

EE725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών
Λύσεις 1ης Σειράς Ασκήσεων

1. Ο πρώτος μας αστερισμός (Cioffi 1.1)

(α) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις βάσης $\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$ είναι ορθοκανονικές

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(2\pi t) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$\phi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin(2\pi t) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \int \phi_1(t)\phi_2^*(t)dt &= \int_0^1 2 \sin(2\pi t) \cos(2\pi t)dt = \int_0^1 \sin(4\pi t)dt = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \cos(4\pi t) \Big|_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \int \phi_1(t)\phi_1^*(t)dt &= \int_0^1 2 \cos^2(2\pi t)dt = \int_0^1 (1 + \cos(4\pi t))dt = 1 \text{ και} \\ \int \phi_2(t)\phi_2^*(t)dt &= \int_0^1 2 \sin^2(2\pi t)dt = \int_0^1 (1 - \cos(4\pi t))dt = 1. \end{aligned}$$

Επομένως, οι $\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$ είναι ορθοκανονικές.

(β) Θεωρήστε τις παρακάτω διαμορφωμένες κυματομορφές

$$\begin{aligned}
 x_0(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 x_1(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(\cos(2\pi t) + 3\sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 x_2(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 x_3(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos(2\pi t) + 3\sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 x_4(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 x_5(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(\cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 x_6(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 x_7(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 x_{i+8}(t) &= -x_i(t), \quad i = 0, \dots, 7.
 \end{aligned}$$

Σχεδιάστε τον αστερισμό χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις βάσης του ερωτήματος (α).

Απάντηση

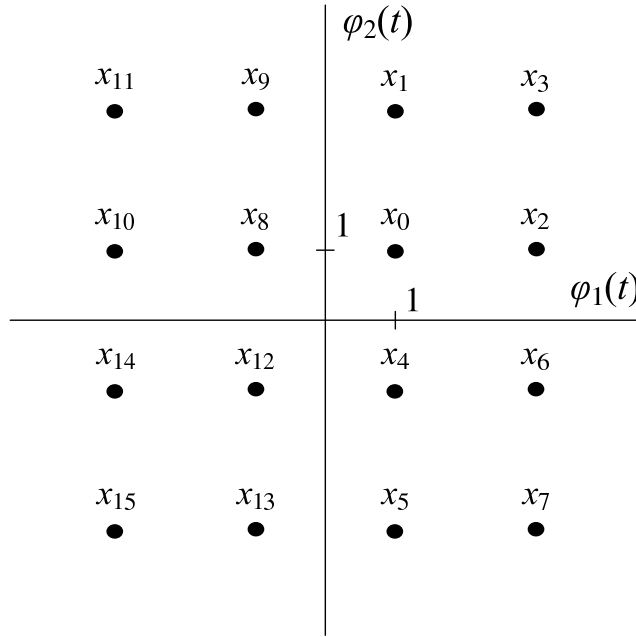
Διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned}
 x_0(t) &= \phi_1(t) + \phi_2(t) = [1 \ 1][\phi_1(t) \ \phi_2(t)]^T, \\
 x_1(t) &= \phi_1(t) + 3\phi_2(t) = [1 \ 3][\phi_1(t) \ \phi_2(t)]^T, \\
 x_2(t) &= 3\phi_1(t) + \phi_2(t) = [3 \ 1][\phi_1(t) \ \phi_2(t)]^T, \\
 x_3(t) &= 3\phi_1(t) + 3\phi_2(t) = [3 \ 3][\phi_1(t) \ \phi_2(t)]^T, \\
 x_4(t) &= \phi_1(t) - \phi_2(t) = [1 \ -1][\phi_1(t) \ \phi_2(t)]^T, \\
 x_5(t) &= \phi_1(t) - 3\phi_2(t) = [1 \ -3][\phi_1(t) \ \phi_2(t)]^T, \\
 x_6(t) &= 3\phi_1(t) - \phi_2(t) = [3 \ -1][\phi_1(t) \ \phi_2(t)]^T, \\
 x_7(t) &= 3\phi_1(t) - 3\phi_2(t) = [3 \ -3][\phi_1(t) \ \phi_2(t)]^T \text{ και} \\
 x_{i+8}(t) &= -x_i(t), \quad i = 0, \dots, 7.
 \end{aligned}$$

Ο αστερισμός έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1

(γ) Υπολογίστε τη μέση ενέργεια \mathcal{E}_x και τη μέση ενέργεια ανά διάσταση $\bar{\mathcal{E}}_x$

(i) για την περίπτωση που όλα τα σήματα είναι ισοπίθανα.



Σχήμα 1: Ο αστερισμός της Άσκησης

- (ii) για την περίπτωση που $p(x_0) = p(x_4) = p(x_8) = p(x_{12}) = \frac{1}{8}$ και $p(x_i) = \frac{1}{24}$ για τα υπόλοιπα i .

Απάντηση

Δεδομένου ότι οι $\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$ είναι ορθοκανονικές, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση ενέργεια απευθείας από τον αστερισμό. Βλέπουμε εύκολα ότι

$$\mathcal{E}_{inner} = 2, \mathcal{E}_{side} = 10 \text{ και } \mathcal{E}_{corner} = 18.$$

Επομένως, για ισοπίθανα σύμβολα, $\mathcal{E}_x = \frac{1}{16}(4 \times 2 + 8 \times 10 + 4 \times 18) = 10$ και $\bar{\mathcal{E}}_x = 5$, επειδή ο αστερισμός έχει $N = 2$ διαστάσεις.

Για την κατανομή του (ii), $\mathcal{E}_x = \frac{1}{8}(4 \times 2) + \frac{1}{24}(8 \times 10 + 4 \times 18) = 1 + 19/3 = 22/3$ και $\bar{\mathcal{E}}_x = 22/6$.

Η μέση ενέργεια είναι μικρότερη στη δεύτερη περίπτωση επειδή τα εσωτερικά σημεία του αστερισμού (τα οποία έχουν και τη μικρότερη ενέργεια) χρησιμοποιούνται με μεγαλύτερη πιθανότητα από τα υπόλοιπα.

(δ) Έστω

$$y_i(t) = x_i(t) + 4\phi_3(t), \text{ όπου}$$

$$\phi_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Υπολογίστε τη μέση ενέργεια, \mathcal{E}_y , του $y(t)$ όταν όλα τα σήματα εισόδου είναι ισοπίθανα.

Απάντηση

Πρέπει, κατ' αρχήν, να δούμε αν οι $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ και $\phi_3(t)$ αποτελούν σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων.

$$\int \phi_1(t)\phi_3^*(t)dt = \int_0^1 \sqrt{2} \cos(2\pi t)dt = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sin(2\pi t) \Big|_0^1 = 0.$$

Ομοίως, $\int \phi_2(t)\phi_3^*(t)dt = 0$. Επίσης, $\int |\phi_3(t)|^2 dt = 1$. Επομένως, οι $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ και $\phi_3(t)$ είναι ορθοκανονικές.

Η ενέργεια κάθε συμβόλου είναι αυξημένη κατά 16 σε σχέση με τα προηγούμενα ερωτήματα. Επομένως, $\mathcal{E}_x = 10 + 16 = 26$ και $\bar{\mathcal{E}}_x = 26/3$.

Παρατηρήστε ότι νέος αστερισμός προκύπτει από τον προηγούμενο με προσθήκη μιας συνεχούς συνιστώσας (DC) πλάτους 4.

2. Εύρεση βάσης με χρήση MATLAB (Cioffi 1.4 – τροποποιημένη)

Κάθε στήλη του πίνακα A που δίνεται στη συνέχεια είναι ένα σύμβολο το οποίο χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί η αντίστοιχη κυματομορφή από ένα σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_6(t)\}$. Το σύνολο των διαμορφωμένων κυματομορφών που αντιστοιχούν στις στήλες του A μπορεί να περιγραφεί με λιγότερες συναρτήσεις βάσης.

$$A = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_7] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Τα σήματα $a_i(t)$ που μεταδίδονται αναπαρίστανται ως

$$a_i(t) = a_i^* \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_6(t) \end{bmatrix} = a_i^* \boldsymbol{\phi}(t),$$

όπου ο αστερίσκος (*) υποδηλώνει ανάστροφο διανύσματος ή πίνακα. Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε, $A(t) = A^* \boldsymbol{\phi}(t)$, όπου κάθε γραμμή του $A(t)$ είναι ένα από τα σήματα που ενδέχεται να εκπέμψει ο πομπός.

Υποθέτουμε ότι τα σύμβολα που μεταδίδονται είναι *ισοπίθανα*.

(α) Υπολογίστε την ενέργεια κάθε συμβόλου, καθώς και τη μέση ενέργεια του αστερισμού.

Απάντηση

Η ενέργεια του κάθε συμβόλου, i , ισούται με το τετράγωνο του μέτρου της στήλης a_i του πίνακα A . Με χρήση MATLAB, $\{\mathcal{E}_i\} = \{10, 50, 74, 150, 210, 332, 418, 566\}$. Δεδομένου ότι τα σύμβολα είναι ισοπίθανα, $\mathcal{E}_x = \frac{1}{8} \sum_i \mathcal{E}_i$. Με χρήση MATLAB, $\mathcal{E}_x = 225$.

- (β) Χρησιμοποιήστε τη MATLAB για να βρείτε μια ορθοκανονική βάση για τις στήλες του A . Δώστε τον πίνακα διανυσμάτων βάσης που προκύπτει. Οι εντολές `help` και `orth` της MATLAB ενδέχεται να σας φανούν χρήσιμες (η εντολή `help orth` θα σας δώσει μια περιγραφή της εντολής `orth`). Συγκεκριμένα, η εντολή `Q=orth(A)` επιστρέφει έναν ορθογώνιο πίνακα Q τέτοιο ώστε $Q^*Q = I$ και $A^* = [A^*Q]Q^*$. Οι στήλες του Q μπορούν να ειπωθούν ως νέα βάση. Επομένως, προσπαθήστε να εκφράσετε τον $A(t)$ με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψει ένα νέο σύνολο συναρτήσεων βάσης και μια νέα περιγραφή των 7 πιθανών μεταδιδόμενων κυματομορφών.

Απάντηση

Με χρήση της `orth` βρίσκουμε μια ορθοκανονική βάση για τις στήλες του A . Η ορθοκανονική βάση που προκύπτει είναι η

$$Q = [q_0 \ q_1 \ q_2] = \begin{bmatrix} -0.3394 & 0.0323 & -0.1124 \\ -0.6190 & 0.2214 & 0.3512 \\ -0.6788 & 0.0647 & -0.2249 \\ -0.0338 & -0.2450 & 0.3479 \\ -0.0677 & -0.4900 & 0.6959 \\ -0.1873 & -0.8035 & -0.4563 \end{bmatrix}.$$

- (γ) Πόσες συναρτήσεις βάσης απαιτούνται για να αναπαραστήσετε το σύνολο κυματομορφών του πομπού; Εκφράστε τις νέες συναρτήσεις βάσης με χρήση των αρχικών $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_6(t)\}$.

Απάντηση

Όπως φαίνεται από τον πίνακα Q , 3 συναρτήσεις αρκούν για να αναπαρασταθεί το σύνολο κυματομορφών του πομπού. Οι νέες συναρτήσεις βάσης, $\psi_i(t)$, συναρτήσεων των αρχικών, ισούνται με $[\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_6(t)]q_i$.

- (δ) Βρείτε το νέο πίνακα \hat{A} ο οποίος αναπαριστά τις κυματομορφές εισόδου με χρήση των νέων συναρτήσεων βάσης που βρήκατε στο (β). ο \hat{A} θα έχει 8 στήλες, μια για κάθε σύμβολο. Ο αριθμός γραμμών του \hat{A} θα είναι ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης που βρήκατε στο (β).

Απάντηση

Οι συντεταγμένες κάθε στήλης a_i ως προς το j -οστό διάνυσμα της καινούργιας βάσης μπορούν να βρεθούν προβάλλοντας κάθε στήλη στα νέα διανύσματα. Δηλαδή, βρίσκοντας το εσωτερικό γινόμενο $\beta_{i,j} = \langle a_i, q_j \rangle$. Στη MATLAB, οι συντελεστές $\beta_{i,j}$ μπορούν να βρεθούν με χρήση της εντολής A^*Q (η οποία υλοποιεί την πράξη

A^*Q). Ο νέος πίνακας, \hat{A} , οι στήλες του οποίου είναι τα σύμβολα εκφρασμένα με χρήση των νέων συναρτήσεων βάσης, είναι ο

$$\hat{A} = [\hat{a}_0 \ \hat{a}_1 \ \dots \ \hat{a}_7] = \begin{bmatrix} -2.6907 & -6.1696 & -8.5609 & -12.0398 & -14.4311 & -17.9100 & -20.3013 & -23.7802 \\ -1.2239 & -3.4513 & -0.0148 & -2.2422 & 1.1943 & -1.0331 & 2.4034 & 0.1760 \\ -1.1235 & -0.1561 & -0.8430 & 0.1244 & -0.5625 & 0.4049 & -0.2820 & 0.6853 \end{bmatrix}$$

(ε) Υπολογίστε την ενέργεια κάθε συμβόλου όταν αυτό αναπαριστάται συναρτήσει των νέων συναρτήσεων βάσης, καθώς και τη μέση ενέργεια του αστερισμού. Σχολιάστε.

Απάντηση

Η ενέργεια κάθε συμβόλου υπολογίζεται ακριβώς όπως στο ερώτημα (α), αυτή τη φορά με χρήση του πίνακα \hat{A} . Τα αποτελέσματα είναι τα ίδια. Αυτό είναι αναμενόμενο δεδομένου ότι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός δε μεταβάλλει το σχήμα του χώρου. Από τη σκοπιά των Ψηφιακών Επικοινωνιών, η ενέργεια ενός σήματος παραμένει η ίδια, ανεξάρτητα της (ορθοκανονικής) βάσης η οποία χρησιμοποιείται για την περιγραφή του.

Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα προγράμματος MATLAB για την άσκηση.

```
% MATLAB code for EE725, HW1, Prob 2
% Dimitris Toumpakaris
% March 28, 2009

% clear all variables
clear all;

% define matrix A
A=[ 1 2 3 4 5 6 7 8;
    1 3 5 7 9 11 13 15;
    2 4 6 8 10 12 14 16;
    0 1 0 1 0 1 0 1;
    0 2 0 2 0 2 0 2;
    2 4 2 4 2 4 2 4];

% Find orthonormal basis for columns of A
Q=orth(A);

% Find matrix A_hat, representing the modulated
% waveforms as a function of the new basis functions

% first find transpose
```

```

A_hat = A'*Q;
% transpose to find matrix whose columns are the symbols
A_hat = A_hat'

% calculate energy of each symbol
% for original representation
energy_orig = sum(A.^2,1)
% for new representation
energy_new = sum(A_hat.^2,1)

% calculate average constellation energy
% for original representation
energy_ave_orig = sum(energy_orig)/size(A,2)
% for new representation
energy_ave_new = sum(energy_new)/size(A_hat,2)

```

3. Κανόνες απόφασης για δυαδικά κανάλια (Cioffi 1.5 – τροποποιημένη)

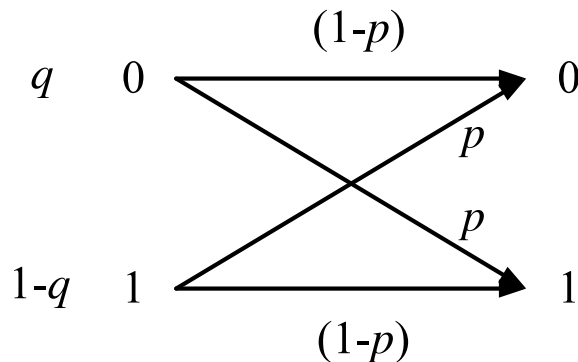
- (α) Εκφράστε τους κανόνες απόφασης MAP και ML για το δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p για οποιαδήποτε κατανομή εισόδου.

Απάντηση

Ο κανόνας απόφασης MAP είναι ο

$$x_i = \arg \max_{x_j} p(x_j|y).$$

Θεωρούμε το δυαδικό συμμετρικό κανάλι του Σχήματος 3, όπου $\Pr\{X = 0\} = q$. Παρατηρήστε ότι οι εισοδοί δεν είναι, κατ' ανάγκη, ισοπίθανες.



Σχήμα 2: Δυαδικό συμμετρικό κανάλι με αυθαίρετη κατανομή εισόδου

Έστω ότι $Y = 0$. Ο δέκτης θα αποφασίσει ότι $X = 0$ εάν $p(X = 0|Y = 0) > p(X = 1|Y = 0)$. Επομένως, αρκεί να συγκρίνουμε τις $p(x|Y = 0)$ ή, ισοδύναμα,

τις $p(x)p(Y = 0|x)$. Επομένως, $\hat{X} = 0$ εάν $p(X = 0)p(Y = 0|X = 0) > p(X = 1)p(Y = 0|X = 1)$ ή $q(1 - p) > (1 - q)p$ ή $q > p$. Συνεπώς, εάν $q > p$, κάθε φορά που ο δέκτης λαμβάνει 0 αποφασίζει 0, ενώ, αν $q \leq p$ ο δέκτης αποφασίζει 1.

Έστω, τώρα, ότι $Y = 1$. $\hat{X} = 0$ εάν $p(X = 0)p(Y = 1|X = 0) > p(X = 1)p(Y = 1|X = 1)$ ή $qp > (1 - q)(1 - p)$ ή $p + q > 1$. Συνεπώς, εάν $p + q > 1$, κάθε φορά που ο δέκτης λαμβάνει 1 αποφασίζει 0, ενώ, αν $p + q \leq 1$ ο δέκτης αποφασίζει 1.

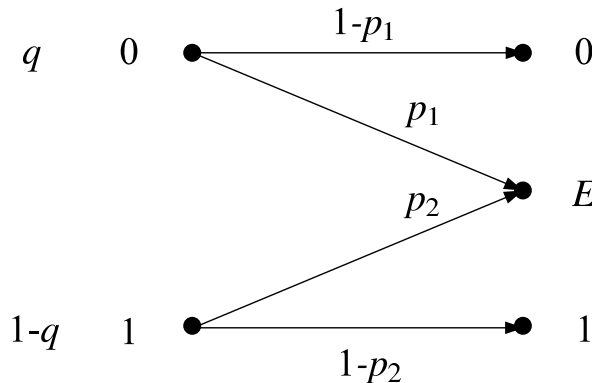
Παρατηρήστε ότι, στη γενική περίπτωση, ο κανόνας απόφασης MAP δεν είναι συμμετρικός. Δηλαδή, υπάρχουν κανάλια για τα οποία πάντοτε θα αποφασίζουμε $\hat{X} = 0$ (ή $\hat{X} = 1$) οτιδήποτε και αν λάβουμε στο δέκτη. Για παράδειγμα, εάν $p = 2/3$ και $q = 5/6$, πάντα αποφασίζουμε ότι $\hat{X} = 0$, ανεξαρτήτως της εισόδου.

Για την περίπτωση του αποκωδικοποιητή ML, αρκεί να θέσουμε $q = 1/2$. Συνεπώς, $\hat{X}(Y = 0) = 0$ όταν $p < 1/2$, αλλιώς $\hat{X}(Y = 0) = 1$.

- (β) Εκφράστε τους κανόνες απόφασης MAP και ML για το δυαδικό κανάλι διαγραφής με $p(Y = 0|X = 0) = 1 - p_1$, $p(Y = E|X = 0) = p_1$, $p(Y = 1|X = 1) = 1 - p_2$, $p(Y = E|X = 1) = p_2$.

Απάντηση

Το δυαδικό κανάλι διαγραφής με αυθαίρετες πιθανότητες εισόδου φαίνεται στο Σχήμα ??.



Σχήμα 3: Δυαδικό κανάλι διαγραφής με αυθαίρετη κατανομή εισόδου

Προφανώς, όταν $Y = 0$ ή $Y = 1$, τόσο ο αποκωδικοποιητής ML όσο και ο MAP αποφασίζουν $\hat{X} = 0$ και 1, αντίστοιχα. Όταν $Y = E$, $p(X = 0)p(E|X = 0) > p(X = 1)p(E|X = 1) \Rightarrow qp_1 > (1 - q)p_2$. Στην περίπτωση αποκωδικοποιητή ML, $q = 1/2$, οπότε $\hat{X}(E) = 0$ όταν $p_1 > p_2$, αλλιώς $\hat{X}(E) = 1$.

4. Περιοχές απόφασης (Cioffi 1.6)

Θεωρούμε το μονοδιάστατο διανυσματικό κανάλι

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n},$$

όπου $\mathbf{x} = \pm 1$ και \mathbf{n} είναι Γκαουσιανός θόρυβος με $\sigma^2 = 1$. Οι περιοχές απόφασης του αποκωδικοποιητή ML είναι οι

$$D_{ML,1} = [0, \infty) \text{ και } D_{ML,-1} = (-\infty, 0).$$

Δηλαδή, εάν το \mathbf{y} βρίσκεται στην περιοχή $D_{ML,1}$, $\hat{\mathbf{x}} = 1$, αλλιώς $\hat{\mathbf{x}} = -1$.

Θεωρήστε, τώρα, ένα διαφορετικό δέκτη, R , με περιοχές απόφασης

$$D_{R,1} = \left[\frac{1}{2}, \infty \right) \text{ και } D_{R,-1} = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right).$$

- (α) Υπολογίστε τις $P_{e,ML}$ και $P_{e,R}$ συναρτήσεως της $p_x(1) = p$ για τιμές της p στο διάστημα $[0, 1]$. Στην ίδια γραφική παράσταση σχεδιάστε την $P_{e,ML}$ και την $P_{e,R}$ ως συνάρτηση της p .

Απάντηση

$$P_{e,ML|\mathbf{x}=+1} = \Pr\{\mathbf{y} < 0 | \mathbf{x} = +1\} = \Pr\{\mathbf{n} < -1 | \mathbf{x} = +1\} \stackrel{(\alpha)}{=} \Pr\{\mathbf{n} < -1\} = Q(1),$$

$$P_{e,ML|\mathbf{x}=-1} = \Pr\{\mathbf{y} > 0 | \mathbf{x} = -1\} = \Pr\{\mathbf{n} > 1 | \mathbf{x} = -1\} \stackrel{(\alpha)}{=} \Pr\{\mathbf{n} > 1\} = Q(1),$$

όπου το (α) ισχύει επειδή ο θόρυβος είναι ανεξάρτητος της εισόδου. Συνεπώς, $P_{e,ML} = p(\mathbf{x} = -1)P_{e,ML|\mathbf{x}=-1} + p(\mathbf{x} = +1)P_{e,ML|\mathbf{x}=+1} = Q(1)$.

Ομοίως, για την περίπτωση του δέκτη R ,

$$P_{e,R|\mathbf{x}=+1} = \Pr\{\mathbf{y} < 1/2 | \mathbf{x} = +1\} = \Pr\{\mathbf{n} < -1/2 | \mathbf{x} = +1\} = \Pr\{\mathbf{n} < -1/2\} = Q(1/2),$$

$$P_{e,R|\mathbf{x}=-1} = \Pr\{\mathbf{y} > 1/2 | \mathbf{x} = -1\} = \Pr\{\mathbf{n} > 3/2 | \mathbf{x} = -1\} = \Pr\{\mathbf{n} > 3/2\} = Q(3/2).$$

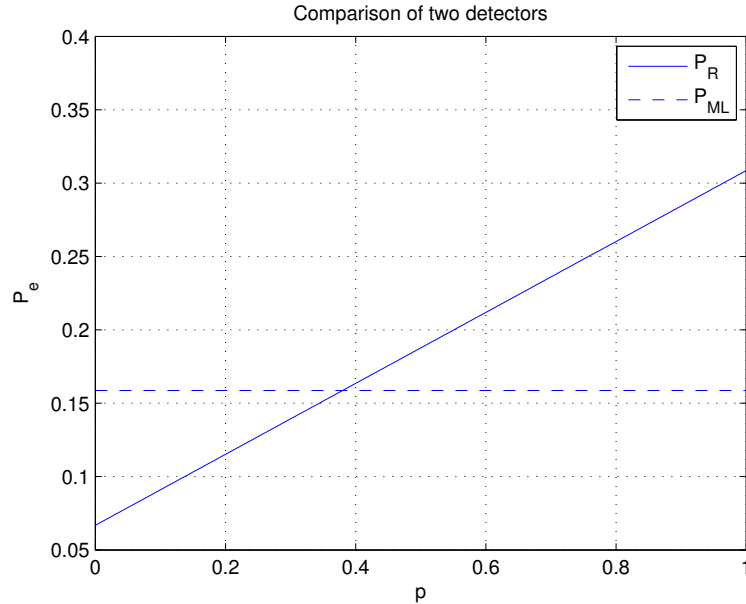
Επομένως, $P_{e,R} = p(\mathbf{x} = -1)P_{e,R|\mathbf{x}=-1} + p(\mathbf{x} = +1)P_{e,R|\mathbf{x}=+1} = (1-p)Q(3/2) + pQ(1/2)$.

Οι $P_{e,ML}$ και $P_{e,R}$ έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 4 για $p \in [0, 1]$.

- (β) Υπολογίστε τα $\max_p P_{e,ML}$ και $\max_p P_{e,R}$. Συμφωνεί το αποτέλεσμα με το θεώρημα minimax, σύμφωνα με το οποίο, για άγνωστη κατανομή εισόδου και εφόσον η δεσμευμένη πιθανότητα σφάλματος $P_{e,ML|m=m_i}$ δεν εξαρτάται από το μήνυμα m_i που μεταδίδεται, ο αποκωδικοποιητής ML ελαχιστοποιεί τη μέγιστη πιθανότητα σφάλματος;

Απάντηση

Η $P_{e,ML}$ είναι σταθερή και ανεξάρτητη της p . Η $P_{e,R}$ είναι affine συνάρτηση της p και, επομένως, και κυρτή (και κοίλη). Συνεπώς μεγιστοποιείται σε ένα άκρο του διαστήματος $[0, 1]$ ή στο σημείο για το οποίο $\frac{d}{dp}P_{e,R} = 0$. $\frac{d}{dp}P_{e,R} = Q(1/2) - Q(3/2) > 0$. Συνεπώς, η $P_{e,R}$ είναι γνησίως αύξουσα για όλα τα p και, επομένως, μεγιστοποιείται στο $p^* = 1 : \max_p P_{e,R} = Q(1/2)$. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο διαισθητικά: Το όριο των περιοχών απόφασης βρίσκεται πιο κοντά στο



Σχήμα 4: Σύγκριση της πιθανότητας σφάλματος των δύο δεκτών συναρτήσει της πιθανότητας μετάδοσης του συμβόλου $\mathbf{x} = +1$.

σημείο $\mathbf{x} = +1$, με αποτέλεσμα η μετάδοση αυτού του σημείου να οδηγεί σε σφάλμα με μεγαλύτερη πιθανότητα. Επομένως, η μεγαλύτερη μέση πιθανότητα σφάλματος εμφανίζεται όταν χρησιμοποιούμε αποκλειστικά το $\mathbf{x} = +1$. Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα συμφωνεί με το θεώρημα, δεδομένου ότι $P_{e,ML|\mathbf{x}=+1} = P_{e,ML|\mathbf{x}=-1} = Q(1)$ και $\max_p P_{e,R} = Q(1/2) > Q(1) = \max_p P_{e,ML}$.

(γ) Για ποια τιμή της p ο κανόνας MAP συμπίπτει με το δέκτη D_R ;

Απάντηση

Ο κανόνας MAP συμπίπτει με το δέκτη D_R όταν $p(\mathbf{x} = -1|\mathbf{y} = 1/2) = p(\mathbf{x} = +1|\mathbf{y} = 1/2)$. Δηλαδή, $p(\mathbf{x} = +1)p(\mathbf{y} = 1/2|\mathbf{x} = +1) = p(\mathbf{x} = -1)p(\mathbf{y} = 1/2|\mathbf{x} = -1) \Rightarrow pQ(1/2) = (1-p)Q(3/2) \Rightarrow p(Q(1/2) + Q(3/2)) = Q(3/2) \Rightarrow p = \frac{Q(3/2)}{Q(1/2)+Q(3/2)} \approx 0.187$. Στην περίπτωση αυτή, $P_{e,R} = P_{e,MAP} = 0.1098 < P_{e,ML}$.

5. Θόρυβος στο δέκτη (Cioffi 1.9)

Στην άσκηση αυτή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε MATLAB για τους υπολογισμούς.

Κάθε στήλη του A που δίνεται παρακάτω είναι ένα σύμβολο δεδομένων το οποίο χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί η διαμορφωμένη κυματομορφή που του αντιστοιχεί με χρήση συνόλου ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης

$$\phi(t) = [\phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \cdots \ \phi_6(t)].$$

Υποθέστε ότι όλα τα μηνύματα είναι ισοπίθανα.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$x(t) = \phi(t)A = [x_0(t) \ x_1(t) \ \dots \ x_7(t)].$$

Παρατηρήστε ότι η έκφραση για τη $x(t)$ είναι ισοδύναμη με αυτήν για τον $A(t)$ της 2ης άσκησης. Ένα διάνυσμα θορύβου

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_6 \end{bmatrix}$$

προστίθεται στο διάνυσμα συμβόλων, \mathbf{x} , ώστε

$$y(t) = \Phi(t)(\mathbf{x} + \mathbf{n}),$$

όπου n_1, n_2, \dots, n_6 είναι ανεξάρτητα και $n_k = \pm 1$ με ίδια πιθανότητα.

Η μεταδιδόμενη κυματομορφή $y(t)$ αποδιαμορφώνεται με χρήση αποκωδικοποιητή συσχέτισης (ή προσαρμοσμένων φίλτρων). Το πρόβλημα αυτό εξετάζει το λόγο σήματος προς θόρυβο του αποδιαμορφωμένου διανύσματος $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$.

(α) Βρείτε τα $\bar{\mathcal{E}}_x$, σ^2 και $\text{SNR} = \bar{\mathcal{E}}_x / \sigma^2$ εάν όλα τα μηνύματα είναι ισοπίθανα.

Απάντηση

Όπως και στη 2η άσκηση, η $\bar{\mathcal{E}}_x$ μπορεί να βρεθεί από το τετράγωνο του μέτρου των στηλών του A και θέτοντας $N = 6$. $\bar{\mathcal{E}}_x = 30.1667$.

Η διασπορά του \mathbf{n} ορίζεται ως $E[\mathbf{n}^2 - (E[\mathbf{n}])^2] = E[\mathbf{n}^2] = \sum E[n_i^2] = 6$, δεδομένου ότι τα n_i είναι ανεξάρτητα.

Συνεπώς, $\text{SNR} = 5.0278 = 7.0138$ dB.

(β) Βρείτε τον ελάχιστο αριθμό διανυσμάτων βάσης και το νέο πίνακα \hat{A} όπως στην Άσκηση 2 και υπολογίστε τα νέα \mathcal{E}_x , σ^2 και SNR.

Απάντηση

Με τον ίδιο τρόπο όπως και στην Άσκηση 2, προκύπτει ότι 3 διανύσματα βάσης αρκούν για την περιγραφή των σημάτων. Ο πίνακας \hat{A} είναι ο

$$\hat{A} = [\hat{a}_0 \ \hat{a}_1 \ \dots \ \hat{a}_7] = \begin{bmatrix} -4.9564 & -7.3362 & -9.7160 & -12.0958 & -12.5841 & -14.9639 & -17.3437 & -19.7235 \\ -3.8839 & -3.4860 & -3.0881 & -2.6901 & 0.9914 & 1.3894 & 1.7873 & 2.1853 \\ 0.5912 & 0.1691 & -0.2530 & -0.6751 & 0.8108 & 0.3887 & -0.0335 & -0.4556 \end{bmatrix}.$$

Προκειμένου να βρούμε τους συντελεστές των σημάτων ως προς τη νέα βάση, αρκεί να τα προβάλλουμε στις γραμμές του πίνακα Q^* : $\hat{A} = Q^*A$. Επομένως, ο θόρυβος μετασχηματίζεται σε $\hat{\mathbf{n}} = Q^*\mathbf{n}$ και $\hat{\sigma}^2 = E[\hat{\mathbf{n}}^2] = E[\mathbf{n}^*QQ^*\mathbf{n}] = E[\mathbf{n}^*\mathbf{n}] = \sigma^2$. Το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός είναι ορθογώνιος. Συνεπώς, όπως μπορεί να επιβεβαιωθεί και με χρήση MATLAB, η μέση ενέργεια \mathcal{E}_x του αστερισμού παραμένει αναλλοίωτη.

Ωστόσο, η μέση ενέργεια του αστερισμού ανά διάσταση, $\bar{\mathcal{E}}_x$ και το SNR αλλάζουν, δεδομένου ότι ο αριθμός των διαστάσεων είναι, πλέον, ίσος με 3 αντί για 6. Αυτό δε σημαίνει ότι άλλαξε κάτι όσον αφορά την απόδοση του αστερισμού, αφού ο μετασχηματισμός είναι ορθογώνιος και, επομένως, αντιστρέψιμος.

- (γ) Εάν το νέο διάνυσμα εξόδου ισούται με $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}}$, είναι αμετάβλητος (invariant) ο μετασχηματισμός από το \mathbf{y} στο $\tilde{\mathbf{y}}$; Με άλλα λόγια, επηρεάζεται η P_e από το μετασχηματισμό;

Απάντηση

Η P_e δεν επηρεάζεται από το μετασχηματισμό επειδή αυτός είναι αντιστρέψιμος. Συγκεκριμένα, μπορούμε να “επιστρέψουμε” στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων, δεδομένου ότι $\hat{A} = Q^*A \Rightarrow A = (Q^*)^{-1}\hat{A} = QA$.

- (δ) Συγκρίνετε τα \bar{b} και $\bar{\mathcal{E}}_x$ με το προηγούμενο σύστημα. Το νέο σύστημα υπερτερεί του προηγούμενου; Γιατί ή γιατί όχι;

Απάντηση

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο ερώτημα, η $\bar{\mathcal{E}}_x$ είναι, τώρα, διπλάσια από την περίπτωση του ερωτήματος (α). Ομοίως, ο αριθμός των bits/διάσταση, \bar{b} , ισούται με $\log_2(8) = 3/3 = 1$, αντί για 0.5. Το νέο σύστημα δεν υπερτερεί του προηγούμενου όσον αφορά την επίδοση, δεδομένου ότι ο συνολικός αριθμός μεταδιδόμενων bits, η P_e και η μέση ενέργεια σε όλες τις διαστάσεις δε μεταβάλλονται. Το δεύτερο σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί με χρήση 3 αντί για 6 προσαρμοσμένα φίλτρα το οποίο ενδέχεται να είναι προτιμότερο στην περίπτωση που οι περιοχές απόφασης είναι απλούστερες σε σχέση με το σύστημα του ερωτήματος (α).

- (ε) Το νέο σύστημα έχει τώρα 3 διαστάσεις που δε χρησιμοποιούνται. Επιθυμούμε να στείλουμε 8 επιπλέον μηνύματα δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο πίνακα \bar{A} :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A} \end{bmatrix}.$$

Συγκρίνετε τα \bar{b} και $\bar{\mathcal{E}}_x$ με το αρχικό σύστημα 6 διαστάσεων, καθώς και με το σύστημα 3 διαστάσεων του ερωτήματος (β).

Απάντηση

Η μέση ενέργεια ανά διάσταση, $\bar{\mathcal{E}}_x$, είναι ίδια με αυτή του συστήματος (α). Ωστόσο, ο αριθμός bits ανά διάσταση, \bar{b} , είναι τώρα 2/3 αντί για 1/2. Αυτό συμβαίνει γιατί

το σύστημα μεταδίδει περισσότερα bits με την ίδια μέση ενέργεια. Το γεγονός ότι, στο σύστημα (α), τα σήματα ανήκαν σε υπόχωρο διάστασης 3 σημαίνει ότι, εάν το σύστημα (α) έχει σχεδιαστεί σωστά θα έχει καλύτερη P_e απ' ό,τι το σύστημα (ϵ). Η μέση ενέργεια ανά διάσταση του συστήματος (ϵ) είναι η μισή απ' ό,τι αυτή του συστήματος (β). Αυτό συμβαίνει γιατί, κατά μέσο όρο, η μισή ενέργεια κατανέμεται, τώρα, στις 3 διαστάσεις που δε χρησιμοποιούσε το σύστημα (β) (και (α)). Επίσης, ο αριθμός bits ανά διάσταση ελαττώνεται.

Στη συνέχεια δίνεται κώδικας MATLAB ο οποίος υπολογίζει τις ζητούμενες ποσότητες.

```
% MATLAB code for EE725, HW1, Prob 5
% Dimitris Toumpakaris
% March 28, 2009

% clear all variables
clear all;

% define matrix A
A=[ 1 2 3 4 5 6 7 8;
    2 4 6 8 10 12 14 16;
    1 1 1 1 0 0 0 0;
    0 0 0 0 1 1 1 1;
    3 3 3 3 3 3 3 3;
    5 6 7 8 5 6 7 8];

% Find energy of each symbol
E_x_per_sym = sum(A.^2,1)

% Find mean energy assuming equiprobable messages
E_x = sum(E_x_per_sym)/size(A,2)

% Find energy per dimension
E_x_bar = E_x/size(A,1)

% noise variance is equal to number of dimensions, N
sigma_sq = size(A,1);

% Find SNR per dimension
SNR = E_x_bar/sigma_sq
% in dB
SNR_dB = 10*log10(SNR)

% find b_bar
```

```

b_bar = log2(size(A,2))/size(A,1)

% Find orthonormal basis for columns of A
Q=orth(A);

% express transmitted vectors with respect to new basis
A_hat = Q'*A

% Find energy of each symbol
E_x_per_sym_new = sum(A_hat.^2,1)

% Find mean energy assuming equiprobable messages
E_x_new = sum(E_x_per_sym_new)/size(A_hat,2)

% Find energy per dimension
E_x_bar_new = E_x_new/size(A_hat,1)

% find b_bar
b_bar_new = log2(size(A_hat,2))/size(A_hat,1)

% new system with 16 messages
A_bar = [A_hat zeros(size(A_hat,1),size(A_hat,2));
         zeros(size(A_hat,1),size(A_hat,2)) A_hat];

% Find energy of each symbol
E_x_per_sym_bar = sum(A_bar.^2,1)

% Find mean energy assuming equiprobable messages
E_x_bar = sum(E_x_per_sym_bar)/size(A_bar,2)

% Find energy per dimension
E_x_bar_bar = E_x_bar/size(A_bar,1)

% find b_bar
b_bar_bar = log2(size(A_bar,2))/size(A_bar,1)

```

6. Κανάλι αποθήκευσης σε δίσκο (Cioffi 1.12)

Η αποθήκευση δυαδικών δεδομένων σε δίσκο λεπτής μεμβράνης (thin-film disk) μπορεί να προσεγγιστεί από κανάλι προσθετικού Γκαουσιανού θορύβου ο οποίος εξαρτάται από την είσοδο. Συγκεκριμένα, η διασπορά του θορύβου εξαρτάται από την είσοδο (δηλαδή

την τιμή που εγγράφεται στο δίσκο). Ο θόρυβος έχει την ακόλουθη κατανομή

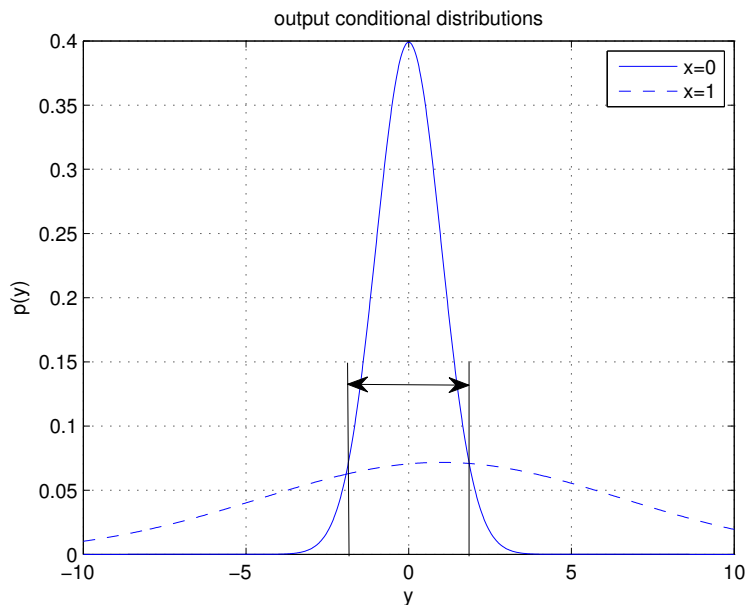
$$p(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_1^2}} & \text{όταν } x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_0^2}} & \text{όταν } x = 0 \end{cases}$$

και $\sigma_1^2 = 31\sigma_0^2$. Οι εισοδοι στο κανάλι είναι ισοπίθανες.

- (α) Για οποιαδήποτε είσοδο, η έξοδος μπορεί να έχει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Στην ίδια γραφική παράσταση σχεδιάστε τις δύο πιθανές κατανομές πυκνότητας πιθανότητας (pdf's) της εξόδου. Δηλαδή, σχεδιάστε την κατανομή εξόδου για $x = 0$ και την κατανομή εξόδου για $x = 1$. Δείξτε (προσεγγιστικά) τις περιοχές απόφασης στη γραφική παράσταση.

Απάντηση

Οι δύο πιθανές κατανομές πυκνότητας πιθανότητας (pdf's) της εξόδου έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 5 για $\sigma_0^2 = 1$. Επειδή τα σύμβολα εισόδου είναι ισοπίθανα, ο ανιχνευτής ML είναι βέλτιστος. Επομένως, ο δέκτης αποφασίζει ότι το μεταδοθέν σύμβολο είναι το 0 όταν η y βρίσκεται στην περιοχή που σημειώνεται με βέλος. Αλλιώς, αποφασίζει ότι το μεταδοθέν σύμβολο είναι το 1.



Σχήμα 5: Κατανομές πυκνότητας πιθανότητας (pdf's) της εξόδου.

- (β) Προσδιορίστε το βέλτιστο δέκτη συναρτήσει των σ_0 και σ_1 .

Απάντηση

Ο βέλτιστος δέκτης υπολογίζει την τιμή του x η οποία μεγιστοποιεί την εκ των υστέρων πιθανότητα $p(x|y)$. $\hat{X} = 0$ όταν $p(0|y) > p(1|y) \Rightarrow p(0)p(y|0) > p(1)p(y|1) \Rightarrow p(y|0) > p(y|1)$, δεδομένου ότι οι είσοδοι είναι ισοπίθανες. Συνεπώς, $\hat{X} = 0 \Leftrightarrow p(y|0) > p(y|1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}e^{-y^2/2\sigma_0^2} > \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}}e^{-(y-1)^2/2\sigma_1^2} \Leftrightarrow e^{-y^2/2\sigma_0^2} > \frac{1}{\sqrt{31}}e^{-(y-1)^2/2\cdot 31\sigma_0^2} \Leftrightarrow -y^2/2\sigma_0^2 > -\ln(31)/2 - (y-1)^2/62\sigma_0^2 \Leftrightarrow 31y^2 < 31\ln(31)\sigma_0^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow 30y^2 + 2y - 1 - 31\ln(31)\sigma_0^2 < 0$.

Οι περιοχές απόφασης προκύπτουν από τη λύση της παραπάνω ανισότητας η οποία εξαρτάται από την τιμή της σ_0 .

(γ) Υπολογίστε τα σ_0^2 και σ_1^2 όταν SNR=15 dB. Ο SNR ορίζεται ως $\frac{\mathcal{E}_x}{\frac{1}{2}(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)} = \frac{1}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}$.

Απάντηση

$\frac{1}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} = \frac{1}{32\sigma_0^2} = 10^{1.5} \approx 31.62 \approx 32$. Συνεπώς, $\sigma_0^2 = 1$ και $\sigma_1^2 = 31$.

(δ) Υπολογίστε την P_e όταν SNR=15 dB.

Απάντηση

Για $\sigma_0^2 = 1$ και $\sigma_1^2 = 31$, η ανισότητα για τις περιοχές απόφασης παίρνει τη μορφή $p(y|0) > p(y|1) \Leftrightarrow 30y^2 + 2y - 1 - 31\ln(31) < 0$. Οι ρίζες είναι οι -1.9262 και +1.8595. Για $y = 0$, $30y^2 + 2y - 1 - 31\ln(31) < 0$. Επομένως, ο δέκτης αποφασίζει $\hat{X} = 0$ όταν $y \in [-1.9262, +1.8595]$, αλλιώς $\hat{X} = 1$. Η πιθανότητα σφάλματος μπορεί, τώρα, να υπολογιστεί ως

$$P_e = p(1)P_{e|x=1} + p(0)P_{e|x=0} = \frac{1}{2} (P_{e|x=1} + P_{e|x=0}).$$

$$\begin{aligned} P_{e|x=1} &= \int_{-1.9262}^{1.8595} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} e^{-(y-1)^2/2\sigma_1^2} dy = \\ &= \int_{-1.9262}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} e^{-(y-1)^2/2\sigma_1^2} dy - \int_{1.8595}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} e^{-(y-1)^2/2\sigma_1^2} dy = \\ &= Q\left(\frac{-1.9262 + 1}{\sqrt{31}}\right) - Q\left(\frac{1.8595 + 1}{\sqrt{31}}\right) = 0.2623. \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} P_{e|x=0} &= \int_{-\infty}^{-1.9262} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} e^{-y^2/2\sigma_0^2} dy + \int_{1.8595}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} e^{-y^2/2\sigma_0^2} dy = \\ &= Q(1.9262) + Q(1.8595) = 0.0585. \end{aligned}$$

Επομένως, $P_e = (0.2623 + 0.0585)/2 = 0.1604$.

(ε) Τι συμβαίνει καθώς $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \rightarrow 0$; Μπορείτε να περιοριστείτε στη λογική (από φυσικής άποψης) περίπτωση όπου η σ_1 είναι σταθερή και πεπερασμένη και $\sigma_0 \rightarrow 0$.

Απάντηση

Καθώς $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \rightarrow 0$, η $p(y|0)$ θα γίνεται όλο και πιο “στενή” γύρω από το $y = 0$. Επομένως, τα όρια της περιοχής απόφασης $\hat{X} = 0$ θα μετακινούνται προς το 0. Στο όριο, ο δέκτης αποφασίζει ότι $\hat{X} = 0$ μόνο όταν το y είναι (σχεδόν) 0, ενώ σε όλες τις άλλες περιπτώσεις αποφασίζει ότι $\hat{X} = 1$.

7. Σύγκριση Φραγμάτων (Cioffi 1.21)

Θεωρούμε τον παρακάτω αστερισμό ο οποίος χρησιμοποιείται για μετάδοση σε κανάλι AWGN.

$$x_0 = (-1, -1)$$

$$x_1 = (1, -1)$$

$$x_2 = (-1, 1)$$

$$x_3 = (1, 1)$$

$$x_4 = (0, 3)$$

Για τα ερωτήματα (α) και (β) δώστε τις απαντήσεις συναρτήσει του σ .

- (α) Υπολογίστε το union bound για την P_e όταν χρησιμοποιείται αποκωδικοποιητής ML.

Απάντηση

Ο αστερισμός έχει 5 σημεία. Η ελάχιστη απόσταση του αστερισμού ισούται με $d_{\min} = 2$. Επομένως, $P_{e,UB} = 4Q(2/2\sigma) = 4Q(1/\sigma)$.

- (β) Υπολογίστε το nearest neighbor union bound για την P_e όταν χρησιμοποιείται αποκωδικοποιητής ML.

Απάντηση

Τα σημεία x_0 και x_1 έχουν 2 κοντινούς γείτονες, σε απόσταση 2. Τα σημεία x_2 και x_3 έχουν 3 κοντινούς γείτονες, δύο σε απόσταση 2 και έναν σε απόσταση $\sqrt{5}$. Το σημείο x_4 έχει 2 κοντινούς γείτονες σε απόσταση 2. Επομένως, ο μέσος αριθμός γειτόνων είναι $\frac{1}{5}(2 \times 2 + 2 \times 3 + 2) = 12/5 = 2.4$ και $P_{e,NNUB} = 2.4Q(2/2\sigma) = 2.4Q(1/\sigma)$.

- (γ) Εάν $SNR=14$ dB, βρείτε την τιμή της P_e χρησιμοποιώντας το NNUB.

Απάντηση

Η ενέργεια των x_0 έως x_3 ισούται με 2, ενώ η ενέργεια του x_4 ισούται με 9. Επομένως, $\mathcal{E}_x = \frac{1}{5}(4 \times 2 + 9) = 17/5 = 3.6$. $SNR = \mathcal{E}_x/\sigma^2 = 10^{1.4} \Rightarrow \sigma \approx 0.3786$. Συνεπώς, $P_{e,NNUB} = 2.4Q(1/2.64) \approx 10^{-2}$.