EE725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

7ο Μάθημα – 11 Ιουνίου 2007

Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι **AWGN** (συνέχεια)

- $\boxed{\text{Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN (συνέχεια)}}$
  - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5
- Κατηγορίες Αστερισμών

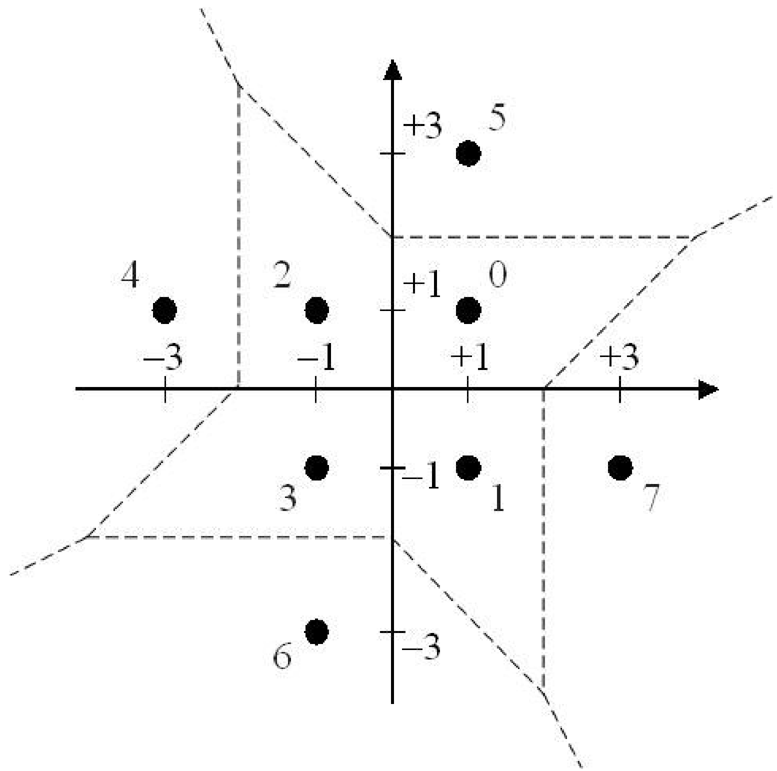
$\bar{P}_e$: Πιθανότητα σφάλματος ανά διάσταση

- Η σύγκριση συστημάτων με βάση την P_e δεν είναι πάντα δίκαιη. Για παράδειγμα, σε ένα κανάλι AWGN ένα σύστημα QPSK υπόκειται σε θόρυβο σε δύο διαστάσεις, ενώ ένα σύστημα BPSK σε θόρυβο σε μία διάσταση.
- Επιπλέον, το σύστημα BPSK μεταδίδει 1 ψηφίο ανά χρήση του καναλιού, ενώ το σύστημα QPSK 2 ψηφία ανά χρήση του καναλιού (άρα 1 ψηφίο ανά διάσταση).
- Επομένως, ένα πιο δίκαιο μέτρο σύγκρισης είναι η πιθανότητα σφάλματος ανά διάσταση: $\bar{P}_e = \frac{P_e}{N}$.
- Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την πιθανότητα σφάλματος ανά αριθμό μεταδιδόμενων ψηφίων: $\frac{P_e}{b} = \frac{P_e}{\log_2 M}$.

Ρυθμός Σφάλματος Ψηφίων (**Bit Error Rate – BER**)

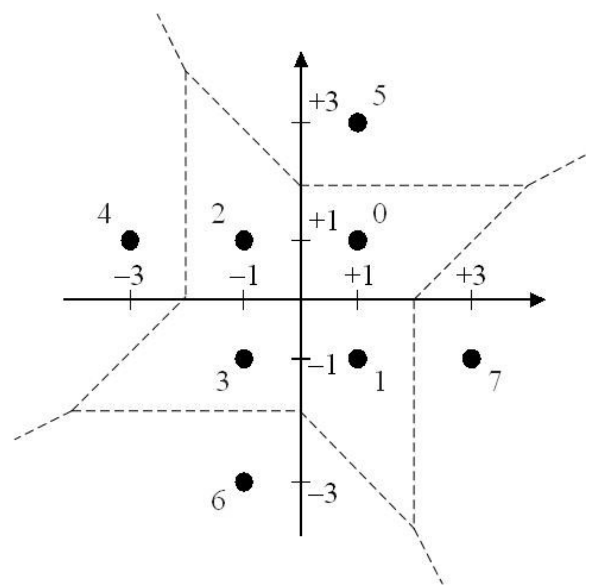
- Όταν μας ενδιαφέρει η πιθανότητα λανθασμένης μετάδοσης ψηψίων (bits) η P_e δεν αρκεί πάντα από μόνη της για την περιγραφή της απόδοσης ενός συστήματος.
- Έστω, για παράδειγμα, ένα σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί μόνο 2 σήματα (π.χ. BPSK) και ένα άλλο το οποίο χρησιμοποιεί 64 πιθανά σήματα (π.χ. 64-QAM όπως θα δούμε αργότερα). Σε ένα σύστημα BPSK όταν γίνει λάθος στο σήμα που αποκωδικοποιείται γίνεται αυτόματα και λάθος στο ψηφίο. Ωστόσο, σε ένα καλά σχεδιασμένο σύστημα 64-QAM ακόμα και αν γίνει λάθος στην ανίχνευση του σήματος στο δέκτη, κάποια από τα ψηφία ενδέχεται να αποκωδικοποιηθούν σωστά.
- Υπάρχουν διάφοροι παρόμοιοι ορισμοί για το BER. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε BER $=$ $Pr\{$αντιστροφή ψηφίου στο δέκτη$\}$ (το οποίο από κάποιους ονομάζεται πιθανότητα σφάλματος ψηφίου $\bar{P}_b$).

Παράδειγμα: **VDSL2 "8-QAM"**



Στο σχήμα, $d_{\min} = 2$. Ο αριθμός σε κάθε σήμα δηλώνει το αντίστοιχο μήνυμα. Για παράδειγμα, το σήμα $(+1, +3)$ αντιστοιχεί στο m_5 ή στην ακολουθία ψηφίων 101.

Παράδειγμα: **VDSL2 "8-QAM"** (2)



- Μέση ενέργεια του αστερισμού: $\mathcal{E}_x = \sum_m \|\mathbf{x}_m\|^2 p_m = \frac{1}{8}\left(4\frac{d_{\min}^2}{2} + 4\frac{5d_{\min}^2}{2}\right) = \frac{3}{2}d_{\min}^2 = 6$. $\bar{\mathcal{E}}_x = 3$.
- Εάν ο δέκτης χρησιμοποιεί προσαρμοσμένο φίλτρο: $\mathsf{SNR} = \frac{\mathcal{E}_x}{\sigma^2} = \frac{3d_{\min}^2}{2\sigma^2}$.

Παράδειγμα: **VDSL2 "8-QAM"** (3)

- Union bound: $P_e < 7Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e = \frac{P_e}{2} = 3.5Q(d_{\min}/2\sigma)$.
- Nearest neighbors: Όλα τα σήματα έχουν 4 γείτονες.
  - Τα $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και $\mathbf{x}_3$ έχουν 3 γείτονες σε απόσταση $d_{\min} = 2$ και 1 γείτονα σε απόσταση $2\sqrt{2}$.
  - Τα $\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$ και $\mathbf{x}_7$ έχουν 1 γείτονα σε απόσταση $d_{\min} = 2$, 1 γείτονα σε απόσταση $2\sqrt{2}$ και 2 γείτονες σε απόσταση $2\sqrt{5}$.
  - NNUB: $P_e < 4Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e < 2Q(d_{\min}/2\sigma)$.
  - Εάν κρατήσουμε μόνο τους πιο κοντινούς γείτονες κάθε σήματος: $P_e \approx \sum_{m=0}^{3} \frac{1}{8} 2Q(d_{\min}/2\sigma) + \sum_{m=4}^{7} \frac{1}{8} Q(d_{\min}/2\sigma) = 1.5Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e \approx 0.75Q(d_{\min}/2\sigma)$.
- Παρατηρούμε ότι τα εξωτερικά σήματα του αστερισμού είναι λιγότερο επιρρεπή σε σφάλμα μετάδοσης από ότι τα εσωτερικά.

Παράδειγμα: **VDSL2 "8-QAM"** (4)

- Έστω ότι μεταδόθηκε το $\mathbf{x}_0$. Θεωρούμε μόνο τους γείτονές του σε απόσταση $d_{\min}$. Εάν αντί για $\mathbf{x}_0$ ο δέκτης αποφασίσει $\mathbf{x}_1$ ή $\mathbf{x}_2$ θα εμφανιστεί σφάλμα (αναστροφή) σε 1 από τα 3 ψηφία. Εάν αποφασίσει $\mathbf{x}_5$ θα εμφανιστεί σφάλμα σε 2 ψηφία. Επομένως, ο μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων όταν συμβεί σφάλμα κατά την αποκωδικοποίηση του $\mathbf{x}_0$ ισούται προσεγγιστικά με $n_b(0) \approx \frac{4}{3}$. Παρομοίως, $n_b(1) = n_b(2) = n_b(3) \approx \frac{4}{3}$.
- Έστω, τώρα, ότι μεταδίδεται το $\mathbf{x}_5$. Εάν αντί για $\mathbf{x}_5$ ο δέκτης αποφασίσει $\mathbf{x}_0$ θα εμφανιστεί σφάλμα (αναστροφή) σε 2 από τα 3 ψηφία. Συνεπώς, $n_b(5) = n_b(6) = n_b(7) = n_b(8) \approx 2$.
- Μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων δεδομένου ότι συνέβη σφάλμα: $N_b \approx \frac{5}{3}$.
- Μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων: $P_b \approx N_b Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) \approx \frac{5}{3} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$. (δεν είναι πιθανότητα – ενδέχεται να υπερβαίνει το 1).
- $\text{BER} = \bar{P}_b = \frac{P_b}{b} \approx \frac{5}{9} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$.
- Συνήθως, η ποσότητα που καθορίζει την P_e και το BER είναι το όρισμα της $Q()$ η οποία ελαττώνεται (σχεδόν) εκθετικά. Ο αριθμός των γειτόνων ή το N_b επιδρά σημαντικά μόνο όταν έχει μεγάλη τιμή ή σε χαμηλούς SNR.

Πώς συγκρίνουμε διαφορετικές διαμορφώσεις μεταξύ τους;

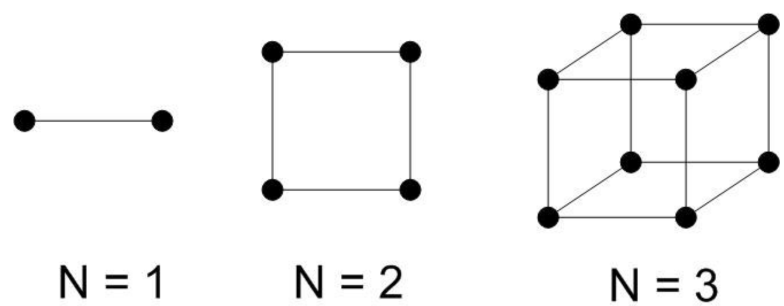
- Για να υλοποιήσουμε τις συναρτήσεις βάσης οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση χρησιμοποιούμε τους πόρους του καναλιού: χρόνο, συχνότητα και χώρο. Κάθε μία από τις N διαστάσεις έχει κόστος γιατί απαιτεί χρήση κάποιων από τους πόρους του συστήματος.
- Για παράδειγμα, ένα σύστημα 2 διαστάσεων μπορεί να υλοποιείται με εναλλάξ μετάδοση στο χρόνο κάθε διάστασης ή με χρήση δύο περιοχών συχνοτήτων.
- Για δίκαιη σύγκριση συστημάτων, πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όλες οι παρακάτω ποσότητες:
  1. Ο ρυθμός μετάδοσης R.
  2. Η χρησιμοποιούμενη ισχύς P_x.
  3. Το συνολικό εύρος ζώνης W που χρησιμοποιεί το σύστημα.
  4. Η περίοδος T_s που διαρκεί η μετάδοση κάθε συμβόλου.
  5. Το BER ή η P_e.
- Αν οι παραπάνω ποσότητες κανονικοποιηθούν κατάλληλα, 3 ποσότητες αρκούν για σύγκριση συστημάτων: **1**. Ο αριθμός ψηφίων ανά διάσταση $\bar{b} = \frac{b}{N}$, **2**. Η ενέργεια ανά διάσταση $\bar{\mathcal{E}}_x = \frac{\mathcal{E}_x}{N}$ και **3**. Η κανονικοποιημένη πιθανότητα σφάλματος $\bar{P}_e = \frac{P_e}{N}$.

Κατηγορίες Αστερισμών

- Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN (συνέχεια)
- Κατηγορίες Αστερισμών
  - Cioffi Ch. 1

Κυβικοί Αστερισμοί (**Cubic Constellations**)

- Αριθμός διαστάσεων $N =$ αριθμός bits b.
- Αντιστοιχία μίας συνάρτησης βάσης ϕ_m σε κάθε bit.
- Γραμμική διαμόρφωση.
- Χρησιμοποιούνται συχνά σε απλά κανάλια.



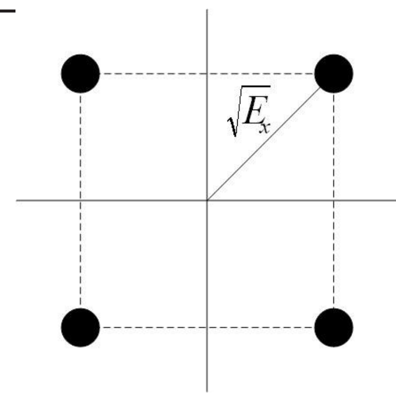
Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα

- Binary Antipodal: 2 σήματα (N=1), $x_0(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x}\phi(t) = -x_1(t)$.
  - Binary Phase Shift Keying (BPSK): $\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}, \;\; t \in [0, T]$, 0 αλλού.
  - Bipolar (NRZ): $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \;\; t \in [0, T]$, 0 αλλού.
  - Κωδικοποίηση Manchester (Bi-phase level): $\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [\frac{T}{2}, T] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$
  - Τι εύρος ζώνης απαιτεί κάθε μία από τις παραπάνω $\phi(t)$;
- On-Off Keying (OOK): 2 σήματα (N=1), $x_0(t) = \sqrt{2\mathcal{E}_x}\phi(t)$. $x_1(t) = 0$.
  - $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \;\; t \in [0, T]$, 0 αλλού.
  - Υποδεέστερη κατά 3 dB σε σχέση με binary antipodal αστερισμούς (γιατί;)
  - Χρησιμοποιείται σε οπτικά συστήματα.

Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα – **QPSK**

- Quadrature Phase Shift Keying (QPSK): 4 σήματα (2 bits $\rightarrow N = 2$).
- $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού. $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού.
- $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2] = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[-1 \; -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[-1 \; +1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[+1 \; -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[+1 \; +1] \end{cases}$
- Ίδιο εύρος ζώνης με τη BPSK. $d^2_{\min,\text{BPSK}} = 2d^2_{\min,\text{QPSK}}$. Ωστόσο, εάν η ενέργεια ανά διάσταση της QPSK ισούται με την ενέργεια της BPSK η $\bar{P}_e$ της QPSK ισούται με την P_e της BPSK.

QPSK: Υπολογισμός P_e



- Θεωρούμε ότι όλα τα σήματα μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα.
- Πιθανότητα σωστής λήψης: $P_c = \sum_{i=0}^{3} P_{c|i} p_{\mathbf{x}_i} = P_{c|i} \overset{\text{γιατί;}}{=} \left(1 - Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right)\left(1 - Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right) = 1 - 2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] + \left(Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right)^2$.
- Πιθανότητα σφάλματος: $P_e = 1 - P_c = 2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] - \left(Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right)^2 < 2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]$ (NNUB) $\Rightarrow \bar{P}_e \approx Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] = Q\left[\frac{\sqrt{2\mathcal{E}_x}}{2\sigma}\right] = Q\left[\frac{2\sqrt{\bar{\mathcal{E}}_x}}{2\sigma}\right] = Q\left[\frac{d_{\min,\text{BPSK}}}{2\sigma}\right]$.