

# ΕΕ725

## Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

### 7η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

20 Απριλίου 2010

## Αντιστοιχία με βιβλιογραφία

- Cioffi: 2.1 – 2.3, 3.1
- Barry, Lee & Messerschmitt (3rd ed.): 5.1–5.2
- Proakis & Salehi, Communication Systems Engineering (2nd ed.): 2.5, 8.1.

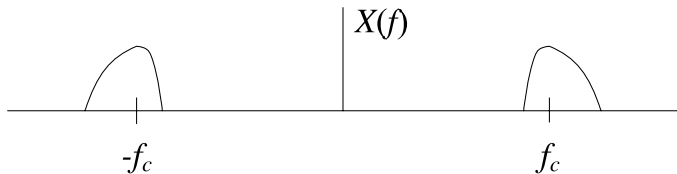
# Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- 1 Ζωνοπερατά (bandpass) σήματα και συστήματα
  - Αναλυτικό σήμα
  - Βαθυπερατό ισοδύναμο σήμα/σύστημα
  
- 2 Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή
  - Εισαγωγή
  - Διαδοχική χρήση καναλιού

## Ζωνοπερατά (bandpass) σήματα και συστήματα

**Ορισμός** Ζωνοπερατό (bandpass/narrowband) σήμα  $x(t)$ : Όταν η απόκριση συχνότητας  $X(f)$  είναι μη μηδενική σε μια μικρή περιοχή συχνοτήτων γύρω από μια φέρουσα συχνότητα (carrier frequency)  $f_c$ . Δηλαδή,  $X(f) = 0$  για  $|f - f_c| \geq W$ , με  $W < f_c$ .

**Ορισμός** Ζωνοπερατό σύστημα  $h(t)$ : Ένα σύστημα που έχει μη μηδενική απόκριση συχνότητας  $H(f)$  σε μια μικρή περιοχή συχνοτήτων γύρω από μια φέρουσα συχνότητα, δηλαδή δεν αφήνει να "περάσουν" συχνότητες εκτός της περιοχής  $|f - f_c| < W$ .

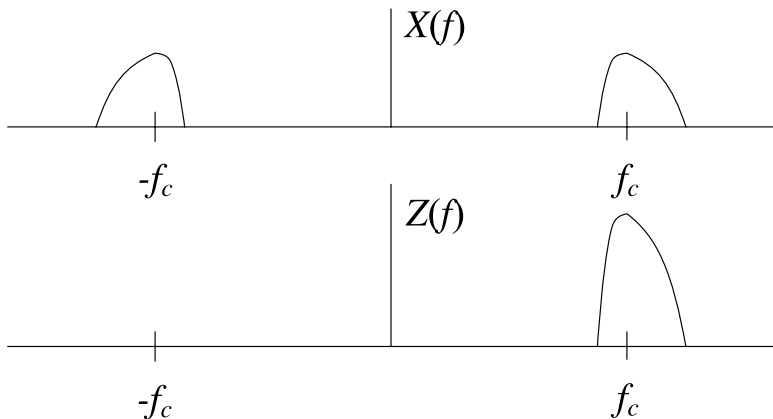


# Αναλυτικό σήμα και μετασχηματισμός Hilbert

**Ορισμός** Το αναλυτικό σήμα (analytic signal)  $z(t)$  ορίζεται ως  $Z(f) \triangleq 2u(f)X(f)$  όπου  $u(f) = 0$  για  $f < 0$ , και  $u(f) = 1$  για  $f > 0$  (step function).

- Αποδεικνύεται ότι (βλ. π.χ. Proakis & Salehi)  $z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$ , όπου  $\hat{x}(t) \triangleq \frac{1}{\pi t} * x(t)$  είναι ο μετασχηματισμός Hilbert του  $x(t)$ .
- $\hat{X}(f) = -j\text{sgn}(f)$ . Επομένως, ο μετασχηματισμός Hilbert είναι ένα φίλτρο που μεταθέτει τη φάση των θετικών συχνοτήτων κατά  $-\frac{\pi}{2}$  και τη φάση των αρνητικών συχνοτήτων κατά  $\frac{\pi}{2}$ .

# Αναλυτικό σήμα και μετασχηματισμός Hilbert

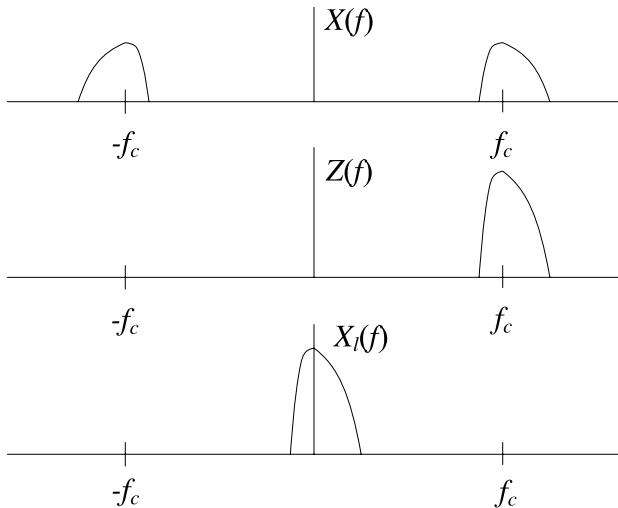


## Βαθυπερατό Ισοδύναμο

**Ορισμός** Το βαθυπερατό ισοδύναμο σήμα (bandpass equivalent signal)  $x_l(t)$  ορίζεται ως  $X_l(f) \triangleq Z(f + f_c) = 2u(f + f_c)X(f + f_c)$ .

- Επομένως,  $x_l(t) = z(t)e^{-j2\pi f_c t} = x_c(t) + jx_s(t)$   
 (μυγαδικό σήμα στη γενική περίπτωση!).
- Με πράξεις,  $x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_c t) - x_s(t) \sin(2\pi f_c t)$   
 και  $\hat{x}(t) = x_c(t) \sin(2\pi f_c t) + x_s(t) \cos(2\pi f_c t)$
- Αντιστρόφως,  $x_c(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) + \hat{x}(t) \sin(2\pi f_c t)$   
 και  $x_s(t) = \hat{x}(t) \cos(2\pi f_c t) - x(t) \sin(2\pi f_c t)$ .
- Για μια καλή επισκόπηση σχέσεων μεταξύ ζωνοπερατών, αναλυτικών και βαθυπερατών ισοδύναμων εκφράσεων, δείτε τον Πίνακα 2.2 των Proakis & Salehi.
- Ισχύει  $X_l(f) = 0$  για  $|f| \geq W$ .

## Βαθυπερατό Ισοδύναμο (2)





## Σε τι χρησιμεύει το βαθυπερατό ισοδύναμο;

- Γνωρίζουμε ότι, για Γραμμικά και Χρονικώς Αμετάβλητα (LTI) συστήματα, ισχύει  $y(t) = h(t) * x(t)$  και, ισοδύναμα,  $Y(f) = H(f)X(f)$ .
- Εάν τόσο το σήμα  $x(t)$  όσο και το σύστημα  $h(t)$  είναι ζωνοπερατά στην περιοχή της  $f_c$  και ισχύει  $X(f) = 0$  και  $H(f) = 0$  για  $|f - f_c| \geq W$ , τότε μπορούμε να γράψουμε

$$Y(f) = H(f)X(f) \Rightarrow$$

$$Z(f) = 2u(f)Y(f) = 2u(f)H(f)X(f) \Rightarrow$$

$$Y_l(f) = 2u(f + f_c)H(f + f_c)X(f + f_c)$$

$$= \frac{1}{2} (2u(f + f_c)H(f + f_c)) (2u(f + f_c)X(f + f_c)) \Rightarrow$$

$$Y_l(f) = \frac{1}{2} H_l(f) X_l(f) \Rightarrow$$

$$y_l(t) = \frac{1}{2} h_l(t) * x_l(t).$$

## Σε τι χρησιμεύει το βαθυπερατό ισοδύναμο; (2)

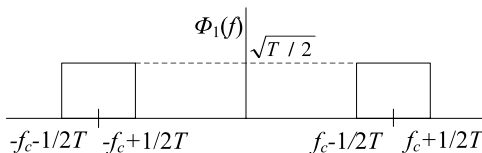
- Επομένως, αντί να αναλύσουμε το ζωνοπερατό σύστημα  $h(t)$  με ζωνοπερατή είσοδο  $x(t)$ , μπορούμε να αναλύσουμε το ισοδύναμο βαθυπερατό σύστημα  $h_l(t)$  με είσοδο  $x_l(t)$ .
- Η βαθυπερατή περιγραφή είναι πολύ χρήσιμη γιατί μπορεί να απλοποιήσει την ανάλυση, αλλά και την υλοποίηση.
- Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα, εάν επεξεργαζόμαστε το βαθυπερατό σήμα (baseband processing) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ίδια κυκλώματα ανεξαρτήτως της φέρουσας συχνότητας.

## Σε τι χρησιμεύει το βαθυπερατό ισοδύναμο; (3)

- Τα περισσότερα συστήματα επικοινωνιών λειτουργούν με βάση αυτήν την αρχή: Το σήμα μεταφέρεται γύρω από τη μηδενική συχνότητα (downconversion) ή σε μια ενδιάμεση συχνότητα  $f_{IF}$  και η επεξεργασία του γίνεται στις χαμηλές συχνότητες.
- Τα βαθυπερατά σήματα και συστήματα είναι, στη γενική περίπτωση, *μιγαδικά*. Ωστόσο, το ζωνοπερατό σήμα/σύστημα στο οποίο αντιστοιχούν είναι πραγματικό (σε συστήματα επικοινωνιών).

## Παράδειγμα: QAM

- Είδαμε ότι ως συναρτήσεις βάσης του αστερισμού QAM μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι  $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_c t)$  και  $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \sin(2\pi f_c t)$ . Με μετασχηματισμό Fourier,  $\Phi_1(f) = \sqrt{\frac{T}{2}} \{\Pi(T(f - f_c)) + \Pi(T(f + f_c))\}$  και  $\Phi_2(f) = j\sqrt{\frac{T}{2}} \{-\Pi(T(f - f_c)) + \Pi(T(f + f_c))\}$ .
- Οι  $\phi_i(t)$  είναι ζωνοπερατές με μέτρο  $\sqrt{\frac{T}{2}}$  στο διάστημα  $|f - f_c| \leq \frac{1}{2T}$ .



## Παράδειγμα: QAM (συνέχεια)

- Έστω ένα σήμα QAM:

$$x(t) = a\phi_1(t) + b\phi_2(t)$$

$$= a\sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t) + b\sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\sin(2\pi f_c t).$$

Με επισκόπηση ή με πράξεις,

$$x_c(t) = a\sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \text{ και } x_s(t) = -b\sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right).$$

- $x_l(t) = x_c(t) + jx_s(t) = (a - jb)\sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right).$
- Επομένως, μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα (πραγματικό) δι-διάστατο ζωνοπερατό σήμα QAM με ένα μιγαδικό μονοδιάστατο βαθυπερατό σήμα με συνάρτηση βάσης  $\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right).$

# Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή

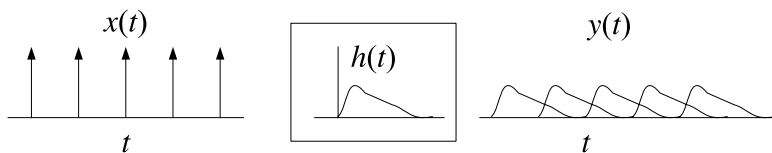
- Ζωνοπερατά (bandpass) σήματα και συστήματα
  - Αναλυτικό σήμα
  - Βαθυπερατό ισοδύναμο σήμα/σύστημα
  
- 2 Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή
  - Εισαγωγή
  - Διαδοχική χρήση καναλιού

## Παραμόρφωση και Διασυμβολική Παρεμβολή

- Μέχρι τώρα υποθέταμε ότι το κανάλι  $h(t)$  έχει άπειρο εύρος ζώνης και ότι η μόνη επίδρασή του επάνω στο σήμα είναι πολλαπλασιασμός με σταθερά ή/και καθυστέρηση.
- Στην πράξη τα κανάλια έχουν πεπερασμένο εύρος ζώνης. Επίσης, στη γενική περίπτωση, η απόκρισή τους είναι συνάρτηση της συχνότητας. Για τους λόγους αυτούς τα κανάλια παραμορφώνουν το σήμα.
- Η γραμμική παραμόρφωση μπορεί να αντιμετωπιστεί με χρήση του προσαρμοσμένου φίλτρου στο δέκτη. Υπάρχουν, ωστόσο, κάποιες λεπτομέρειες που πρέπει να προσεχτούν. Ενδέχεται, για παράδειγμα, οι συναρτήσεις βάσης να μην είναι ορθογώνιες στην έξοδο του καναλιού. Ακόμα χειρότερα, ενδέχεται κάποιες να είναι και γραμμικώς εξαρτημένες, με αποτέλεσμα να “χάνουμε” κάποιες διαστάσεις (μη αντιστρέψιμος μετασχηματισμός). Απαιτείται, επομένως, προσεκτικός σχεδιασμός, ο οποίος εξαρτάται από το κανάλι.

## Παραμόρφωση και Διασυμβολική Παρεμβολή (2)

- Το πεπερασμένο εύρος ζώνης δημιουργεί διασυμβολική παρεμβολή (Inter-Symbol Interference -- ISI). Αυτό συμβαίνει επειδή το κανάλι έχει μνήμη. Όπως φαίνεται στο σχήμα, η έξοδος του καναλιού τη χρονική στιγμή  $t$  εξαρτάται όχι μόνο από την είσοδο τη χρονική στιγμή  $t$ , αλλά και από την προηγούμενη είσοδο.



- Η αντιμετώπιση της διασυμβολικής παρεμβολής γίνεται με διάφορους τρόπους, μεταξύ των οποίων: Εξισωτές (ή Ισοσταθμιστές) (equalizers), Ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας Ακολουθίας (MLSD), διαμόρφωση DMT/OFDM.



## Παραμόρφωση και Διασυμβολική Παρεμβολή (3)

Η διασυμβολική παρεμβολή εμφανίζεται σε πολλά συστήματα μετάδοσης και αποθήκευσης: modems φωνητικών συχνοτήτων και συστήματα DSL, κανάλια κινητών επικοινωνιών λόγω πολλαπλής διόδευσης (multipath), συστήματα μαγνητικής και οπτικής αποθήκευσης, οπτικές ίνες (λόγω διασποράς τρόπων πόλωσης). Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα εξής θέματα:

- Πώς μοντελοποιείται η διασυμβολική παρεμβολή;
- Ποια είναι η επίδρασή της σε ένα σύστημα;
- Με ποιες μεθόδους αντιμετωπίζεται;

## Διαδοχική Χρήση Καναλιού

- Μεταδιδόμενο σήμα ( $K$  διαδοχικές μεταδόσεις, ρυθμός μετάδοσης  $\frac{1}{T}$ ):  $x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k(t - kT)$ , όπου  $x_k(t - kT)$  μία από τις  $M$  κυματομορφές του αστερισμού η οποία μεταφέρει το  $(k + 1)$ -οστό μήνυμα.
- Η έξοδος του καναλιού ισούται με  $y(t) = (h * x)(t)$  (για γραμμικό, χρονικώς αμετάβλητο σύστημα).
- Εάν ο αστερισμός αποτελείται από  $M$  κυματομορφές, ο αριθμός όλων των πιθανών κυματομορφών  $x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k(t - kT)$  που μπορεί να μεταδοθούν από τον πομπό ισούται με  $M^K$ .
- Επειδή έχουμε θεωρήσει το κανάλι  $h(t)$  είναι νομοτελειακό (deterministic), σε κάθε  $x(t)$  αντιστοιχεί μια μοναδική κυματομορφή  $h(t) * x(t)$ .

## Διαδοχική Χρήση Καναλιού (2)

- Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρη τη ληφθείσα κυματομορφή  $y(t) = h(t) * x(t) + n(t)$  για να βρούμε ποια από τις  $M^K$  πιθανές κυματομορφές  $x(t)$  μεταδόθηκε από τον πομπό (π.χ. με ανιχνευτή MAP/ML).
- Η πολυπλοκότητα αυξάνει εκθετικά! Για παράδειγμα, για να εφαρμόσουμε τις μεθόδους που έχουμε μάθει έως τώρα, θα χρειαζόμασταν  $M^K$  προσαρμοσμένα φίλτρα στο δέκτη.
  - Η πολυπλοκότητα γίνεται να μειωθεί με χρήση ακολουθιακής ανίχνευσης (sequence detection) π.χ. με χρήση αλγορίθμου Viterbi.
  - Όπως θα δούμε, η χρήση ισοσταθμιστή είναι μια μη βέλτιστη (αλλά σε αρκετές περιπτώσεις απλούστερη υπολογιστικά) λύση.

## Διαδοχική Χρήση Καναλιού (3)

- Με πολύ προσεκτικό (αλλά, συνήθως, και πολύ πολύπλοκο) σχεδιασμό μπορεί να επιτευχθεί βέλτιστη απόδοση με χρήση ισοσταθμιστών τύπου Generalized Decision Feedback (GDFE) σε συνδυασμό με βελτιστοποίηση του εκπεμπόμενου σήματος.
- Μία άλλη τεχνική είναι η χρήση συστημάτων Multi-Modal και Vector Coding, μια ειδική περίπτωση των οποίων είναι τα συστήματα OFDM/DMT. Η ιδέα: Διαχωρισμός του καναλιού σε ορθογώνια υπο-κανάλια, το καθένα από τα οποία δεν υφίσταται διασυμβολική παρεμβολή, και “βλέπει” μόνο ένα επίπεδο (flat) κανάλι.
- Περισσότερα περί OFDM στο τελευταίο μέρος του μαθήματος.

## Διαδοχική Χρήση Καναλιού - Ορθογωνιότητα συναρτήσεων βάσης

- Έως τώρα χρησιμοποιούσαμε συναρτήσεις οι οποίες ήταν ορθογώνιες μεταξύ τους:  $\int \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = \delta_{i,j}$ .
- Για διαδοχική χρήση καναλιού, το μεταδιδόμενο σήμα έχει τη μορφή  $x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} (\sum_{n=1}^N x_{k,n}\phi_n(t - kT))$ , όπου  $N$  η διάσταση του αστερισμού.

## Διαδοχική Χρήση Καναλιού - Ορθογωνιότητα συναρτήσεων βάσης (2)

Το ότι  $\int \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = \delta_{i,j}$  δε σημαίνει, κατ' ανάγκη, και ότι  
 $\int \phi_i(t - kT)\phi_j^*(t - lT)dt = \delta_{i,j}$  για  $k \neq l$ .

Επομένως, εάν επιχειρήσουμε να ανακτήσουμε την τιμή της συνιστώσας  $x_{p,m}$   
 θα έχουμε διασυμβολική παρεμβολή από άλλες χρονικές στιγμές:

$$y_{p,m} = \int (x(t) + n(t)) \phi_m^*(t - pT) dt =$$

$$\int \left( \sum_{n=1}^N x_{p,n} \phi_n(t - pT) + \sum_{k \neq p} \sum_{n=1}^N x_{k,n} \phi_n(t - kT) + n(t) \right)$$

$$\phi_m^*(t - pT) dt =$$

$$x_{p,m} + \underbrace{\sum_{k \neq p} \sum_{n=1}^N \int x_{k,n} \phi_n(t - kT) \phi_m^*(t - pT) dt}_{\text{ISI}} + \underbrace{\int n(t) \phi_m^*(t - pT) dt}_{\text{Θόρυβος}}$$

## Διαδοχική Χρήση Καναλιού - Ορθογωνιότητα συναρτήσεων βάσης (3)

- Στην περίπτωση που οι  $\phi_m(t - kT)$  και  $\phi_n(t - lT)$  είναι ορθογώνιες για  $k \neq l$  σε κάποιο διάστημα ολοκλήρωσης, δεν εμφανίζεται ISI και το διανυσματικό κανάλι που προκύπτει δεν έχει μνήμη.
  - Παράδειγμα:  $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$  εάν η δειγματοληψία γίνει τις χρονικές στιγμές  $kT$ .
- Ωστόσο, στη γενική περίπτωση, η ορθογωνιότητα χάνεται όταν οι συναρτήσεις βάσης περάσουν μέσα από το κανάλι πεπερασμένου εύρους ζώνης  $h(t)$ , με αποτέλεσμα να εμφανίζεται ISI.

## Διαδοχική Χρήση Καναλιού - Ορθογωνιότητα συναρτήσεων βάσης (4)

- Μια λύση είναι να επιλεγούν κατάλληλες  $\phi(t)$  των οποίων η συνέλιξη με το κανάλι παράγει ορθογώνιες συναρτήσεις.
  - Συνήθως οι  $\phi(t)$  εξαρτώνται από το κανάλι. Ωστόσο, υπάρχουν τρόποι διαμόρφωσης με  $\phi(t)$  οι οποίες είναι ανεξάρτητες του  $h(t)$  (π.χ. OFDM).
  - Αυτό, όμως, συνεπάγεται κάποιο κόστος σε εύρος ζώνης και ενέργεια, όπως θα δούμε.
- Αλλιώς, είτε εφαρμόζουμε ανίχνευση μέγιστης πιθανοφάνειας στο δέκτη ή προσπαθούμε να δημιουργήσουμε κανάλι χωρίς μνήμη στο δέκτη κατά προσέγγιση με χρήση ισοσταθμιστών.