

ΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών
1η Σειρά Ασκήσεων
(Αναπαράσταση κυματομορφών, Αστερισμοί)

Διευκρίνιση: Η επίλυση των ασκήσεων είναι προαιρετική. Σκοπός τους είναι να λειτουργήσουν συμπληρωματικά με τις διαλέξεις.

1. Ο πρώτος μας αστερισμός (Cioffi 1.1)

(α) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις βάσης $\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$ είναι ορθοκανονικές

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(2\pi t) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$\phi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin(2\pi t) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) Θεωρήστε τις παρακάτω διαμορφωμένες κυματομορφές

$$x_0(t) = \begin{cases} \sqrt{2} (\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2} (\cos(2\pi t) + 3 \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2} (3 \cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_3(t) = \begin{cases} \sqrt{2} (3 \cos(2\pi t) + 3 \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_4(t) = \begin{cases} \sqrt{2} (\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_5(t) = \begin{cases} \sqrt{2} (\cos(2\pi t) - 3 \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_6(t) = \begin{cases} \sqrt{2} (3 \cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_7(t) = \begin{cases} \sqrt{2} (3 \cos(2\pi t) - 3 \sin(2\pi t)) & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_{i+8}(t) = -x_i(t), \quad i = 0, \dots, 7.$$

Σχεδιάστε τον αστερισμό χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις βάσης του ερωτήματος (α).

(γ) Υπολογίστε τη μέση ενέργεια \mathcal{E}_x και τη μέση ενέργεια ανά διάσταση $\bar{\mathcal{E}}_x$

(i) για την περίπτωση που όλα τα σήματα είναι ισοπίθανα.

(ii) για την περίπτωση που $p(x_0) = p(x_4) = p(x_8) = p(x_{12}) = \frac{1}{8}$ και $p(x_i) = \frac{1}{24}$ για τα υπόλοιπα i .

(δ) Έστω

$$y_i(t) = x_i(t) + 4\phi_3(t), \text{ όπου}$$

$$\phi_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Υπολογίστε τη μέση ενέργεια, \mathcal{E}_y , του $y(t)$ όταν όλα τα σήματα εισόδου είναι ισοπίθανα.

2. Εύρεση βάσης με χρήση MATLAB (Cioffi 1.4 – τροποποιημένη)

Κάθε στήλη του πίνακα A που δίνεται στη συνέχεια είναι ένα σύμβολο το οποίο χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί η αντίστοιχη κυματομορφή από ένα σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_6(t)\}$. Το σύνολο των διαμορφωμένων κυματομορφών που αντιστοιχούν στις στήλες του A μπορεί να περιγραφεί με λιγότερες συναρτήσεις βάσης.

$$A = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_7] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Τα σήματα $a_i(t)$ που μεταδίδονται αναπαρίστανται ως

$$a_i(t) = a_i^* \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_6(t) \end{bmatrix} = a_i^* \boldsymbol{\phi}(t),$$

όπου ο αστερίσκος (*) υποδηλώνει ανάστροφο διανύσματος ή πίνακα. Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε, $A(t) = A^* \boldsymbol{\phi}(t)$, όπου κάθε γραμμή του $A(t)$ είναι ένα από τα σήματα που ενδέχεται να εκπέμψει ο πομπός.

Υποθέτουμε ότι τα σύμβολα που μεταδίδονται είναι *ισοπίθανα*.

(α) Υπολογίστε την ενέργεια κάθε συμβόλου, καθώς και τη μέση ενέργεια του αστερισμού.

- (β) Χρησιμοποιήστε τη MATLAB για να βρείτε μια ορθοκανονική βάση για τις στήλες του A . Δώστε τον πίνακα διανυσμάτων βάσης που προκύπτει. Οι εντολές `help` και `orth` της MATLAB ενδέχεται να σας φανούν χρήσιμες (η εντολή `help orth` θα σας δώσει μια περιγραφή της εντολής `orth`). Συγκεκριμένα, η εντολή `Q=orth(A)` επιστρέφει έναν ορθογώνιο πίνακα Q τέτοιο ώστε $Q^*Q = I$ και $A^* = [A^*Q]Q^*$. Οι στήλες του Q μπορούν να ειπωθούν ως νέα βάση. Επομένως, προσπαθήστε να εκφράσετε τον $A(t)$ με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψει ένα νέο σύνολο συναρτήσεων βάσης και μια νέα περιγραφή των 7 πιθανών μεταδιδόμενων κυματομορφών.
- (γ) Πόσες συναρτήσεις βάσης απαιτούνται για να αναπαραστήσετε το σύνολο κυματομορφών του πομπού; Εκφράστε τις νέες συναρτήσεις βάσης με χρήση των αρχικών $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_6(t)\}$.
- (δ) Βρείτε το νέο πίνακα \hat{A} ο οποίος αναπαριστά τις κυματομορφές εισόδου με χρήση των νέων συναρτήσεων βάσης που βρήκατε στο (β). ο \hat{A} θα έχει 8 στήλες, μια για κάθε σύμβολο. Ο αριθμός γραμμών του \hat{A} θα είναι ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης που βρήκατε στο (β).
- (ε) Υπολογίστε την ενέργεια κάθε συμβόλου όταν αυτό αναπαριστάται συναρτήσει των νέων συναρτήσεων βάσης, καθώς και τη μέση ενέργεια του αστερισμού. Σχολιάστε.

3. Κανόνες απόφασης για δυαδικά κανάλια (Cioffi 1.5 – τροποποιημένη)

- (α) Εκφράστε τους κανόνες απόφασης MAP και ML για το δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p για οποιαδήποτε κατανομή εισόδου.
- (β) Εκφράστε τους κανόνες απόφασης MAP και ML για το δυαδικό κανάλι διαγραφής με $p(Y = 0|X = 0) = 1 - p_1$, $p(Y = E|X = 0) = p_1$, $p(Y = 1|X = 1) = 1 - p_2$, $p(Y = E|X = 1) = p_2$.

4. Περιοχές απόφασης (Cioffi 1.6)

Θεωρούμε το μονοδιάστατο διανυσματικό κανάλι

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n},$$

όπου $\mathbf{x} = \pm 1$ και \mathbf{n} είναι Γκαουσιανός θόρυβος με $\sigma^2 = 1$. Οι περιοχές απόφασης του αποκωδικοποιητή ML είναι οι

$$D_{ML,1} = [0, \infty) \text{ και } D_{ML,-1} = (-\infty, 0).$$

Δηλαδή, εάν το \mathbf{y} βρίσκεται στην περιοχή $D_{ML,1}$, $\hat{\mathbf{x}} = 1$, αλλιώς $\hat{\mathbf{x}} = -1$.

Θεωρήστε, τώρα, ένα διαφορετικό δέκτη, R , με περιοχές απόφασης

$$D_{R,1} = \left[\frac{1}{2}, \infty \right) \text{ και } D_{R,-1} = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right).$$

- (α) Υπολογίστε τις $P_{e,ML}$ και $P_{e,R}$ συναρτήσεσι της $p_x(1) = p$ για τιμές της p στο διάστημα $[0, 1]$. Στην ίδια γραφική παράσταση σχεδιάστε την $P_{e,ML}$ και την $P_{e,R}$ ως συνάρτηση της p .
- (β) Υπολογίστε τα $\max_p P_{e,ML}$ και $\max_p P_{e,R}$. Συμφωνεί το αποτέλεσμα με το θεώρημα minimax, σύμφωνα με το οποίο, για άγνωστη κατανομή εισόδου και εφόσον η δεσμευμένη πιθανότητα σφάλματος $P_{e,ML|m=m_i}$ δεν εξαρτάται από το μήνυμα m_i που μεταδίδεται, ο αποκωδικοποιητής ML ελαχιστοποιεί τη μέγιστη πιθανότητα σφάλματος;
- (γ) Για ποια τιμή της p ο κανόνας MAP συμπίπτει με το δέκτη D_R ;

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη MATLAB για τον υπολογισμό της $Q(\cdot)$.

5. Θόρυβος στο δέκτη (Cioffi 1.9)

Στην άσκηση αυτή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε MATLAB για τους υπολογισμούς.

Κάθε στήλη του A που δίνεται παρακάτω είναι ένα σύμβολο δεδομένων το οποίο χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί η διαμορφωμένη κυματομορφή που του αντιστοιχεί με χρήση συνόλου ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης

$$\boldsymbol{\phi}(t) = [\phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \cdots \ \phi_6(t)].$$

Υποθέστε ότι όλα τα μηνύματα είναι *ισοπίθανα*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)A = [x_0(t) \ x_1(t) \ \cdots \ x_7(t)].$$

Παρατηρήστε ότι η έκφραση για τη $x(t)$ είναι ισοδύναμη με αυτήν για τον $A(t)$ της 2ης άσκησης. Ένα διάνυσμα θορύβου

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_6 \end{bmatrix}$$

προστίθεται στο διάνυσμα συμβόλων, \mathbf{x} , ώστε

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)(\mathbf{x} + \mathbf{n}),$$

όπου n_1, n_2, \dots, n_6 είναι ανεξάρτητα και $n_k = \pm 1$ με ίδια πιθανότητα.

Η μεταδιδόμενη κυματομορφή $y(t)$ αποδιαμορφώνεται με χρήση αποκωδικοποιητή συσχέτισης (ή προσαρμοσμένων φίλτρων). Το πρόβλημα αυτό εξετάζει το λόγο σήματος προς θόρυβο του αποδιαμορφωμένου διανύσματος $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$.

- (α) Βρείτε τα \bar{E}_x , σ^2 και $\text{SNR}=\bar{E}_x/\sigma^2$ εάν όλα τα μηνύματα είναι ισοπίθανα.
- (β) Βρείτε τον ελάχιστο αριθμό διανυσμάτων βάσης και το νέο πίνακα \hat{A} όπως στην Άσκηση 2 και υπολογίστε τα νέα \bar{E}_x , σ^2 και SNR .
- (γ) Εάν το νέο διάνυσμα εξόδου ισούται με $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}}$, είναι αμετάβλητος (invariant) ο μετασχηματισμός από το \mathbf{y} στο $\tilde{\mathbf{y}}$; Με άλλα λόγια, επηρεάζεται η P_e από το μετασχηματισμό;
- (δ) Συγκρίνετε τα \bar{b} και \bar{E}_x με το προηγούμενο σύστημα. Το νέο σύστημα υπερτερεί του προηγούμενου; Γιατί ή γιατί όχι;
- (ε) Το νέο σύστημα έχει τώρα 3 διαστάσεις που δε χρησιμοποιούνται. Επιθυμούμε να στείλουμε 8 επιπλέον μηνύματα δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο πίνακα \bar{A} :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A} \end{bmatrix}.$$

Συγκρίνετε τα \bar{b} και \bar{E}_x με το αρχικό σύστημα 6 διαστάσεων, καθώς και με το σύστημα 3 διαστάσεων του ερωτήματος (β).

6. Κανάλι αποθήκευσης σε δίσκο (Cioffi 1.12)

Η αποθήκευση δυαδικών δεδομένων σε δίσκο λεπτής μεμβράνης (thin-film disk) μπορεί να προσεγγιστεί από κανάλι προσθετικού Γκαουσιανού θορύβου ο οποίος εξαρτάται από την είσοδο. Συγκεκριμένα, η διασπορά του θορύβου εξαρτάται από την είσοδο (δηλαδή την τιμή που εγγράφεται στο δίσκο). Ο θόρυβος έχει την ακόλουθη κατανομή

$$p(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_1^2}} & \text{όταν } x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_0^2}} & \text{όταν } x = 0 \end{cases}$$

και $\sigma_1^2 = 31\sigma_0^2$. Οι είσοδοι στο κανάλι είναι ισοπίθανες.

- (α) Για οποιαδήποτε είσοδο, η έξοδος μπορεί να έχει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Στην ίδια γραφική παράσταση σχεδιάστε τις δύο πιθανές κατανομές πυκνότητας πιθανότητας (pdf's) της εξόδου. Δηλαδή, σχεδιάστε την κατανομή εξόδου για $x = 0$ και την κατανομή εξόδου για $x = 1$. Δείξτε (προσεγγιστικά) τις περιοχές απόφασης στη γραφική παράσταση.
- (β) Προσδιορίστε το βέλτιστο δέκτη συναρτήσε των σ_0 και σ_1 .
- (γ) Υπολογίστε τα σ_0^2 και σ_1^2 όταν $\text{SNR}=15$ dB. Ο SNR ορίζεται ως $\frac{E_x}{\frac{1}{2}(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)} = \frac{1}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}$.
- (δ) Υπολογίστε την P_e όταν $\text{SNR}=15$ dB.
- (ε) Τι συμβαίνει καθώς $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \rightarrow 0$; Μπορείτε να περιοριστείτε στη λογική (από φυσικής άποψης) περίπτωση όπου η σ_1 είναι σταθερή και πεπερασμένη και $\sigma_0 \rightarrow 0$.

7. Σύγκριση Φραγμάτων (Cioffi 1.21)

Θεωρούμε τον παρακάτω αστερισμό ο οποίος χρησιμοποιείται για μετάδοση σε κανάλι AWGN.

$$x_0 = (-1, -1)$$

$$x_1 = (1, -1)$$

$$x_2 = (-1, 1)$$

$$x_3 = (1, 1)$$

$$x_4 = (0, 3)$$

Για τα ερωτήματα (α) και (β) δώστε τις απαντήσεις συναρτήσει του σ .

- (α) Υπολογίστε το union bound για την P_e όταν χρησιμοποιείται αποκωδικοποιητής ML.
- (β) Υπολογίστε το nearest neighbor union bound για την P_e όταν χρησιμοποιείται αποκωδικοποιητής ML.
- (γ) Εάν SNR=14 dB, βρείτε την τιμή της P_e χρησιμοποιώντας το NNUB.