης (της τ.μ.), έτσι και στην περίπτωση των στοχαστικών διαδικασιών χρησιμοποιούμε ένα ντετερμινιστικό σήμα (τη μέση τιμή $m(t)$ (m_k)).

Υπολογισμός μέσου όρου από τις συναρτήσεις-δείγματα



Σχήμα από J. Proakis & M. Salehi

Αυτοσυνδιασπορά και αυτοσυσχέτιση

- Αυτοσυνδιασπορά (autocovariance)

$$C_{XX}[k,l] = \mathbb{E}\left[\left(X_k - \mathbb{E}[X_k]\right)\left(X_l - \mathbb{E}[X_l]\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\left(X_k - m_k\right)\left(X_l - m_l\right)\right].$$
$$C_{XX}(t_k,t_l) = \mathbb{E}\left[\left(X(t_k) - \mathbb{E}[X(t_k)]\right)\left(X(t_l) - \mathbb{E}[X(t_l)]\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\left(X(t_k) - m(t_k)\right)\left(X(t_l) - m(t_l)\right)\right].$$

- Αυτοσυσχέτιση (autocorrelation)

$$R_{XX}[k,l] = \mathbb{E}\left[X_k X_l\right].$$
$$R_{XX}(t_k,t_l) = \mathbb{E}\left[X(t_k)X(t_l)\right].$$

- $C_{XX}[k,l] = R_{XX}[k,l] - m_k m_l,$
  $C_{XX}(t_k,t_l) = R_{XX}(t_k,t_l) - m(t_k)m(t_l).$

Αυτοσυνδιασπορά και αυτοσυσχέτιση (2)

- Η αυτοσυνδιασπορά (ή η αυτοσυσχέτιση για στοχαστικές διαδικασίες με $m_l = 0$ για όλα τα l), υποδηλώνει πόσο συσχετισμένο είναι το σήμα τη χρονική στιγμή k με το σήμα τη χρονική στιγμή l *κατά μέσο όρο*.
- $C_{XX}[k, l] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[X_k X_l\right] = m_k m_l$. Επομένως, όταν $C_{XX}[k, l] = 0$, οι τιμές της στοχαστικής διαδικασίας τις χρονικές στιγμές k και l είναι μεταξύ τους *ασυσχέτιστες* (uncorrelated).
- Παράδειγμα 1.7: Στοχαστική διαδικασία που περιγράφει διαδοχική ρίψη κέρματος (χωρίς μνήμη): Δύο οποιαδήποτε δείγματα είναι ανεξάρτητα και, επομένως, ασυσχέτιστα, ακόμα και εάν το κέρμα είναι μεροληπτικό (biased).
- Παράδειγμα 1.8: Στοχαστική διαδικασία που περιγράφει τη θερμοκρασία στην Πάτρα: Η αυτοσυσχέτιση είναι μη μηδενική.
- Τα ίδια ισχύουν και για στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου.

Αυτοσυνδιασπορά και αυτοσυσχέτιση (3)

- Η αυτοσυνδιασπορά (και η αυτοσυσχέτιση) είναι πολύ σημαντικές ποσότητες γιατί μας βοηθούν να υπολογίσουμε τη μέση ισχύ μίας μεγάλης κατηγορίας στοχαστικών σημάτων.
- Όταν χρησιμοποιούμε την αυτοσυνδιασπορά και την αυτοσυσχέτιση, στη γενική περίπτωση χάνουμε πληροφορία για τη στοχαστική διαδικασία. Για την πλήρη περιγραφή χρειαζόμαστε τις από κοινού σ.μ.π. (ή σ.π.π.).

Παράδειγμα 1.9 – Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία

- Η στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$ είναι Γκαουσιανή εάν οποιοδήποτε σύνολο δειγμάτων της είναι από κοινού Γκαουσιανές τ.μ.
  - Επομένως, η από κοινού σ.π.π. οποιοδήποτε συνόλου δειγμάτων της διαδικασίας $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ ισούται με

$$f_{X(t_1)X(t_2)\ldots X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})},$$

όπου $\mathbf{m} \triangleq \mathbb{E}[X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)]^T$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ και Σ είναι ο πίνακας συνδιασποράς (Covariance matrix) της $n-$άδας των τ.μ.

Παράδειγμα 1.9 – Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία (2)

- Αν οι τ.μ. είναι ασυσχέτιστες για οποιονδήποτε συνδυασμό δειγμάτων, η στοχαστική διαδικασία ονομάζεται Λευκή (white). Θα αναφερθούμε εκτενώς σε λευκές στοχαστικές διαδικασίες σύντομα.
- Ανάλογα ορίζονται και οι Γκαουσιανές στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου.

Συσχέτιση και ανεξαρτησία

- Όπως αναφέρθηκε, δύο χρονικές στιγμές, k και l μίας στοχαστικής διαδικασίας είναι ασυσχέτιστες εάν $C_{XX}[k, l] = 0$.
  - Για στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου, $C_{XX}(t_k, t_l) = 0$.
  - Όπως και στην περίπτωση δύο (ή περισσότερων) τ.μ., αυτό δε σημαίνει, απαραίτητα, ότι οι τιμές της στοχαστικής διαδικασίας τις χρονικές στιγμές k και l (t_k και t_l) είναι ανεξάρτητες.
  - Ωστόσο, στην ειδική περίπτωση Γκαουσιανών στοχαστικών διαδικασιών, έλλειψη συσχέτισης συνεπάγεται και ανεξαρτησία.

Στοχαστικές Διαδικασίες – Στασιμότητα

- Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου είναι *Στάσιμη κατά την Αυστηρή Έννοια* (Strict-Sense Stationary - SSS) όταν
  $f_{X(t_1)X(t_2)\ldots X(t_k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) =$
  $f_{X(t_1+t)X(t_2+t)\ldots X(t_k+t)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$
  για όλα τα k, όλα τα t και όλες τις k-άδες $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.
  - Όταν, δηλαδή, η από κοινού σ.π.π. οποιουδήποτε πεπερασμένου συνόλου δειγμάτων της εξαρτάται μόνο από τις αποστάσεις μεταξύ των δειγμάτων (από τις σχετικές τους θέσεις) και όχι από τις ακριβείς χρονικές στιγμές
  - Παρόμοια ορίζεται η SSS για στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου).
- Θεώρημα 1.1: Μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου είναι SSS εάν και μόνο εάν, για κάθε $l \in \mathbb{N}$, για *όλα* τα k και για οποιαδήποτε $n_1, \ldots, n_l$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{R}$, οι τ.μ. $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j X_{n_j}$ και $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j X_{n_j+k}$ ακολουθούν την ίδια κατανομή.

Στασιμότητα κατά την αυστηρή έννοια

- Στην ουσία, μία στοχαστική διαδικασία είναι στάσιμη όταν η στατιστική της συμπεριφορά δεν αλλάζει με το χρόνο.
- Προσοχή, αυτό δε σημαίνει ότι τα δείγματα $X(t_k)$ είναι ανεξάρτητα ή ασυσχέτιστα, αλλά ότι η συσχέτισή τους (και οποιαδήποτε άλλη στατιστική εξάρτησή τους) παραμένει η ίδια καθώς η στοχαστική διαδικασία εξελίσσεται στο χρόνο.
- Εάν μία στοχαστική διαδικασία είναι SSS:
  - Ο μέσος όρος της, $m(t) = \mathbb{E}[X(t)]$, δεν εξαρτάται από το χρόνο, t.
  - Η αυτοσυνδιασπορά $C_{XX}(t_k, t_l)$ ($C_{XX}[k, l]$) εξαρτάται μόνο από την απόσταση στο χρόνο $t_k - t_l$ ($k - l$) και όχι από τις ακριβείς τιμές των t_k και t_l (k και l).
  - Και οι δύο ιδιότητες μπορούν να αποδειχτούν εύκολα από τον ορισμό της στασιμότητας κατά την αυστηρή έννοια.

Στασιμότητα κατά την αυστηρή έννοια (2)

- Αν η σχέση $f_{X(t_1)X(t_2)\ldots X(t_k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f_{X(t_1+t)X(t_2+t)\ldots X(t_k+t)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ισχύει μόνο για πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων: $k \leq K$, η στοχαστική διαδικασία χαρακτηρίζεται από στασιμότητα κατά την αυστηρή έννοια τάξης K.

Στασιμότητα κατά την ευρεία έννοια

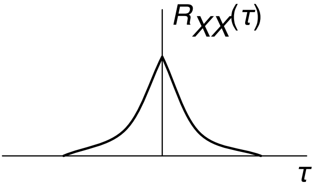
- Γενικά, η στασιμότητα κατά την αυστηρή έννοια είναι πολύ περιοριστική. Πολλές φορές, για τους δικούς μας σκοπούς, αρκεί μία στοχαστική διαδικασία να είναι στάσιμη κατά την ευρεία έννοια.
- Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου είναι *Στάσιμη κατά την Ευρεία Έννοια* (Wide-Sense Stationary - WSS) όταν
  - Οποιοδήποτε δείγμα της στο χρόνο έχει πεπερασμένη διασπορά: $\text{Var}[X(t)] < \infty \ \forall t$.
  - $m(t) = m$ (σταθερή) και
  - $R_{XX}(t_k, t_l) = R(t_k - t_l)$ (εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων) (Ισοδύναμα, $C_{XX}(t_k, t_l) = C(t_k - t_l)$).

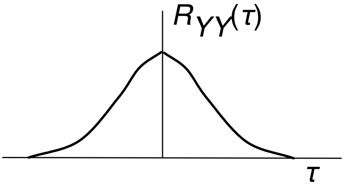
Στασιμότητα κατά την ευρεία έννοια (2)

- Θεώρημα 1.2: WSS $\Rightarrow$ Var$[X(t)] = \sigma^2$ (σταθερή)
- Θεώρημα 1.3: SSS & Var$[X(t)] < \infty \; \forall t \; \Rightarrow$ WSS.
- Θεώρημα 1.4: WSS + Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία $\Rightarrow$ SSS, αφού ο μέσος όρος και η αυτοσυνδιασπορά αρκούν για την πλήρη περιγραφή της.

- Παρόμοιος είναι ο ορισμός για στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου.

Φυσική Σημασία της αυτοσυνδιασποράς/αυτοσυσχέτισης





- Εάν η $R_{XX}(\tau)$ είναι στενή, τα δείγματα της $\{X(t)\}$ αποσυσχετίζονται γρήγορα καθώς μεγαλώνει η μεταξύ τους απόσταση.
- Η $R_{XX}(\tau)$ σχετίζεται με το ρυθμό μεταβολής της $\{X(t)\}$ και, επομένως, και με το "φάσμα" της $\{X(t)\}$.
- Θα δούμε ότι αυτή η ερμηνεία δεν είναι μόνο διαισθητική. Ο μετασχηματισμός Fourier της αυτοσυσχέτισης είναι η πυκνότητα της μέσης ισχύος της $\{X(t)\}$ στη συχνότητα.

Αυτοσυνδιασπορά στάσιμων στοχαστικών διαδικασιών

- Έστω *πραγματική* στοχαστική διαδικασία WSS διακριτού χρόνου, $\{X_n\}$.
- Η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς $C_{XX} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ισούται με

$$C_{XX}[k] \triangleq C_{XX}[X_{n+k}, X_n], \; k \in \mathbb{Z}.$$

- Λόγω της στασιμότητας, η $C_{XX}[k]$ δεν εξαρτάται από το n.
- Επίσης, $C_{XX}[k] = \mathbb{E}[X_{n+k} \cdot X_n] - m^2 = R_{XX}[k] - m^2$.
- Παρόμοιες παρατηρήσεις και συμπεράσματα ισχύουν και για στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου. Δηλαδή, $C_{XX}(\tau) = C_{XX}(t+\tau, t) = R_{XX}(\tau) - m^2$.

Αυτοσυνδιασπορά στάσιμων στοχαστικών διαδικασιών (2)

- Η αυτοσυνδιασπορά *πραγματικής* στοχαστικής διαδικασίας WSS διακριτού χρόνου είναι *θετικώς ορισμένη συνάρτηση* (positive definite function). Ως θετικώς ορισμένη συνάρτηση έχει τις εξής ιδιότητες:
  - Συμμετρία (αρτιότητα): $C_{XX}[-k] = C_{XX}[k],\ \forall k \in \mathbb{Z}$.
  - Για κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \alpha_l C_{XX}[k-l] \geq 0$.
- Θεώρημα 1.5: Αντίστροφα, αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση $C_{XX} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τα παραπάνω, υπάρχει πραγματική στοχαστική διαδικασία WSS διακριτού χρόνου η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς της οποίας είναι η $C_{XX}[k]$.
  - Δε θα υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες, γιατί αυτό ξεφεύγει από τους στόχους του μαθήματος.
- Παρόμοιες παρατηρήσεις και συμπεράσματα ισχύουν και για στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου.

Αυτοσυνδιασπορά στάσιμων στοχαστικών διαδικασιών (3)

- Άλλες ιδιότητες της αυτοσυσχέτισης
  - $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0) = \mathbb{E}[X^2(t)]$ (η μέση ισχύς της $\{X(t)\}$.
  - Εάν $R_{XX}(T_0) = R_{XX}(0)$ για κάποιο $T_0 \neq 0$, η $R_{XX}(\tau)$ είναι περιοδική με περίοδο T_0. Επίσης, η $\{X(t)\}$ είναι περιοδική με πιθανότητα 1 (και περίοδο T_0).
- Για τις αποδείξεις δείτε π.χ. το βιβλίο των J. Proakis & M. Salehi.

Κυκλοστασιμότητα

- Έστω η στοχαστική διαδικασία με συναρτήσεις-δείγματα της μορφής $A\cos(2\pi f_c t + \theta)$ όπου f_c και θ σταθερές (ντετερμινιστικές) ποσότητες και $A \sim$ Unif$[-1, 1]$.
- Παρατηρούμε ότι τόσο η μέση τιμή όσο και η αυτοσυνδιασπορά είναι περιοδικές ως προς t με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_c}$. Δηλαδή,

$$m_X(t + T_0) = m_X(t) \text{ και}$$
$$R_{XX}(t + \tau + T_0, t + T_0) = R_{XX}(t + \tau, t)$$

για όλα τα t και τ.

- Οι στοχαστικές διαδικασίες που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες ονομάζονται *κυκλοστάσιμες* (cyclostationary).
- Γενικά, οι κυκλοστάσιμες τυχαίες διαδικασίες δεν είναι στάσιμες.

Εργοδικότητα

- Θεωρούμε μία στοχαστική διαδικασία WSS (έστω διακριτού χρόνου, αν και δεν αλλάζει κάτι αν η στοχαστική διαδικασία είναι συνεχούς χρόνου).
- Η μέση τιμή της στοχαστικής διαδικασίας δεν εξαρτάται από τη χρονική στιγμή, k: $m_k = m \; \forall k$.
- Η μέση τιμή m_k ισούται με το στοχαστικό μέσο όρο των τιμών της στοχαστικής διαδικασίας, X_k, τη χρονική στιγμή k: $m_k = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x p_{X_k}(x)$.
- Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: Δεδομένου ότι η μέση τιμή είναι ανεξάρτητη του χρόνου, k, για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς (και για να μη χρειαζόμαστε πολλές συναρτήσεις-δείγματα) μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή χρησιμοποιώντας μόνο μια συνάρτηση-δείγμα $X[k, \omega_0]$ ως

$$\bar{m} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{+n} X[k, \omega_0];$$

Εργοδικότητα (2)

$$\bar{m} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{+n} X[k, \omega_0].$$

- Παρατηρήστε ότι εδώ παίρνουμε το μέσο όρο ως προς το χρόνο για μία συγκεκριμένη συνάρτηση-δείγμα $X[k, \omega_0]$ (time average) αντί για το μέσο όρο ως προς τις συναρτήσεις-δείγματα για συγκεκριμένη χρονική στιγμή (ensemble average).
- Υπάρχουν στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες WSS για τις οποίες $m \neq \bar{m}$.

Εργοδικότητα (3)

- Έστω, για παράδειγμα, η στοχαστική διαδικασία $\{X_k\} = 1\ \forall k$ με πιθανότητα $1/3$ και $\{X_k\} = -1\ \forall k$ με πιθανότητα $2/3$. Η διαδικασία είναι στάσιμη (και, μάλιστα, SSS) γιατί η συμπεριφορά της δεν αλλάζει στο χρόνο (εδώ έχουμε μια ακραία περίπτωση που δεν αλλάζει ούτε η τιμή της).
- $m = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Ωστόσο, η $\bar{m}$ εξαρτάται από τη συνάρτηση-δείγμα.

Εργοδικότητα (4)

- Η στοχαστική διαδικασία που περιγράψαμε έχει δύο διαφορετικούς "εμμένοντες" "τρόπους" (persistent modes) συμπεριφοράς. Αν αρχίσει να συμπεριφέρεται με κάποιον τρόπο παραμένει σε αυτόν, παρόλο που είναι στάσιμη.
- Οι στοχαστικές διαδικασίες WSS που *δε* χαρακτηρίζονται από τέτοιους εμμένοντες τρόπους (ισοδύναμα, έχουν μόνο έναν εμμένοντα τρόπο) ονομάζονται *εργοδικές* (ergodic).
- Για μια στοχαστική διαδικασία που είναι WSS και εργοδική ισχύει

$$\bar{m} = m.$$

Εργοδικότητα (5)

- Επομένως, η αυτοσυσχέτιση μιας εργοδικής στοχαστικής διαδικασίας WSS (πραγματικών τιμών) μπορεί να υπολογιστεί ως

$$R_{XX}(\tau) = \bar{R}_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau, \omega_0) X(t, \omega_0) dt,$$

όπου $X(t, \omega_0)$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση-δείγμα.

- Για εργοδική στοχαστική διαδικασία WSS διακριτού χρόνου,

$$R_{XX}[k] = \bar{R}_{XX}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n+k, \omega_0] X[n, \omega_0].$$

- Για τον αυστηρό ορισμό της εργοδικότητας, δείτε, για παράδειγμα, το Φυλλάδιο 1.

Εργοδικότητα διαδικασιών με δείγματα i.i.d.

- Τα δείγματα X_k μίας στοχαστικής διαδικασίας διακριτού χρόνου είναι ανεξάρτητα και ομοίως κατανεμημένα (independent and identically distributed - i.i.d.) όταν ακολουθούν την ίδια κατανομή και όταν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα.
- Οι στοχαστικές διαδικασίες με δείγματα i.i.d. είναι ειδική περίπτωση λευκών στοχαστικών διαδικασιών.
- Επειδή όλες οι X_k ακολουθούν την ίδια κατανομή, $m_k = m$.
- Λόγω της ανεξαρτησίας, $C_{XX}[k, l] = 0$ για $k \neq l$ και $C_{XX}[k, k] = \text{Var}[X_k] = \sigma^2$ για οποιοδήποτε k. Επομένως, $C_{XX}[k, l] = C_{XX}[k - l]$.
- Συνεπώς, στοχαστικές διαδικασίες με δείγματα i.i.d. είναι και SSS.
- Λόγω του ότι η κατανομή των X_k δεν εξαρτάται από τη χρονική στιγμή k και είναι η ίδια για κάθε δείγμα, οι στοχαστικές διαδικασίες με δείγματα i.i.d. είναι και εργοδικές.

Στάσιμες Στοχαστικές Διαδικασίες – Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

- Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου. Θα επανέλθουμε σε στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου όταν μιλήσουμε για δειγματοληψία και για το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT).
- Μια *στάσιμη* στοχαστική διαδικασία έχει άπειρη ενέργεια (γιατί;)
- Οπότε, στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε την ισχύ στοχαστικής διαδικασίας WSS συνεχούς χρόνου.

Στάσιμες Στοχαστικές Διαδικασίες – Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (2)

- Το ερώτημα που προκύπτει, τώρα, είναι πώς μπορούμε να περιγράψουμε την ισχύ μιας στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας.
- Θέλουμε μια περιγραφή που να είναι χρήσιμη και, επίσης, να ταιριάζει όσο το δυνατόν καλύτερα με τον τρόπο που χειριζόμαστε τα ντετερμινιστικά σήματα.
- Λόγω της τυχαιότητας μιας στοχαστικής διαδικασίας, δεν είναι δυνατόν να οριστεί μετασχηματισμός Fourier της στοχαστικής διαδικασίας (ακόμη και εάν είναι στάσιμη και εργοδική).
- Μπορούμε, βέβαια, να ορίσουμε μετασχηματισμό Fourier συναρτήσεων-δειγμάτων, καθώς και μέσους όρους των μετασχηματισμών Fourier συναρτήσεων-δειγμάτων.

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

- Για τη στατιστική περιγραφή στάσιμων στοχαστικών διαδικασιών στο πεδίο της συχνότητας χρησιμοποιείται η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (ή Φάσμα Ισχύος) (Power Spectral Density - PSD).
- Όπως θα δούμε, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει πόσο γρήγορα "απο-συσχετίζεται" ένα σήμα, σε αναλογία με το φάσμα ενός ντετερμινιστικού σήματος το οποίο περιγράφει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το σήμα.
- Επομένως, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει τη *μέση* κατανομή της ισχύος στο πεδίο της συχνότητας.

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (2)

- Θεωρούμε μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$ η οποία είναι WSS.
- Ας υποθέσουμε, για απλοποίηση και χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $m = 0$ (αν $m \neq 0$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αυτοσυνδιασπορά αντί για την αυτοσυσχέτιση).
- Ένας λογικός τρόπος για να βρούμε τη μέση ισχύ της στοχαστικής διαδικασίας είναι να υπολογίσουμε το μέσο όρο της πυκνότητας ισχύος σε κάθε συχνότητα, f, ως προς όλες τις συναρτήσεις-δείγματα (ensemble average) (δεδομένου ότι δεν έχουμε υποθέσει εργοδικότητα).
- Παρατηρήστε ότι δεν έχει ιδιαίτερο νόημα να υπολογίσουμε το μέσο όρο της ισχύος σε κάθε χρονική στιγμή, t, αφού, λόγω στασιμότητας, $\mathbb{E}[X^2(t)] = R_{XX}(0)$ για όλα τα t.

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (3)

- Επομένως, θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x})}\left[|X(f,\omega)|^2\right],$$

όπου $X(f,\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων-δειγμάτων, $X(t,\omega)$, της στοχαστικής διαδικασίας.

- Υποθέτουμε, εδώ, ότι ο $X(f,\omega)$ ορίζεται, αν και αυτό δεν ισχύει πάντοτε – στην περίπτωση που ο $X(f,\omega)$ δεν ορίζεται πρέπει να θεωρήσουμε τις $X_T(t,\omega) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) X(t,\omega)$ που είναι σήμα ενέργειας και να βρούμε το όριο $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x})}\left[|X_T(f,\omega)|^2\right]$ (δείτε, για παράδειγμα, J. Proakis & M. Salehi).

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (4)

- Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε (Θεώρημα Wiener-Khinchin),

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x})}\left[|X(f,\omega)|^2\right] \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x})}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}X(t,\omega)e^{-j2\pi ft}dt\right)^*\left(\int_{-\infty}^{+\infty}X(s,\omega)e^{-j2\pi fs}ds\right)\right] \\
&\overset{(a)}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x})}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X^*(t,\omega)X(t+\tau,\omega)e^{-j2\pi f\tau}d\tau dt\right] \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x})}\left[X^*(t,\omega)X(t+\tau,\omega)\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau dt \\
&\overset{(b)}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XX}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau dt \\
&\overset{S_{XX}(f)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XX}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XX}(f)dt = S_{XX}(f).
\end{aligned}$$

$(a)\ \tau \triangleq s-t$, (b) Η $\{X(t)\}$ είναι WSS.

- Για μια πιο αυστηρή απόδειξη, δείτε π.χ. J. Proakis & M. Salehi, Theorem 4.3.1.

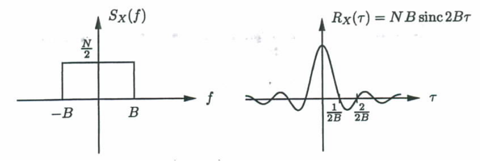
Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (5)

- Συνεπώς, η *μέση* ισχύς μιας στοχαστικής διαδικασίας WSS συνεχούς χρόνου δίνεται από τη φασματική πυκνότητα ισχύος ή φάσμα ισχύος (Power Spectral Density - PSD or Power Spectrum)

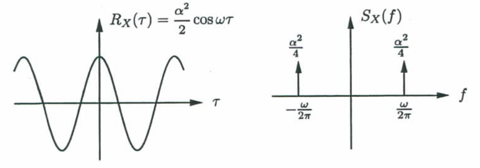
$$S_{XX}(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\}.$$

- Η $S_{XX}(f)$ είναι άρτια και πραγματική (ως μετασχηματισμός Fourier της άρτιας και πραγματικής $R_{XX}(\tau)$).
- Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, $\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)df = R_{XX}(0) = \mathbb{E}[|X(t)|^2]$.
- Αποδεικνύεται, επίσης, ότι $S_{XX}(f) \geq 0$. Διαισθητικά λογικό. Αν υπήρχε διάστημα στο οποίο $S_{XX}(f) < 0$, θα μπορούσαμε με χρήση φίλτρου να πάρουμε σήμα αρνητικής ενέργειας – περισσότερα για φιλτράρισμα στοχαστικών διαδικασιών σύντομα.

Παραδείγματα PSD



Τα δείγματα $X\left(t \pm \frac{n}{2B}\right)$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι ασυσχέτιστα.



Σχήμα από A. El Gamal, *Introduction to Statistical Signal Processing*, Lecture Notes, Stanford University 2009.

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (6)

- Εναλλακτικα, όταν $m \neq 0$, η φασματική πυκνότητα ισχύος στοχαστικής διαδικασίας WSS συνεχούς χρόνου μπορεί να οριστεί ως

$$S_{XX}(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} C_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \mathcal{F}\{C_{XX}(\tau)\}.$$

- Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, δεδομένου ότι η $\{X(t)\}$ είναι WSS,

$$\mathcal{F}\{C_{XX}(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\} - m^2 \delta(f).$$

- Επομένως, πρακτικά, δεν έχει ιδιαίτερη σημασία ποιον ορισμό χρησιμοποιούμε.
- Συνήθως, η PSD ορίζεται με χρήση της $R_{XX}(\tau)$. Αυτός είναι και ο ορισμός που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια του μαθήματος.

Συστήματα

Γραμμικά, Χρονικώς Αμετάβλητα Συστήματα

- Σύστημα S: Μια απεικόνιση της εισόδου του στην έξοδο: $y = s(x)$.
- Ένα σύστημα είναι γραμμικό όταν ισχύουν οι αρχές της ομοιογένειας και της υπέρθεσης: $s(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i s(x_i)$.
- Ένα σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο όταν έχει την ίδια έξοδο για μια δεδομένη είσοδο, ανεξαρτήτως με το πότε η είσοδος εφαρμόζεται στο σύστημα.
- Ένα γραμμικό χρονικώς αμετάβλητο σύστημα (Linear Time Invariant - LTI) μπορεί να περιγραφεί
  - Στο χρόνο με χρήση της κρουστικής απόκρισης (impulse response) h_i ($h(t)$).
  - Στη συχνότητα με χρήση της συνάρτησης μεταφοράς (transfer function) $H(z)$ ($H(s)$) και της απόκρισης συχνότητας (frequency response) $H(\theta)$ ($H(f)$).
- Πώς μπορούμε να περιγράψουμε ένα Γραμμικό, Χρονικώς Μεταβαλλόμενο σύστημα;

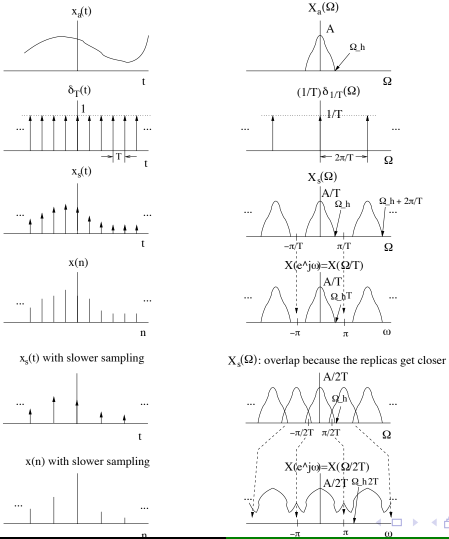
Θεώρημα Δειγματοληψίας Shannon/Nyquist

- Έστω συνεχές σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(f)$ το οποίο δειγματοληπτείται ομοιόμορφα με περίοδο δειγματοληψίας T.
- Ο μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x_k = x(kT)$ ισούται με

$$X(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\theta - k}{T}\right),$$

όπου $X_c(f)$ ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$.

Θεώρημα Δειγματοληψίας Shannon/Nyquist (2)

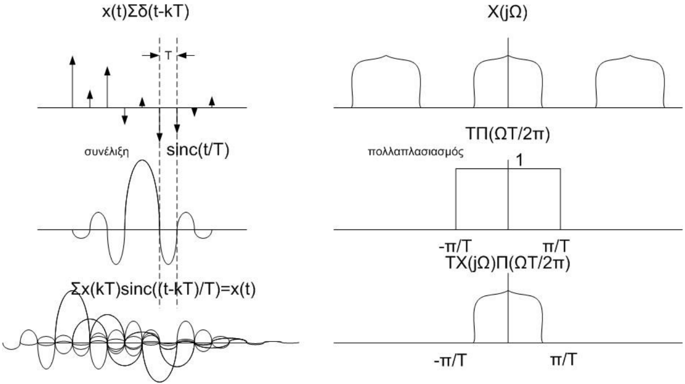


Θεώρημα Δειγματοληψίας Shannon/Nyquist (3)

- Επομένως, η ανακατασκευή ενός συνεχούς σήματος από τα δείγματά του είναι πάντοτε δυνατή εφόσον η δειγματοληψία γίνει με ρυθμό τουλάχιστον διπλάσιο της μεγαλύτερης συχνότητας του σήματος.
- Ικανή, αλλά όχι αναγκαία συνθήκη (γιατί;)
- Ανακατασκευή σήματος. Με χρήση επίπεδου ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου. Στο πεδίο του χρόνου:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin\left[\frac{\pi(t-kT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-kT)}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \mathrm{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right).$$

Θεώρημα Δειγματοληψίας Shannon/Nyquist (4)

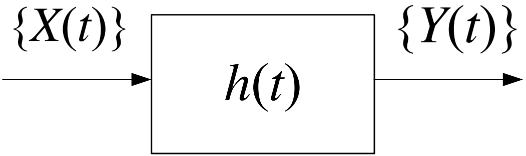


- Το ιδανικό φίλτρο είναι υλοποιήσιμο; Η sinc;

Θεώρημα Δειγματοληψίας Shannon/Nyquist (5)

- Για μία πιο λεπτομερή περιγραφή της δειγματοληψίας δείτε π.χ. ΕΕ789, Διάλεξη 12.

Συστήματα και Στοχαστικές Διαδικασίες



- Έστω μια στοχαστική ανέλιξη WSS $\{X(t)\}$ ($\{X_k\}$) η οποία διέρχεται από το Γραμμικό Χρονικώς Αμετάβλητο σύστημα (LTI) με κρουστική απόκριση $h(t)$ ($h[n]$). Μπορεί να αποδειχτεί (με πράξεις) ότι:
  - $m_Y = m_X H(0)$ ($m_Y = m_X H(z=1)$)
  - $R_{YY}(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_{XX}(\tau)$ ($R_{YY}(k) = h_k * h^*_{-k} * R_{XX}(k)$)
  - $S_{YY}(f) = S_{XX}(f)|H(f)|^2$ ($S_{YY}(\theta) = S_{XX}(\theta)|H(\theta)|^2$)
  - $S_{YY}(s) = S_{XX}(s)H(s)H^*(-s^*)$ ($S_{YY}(z) = S_{XX}(z)H(z)H^*(1/z^*)$).

Στοχαστικές Διαδικασίες και Δειγματοληψία

- Έστω μια στοχαστική ανέλιξη WSS συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$ η οποία δειγματοληπτείται ομοιόμορφα με περίοδο T: $Y_k = X(kT)$.
  - $R_{YY}(k,l) = \mathbb{E}[X(kT)\overline{X(lT)^*}] = R_{XX}((k-l)T)$.
    Άρα, η αυτοσυσχέτιση της ακολουθίας $\{Y_k\}$ προκύπτει από την αυτοσυσχέτιση της $\{X(t)\}$ με δειγματοληψία.
  - $S_{YY}(\theta) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{XX}(\frac{\theta-k}{T})$,
    παρόμοια με την περίπτωση ντετερμινιστικών σημάτων.
- Επομένως, η ανακατασκευή της συνεχούς στοχαστικής ανέλιξης γίνεται με χρήση βαθυπερατού φίλτρου (παλμών sinc). Ωστόσο, σε αντίθεση με τα ντετερμινιστικά σήματα, για την ανακατασκευασμένη στοχαστική ανέλιξη $\{\hat{Y}(t)\}$ ισχύει $\mathbb{E}[|\hat{Y}(t) - Y(t)|^2] = 0$ και όχι $\hat{Y}(t) = Y(t)$, δηλαδή υπάρχει περίπτωση οι $\hat{Y}(t)$ και $Y(t)$ να διαφέρουν σε ένα σύνολο τιμών του t με μηδενικό μέτρο Lebesgue. Για τους δικούς μας σκοπούς (ανάλυση και σχεδίαση Ψηφιακών Συστημάτων Επικοινωνιών) η συνθήκη $\mathbb{E}[|\hat{Y}(t) - Y(t)|^2] = 0$ είναι επαρκής.

Για περισσότερες λεπτομέρειες

- Σήματα, Συστήματα, Μετασχηματισμός Fourier.
    - A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals and Systems*.
    - Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης και Λ. Κοφίδης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων*.
- Πιθανότητες, Στοχαστικές διαδικασίες.
    - J. Proakis & M. Salehi *Communications Systems Engineering*.
    - A. Papoulis, *Probability, random variables, and stochastic processes*.
- Δείτε, επίσης, τα φυλλάδια του μαθήματος "Εισαγωγή στα Συστήματα Επικοινωνιών".