EE725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

2ο Μάθημα – 10 Μαΐου 2007

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- $\boxed{\text{Βασικές έννοιες στοχαστικών ανελίξεων και σημάτων και συστημάτων.}}$
  - Στοχαστικές Ανελίξεις: Proakis Ch. 2, Lee & Messerschmitt Ch. 3
  - Σήματα και Συστήματα: Proakis Ch. 2, Lee & Messerschmitt Ch. 2

Στοχαστικές Ανελίξεις (**Random Processes**)

- Διακριτού χρόνου $\{X_k\}$: Μια ακολουθία τ.μ. $\{X_k\}$ με ακέραιο δείκτη k.
- Συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$: Μια συνάρτηση του χρόνου t της οποίας τα δείγματα $X(t = \tau)$ είναι τ.μ.
- Οι τιμές μιας στοχαστικής ανέλιξης μπορεί να είναι διακριτές (π.χ. αριθμός αυτοκινήτων που περνούν από τα διόδια από τις 10 έως τις 11 π.μ. κάθε ημέρα) ή συνεχείς (π.χ. η θερμοκρασία στην Πάτρα).
- Μια στοχαστική ανέλιξη αποτελείται από ένα σύνολο (πιθανώς άπειρων) δειγματικών συναρτήσεων.
- Παρόλο που οι στοχαστικές ανελίξεις είναι τυχαίες, γνωρίζουμε, όπως και στην περίπτωση των τ.μ., κάποιες ιδιότητές τους.

Στοχαστικές Ανελίξεις (2)

- Γενική Περιγραφή: με χρήση από κοινού σ.π.π. (ή σ.μ.π.). Για παράδειγμα, η πιθανότητα τα δείγματα $k = 1, 2, \ldots N$ της στοχαστικής ανέλιξης $\{X_k\}$ να ισούνται με x_k ισούται με $p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.
- Η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t)\}$ είναι γκαουσιανή εάν οποιοδήποτε σύνολο δειγμάτων της είναι από κοινού γκαουσιανές τ.μ.
- Μέση τιμή στοχαστικής ανέλιξης: $m_k = E[X_k]$, $m(t) = E[X(t)]$ (στη γενική περίπτωση εξαρτάται από τη χρονική στιγμή!).
- Αυτοσυσχέτιση: $R_{XX}(k, l) = E[X_k X_l^*]$, $R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)^*]$.
  - Παράδειγμα 1: Στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει διαδοχική ρίψη κέρματος: Δύο οποιαδήποτε δείγματα είναι <u>ασυσχέτιστα</u> (εάν το κέρμα δεν είναι ‘πειραγμένο’).
  - Παράδειγμα 2: Στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει τη θερμοκρασία στην Πάτρα: Η αυτοσυσχέτιση είναι μη μηδενική.

Στοχαστικές Ανελίξεις (3) – Στασιμότητα

- Μια στοχαστική ανέλιξη είναι Στάσιμη κατά τη Στενή Έννοια (Strict Sense Stationary - SSS) όταν $f(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k}) = f(x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, \ldots, x_{t_k+t})$. Όταν, δηλαδή, η από κοινού σ.π.π. εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων και όχι από τις ακριβείς τους χρονικές στιγμές (παρόμοια ορίζεται η SSS για διακριτές στοχαστικές ανελίξεις).
- Μια στοχαστική ανέλιξη είναι Στάσιμη κατά την Ευρεία Έννοια (Wide Sense Stationary - WSS) όταν
  - $m(t) = \mu$ (σταθερή) και
  - $R_{XX}(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2)$ (εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων).
- SSS $\Rightarrow$ WSS. WSS + γκαουσιανή $\Rightarrow$ SSS.

Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις

- Μια στάσιμη στοχαστική ανέλιξη έχει άπειρη ενέργεια (γιατί;).
- Επομένως, δεν είναι δυνατόν να οριστεί μετασχηματισμός Fourier μιας στάσιμης στοχαστικής ανέλιξης.
- Για τη στατιστική περιγραφή στάσιμων στοχαστικών ανελίξεων στο πεδίο της συχνότητας χρησιμοποιείται η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (ή Φάσμα Ισχύος) (Power Spectral Density - PSD).
- Όπως θα δούμε, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει πόσο γρήγορα 'αποσυσχετίζεται' ένα σήμα, σε αναλογία με το Φάσμα ενός νομοτελειακού σήματος το οποίο περιγράφει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το σήμα. Επομένως, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει την κατανομή της ισχύος στο πεδίο της συχνότητας.

Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις (2)

- Ισχύς στάσιμης στοχαστικής ανέλιξης: $R_x(0) = E[|X_k|^2]$, $R_x(0) = E[|X(t)|^2]$.
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος: $S_X(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k)e^{-j\omega kT}$, $S_X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$.
- Με χρήση ιδιοτήτων μετασχηματισμού Fourier, $R_x(0) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} S_X(e^{j\omega T})d\omega$, $R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega)d\omega$.
- Η αυτοσυσχέτιση είναι συζυγώς συμμετρική (conjugate symmetric): $R_X(\tau) = R_X^*(-\tau) \Rightarrow$ η $S(j\omega)$ παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορεί, επίσης, να αποδειχθεί εύκολα ότι η $S(j\omega)$ είναι μη αρνητική (π.χ. Lee & Messerschmitt Prob. 3-9).

Ετεροσυσχέτιση, Αμοιβαία Στασιμότητα, Μιγαδικές Στοχαστικές Ανελίξεις

- Ετεροσυσχέτιση $R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y^*(t_2)]$.
- Οι $\{X(t)\}$ και $\{Y(t)\}$ είναι αμοιβαία στάσιμες κατά την ευρεία έννοια (jointly WSS) εάν η καθεμία τους είναι WSS και $R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2)$.
- Έστω η μιγαδική στοχαστική ανέλιξη $Z(t) = X(t) + jY(t)$ όπου $\{X(t)\}$ και $\{Y(t)\}$ πραγματικές. $R_{ZZ}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\{R_{XX}(t_1, t_2) + R_{YY}(t_1, t_2) + j[R_{YX}(t_1, t_2) - R_{XY}(t_1, t_2)]\}$.
- Η σταθερά $\frac{1}{2}$ είναι αυθαίρετη, αλλά χρησιμοποιείται ώστε να διατηρείται η ενέργεια στη μελέτη ζωνοπερατών (bandpass) συστημάτων.

Γραμμικά, Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

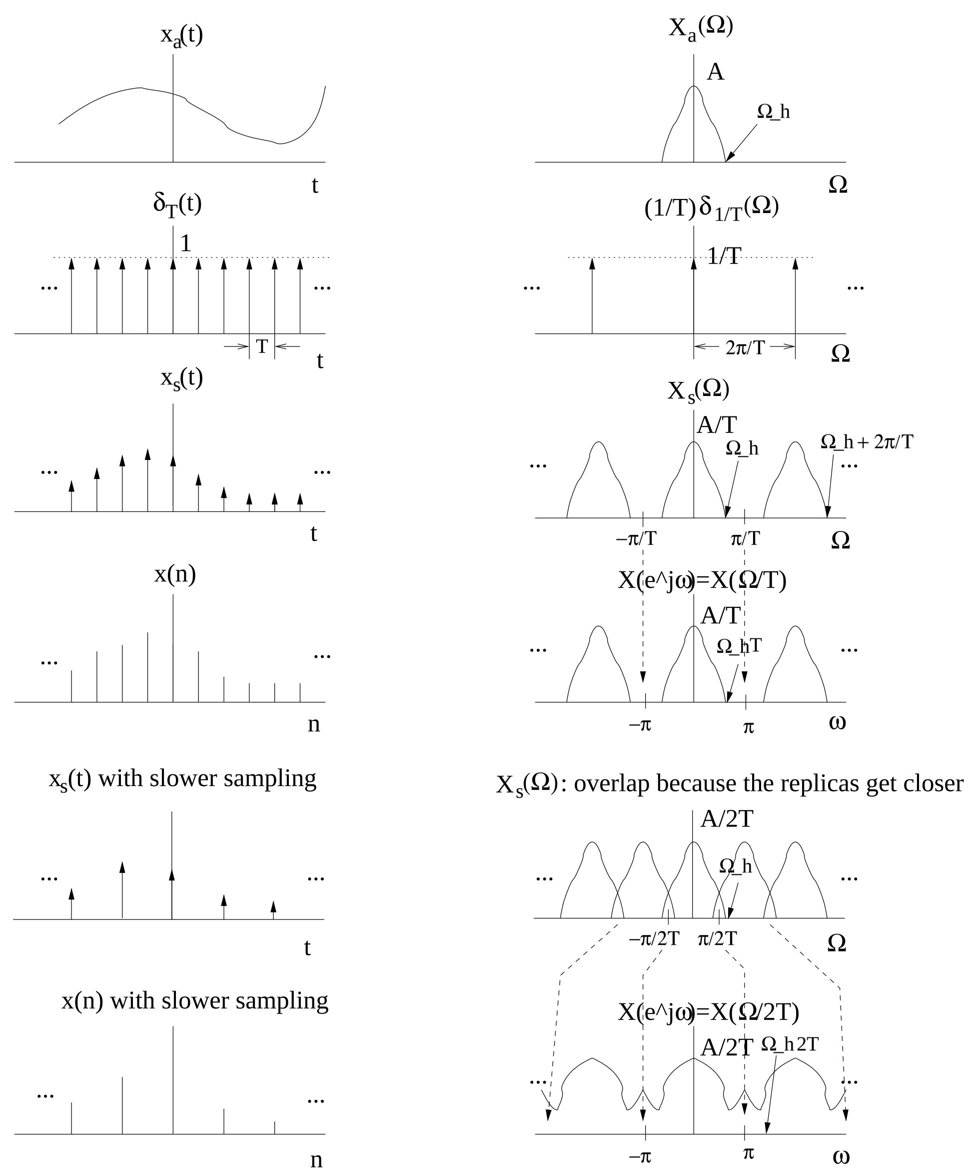
- Σύστημα S: Μια απεικόνιση της εισόδου του στην έξοδο: $y = s(x)$.
- Ένα σύστημα είναι γραμμικό όταν ισχύουν οι αρχές της ομοιογένειας και της υπέρθεσης: $s(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i s(x_i)$.
- Ένα σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο όταν έχει την ίδια έξοδο για μια δεδομένη είσοδο, ανεξάρτητα με το πότε η είσοδος εφαρμόζεται στο σύστημα.
- Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (Linear Time Invariant - LTI) μπορεί να περιγραφεί
  - Στο χρόνο με χρήση της κρουστικής απόκρισης (impulse response) h_i ($h(t)$).
  - Στη συχνότητα με χρήση της συνάρτησης μεταφοράς (transfer function) $H(z)$ ($H(s)$) και της απόκρισης συχνότητας (frequency response) $H(e^{j\omega T})$ ($H(j\omega)$).
- Πώς μπορούμε να περιγράψουμε ένα Γραμμικό, Χρονικά Μεταβαλλόμενο σύστημα;

Θεώρημα Δειγματοληψίας **Shannon/Nyquist**

- Έστω συνεχές σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$ το οποίο δειγματοληπτείται ομοιόμορφα με περίοδο δειγματοληψίας T.

- Ο μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x_k = x(kT)$ ισούται με

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left[j\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right].$$

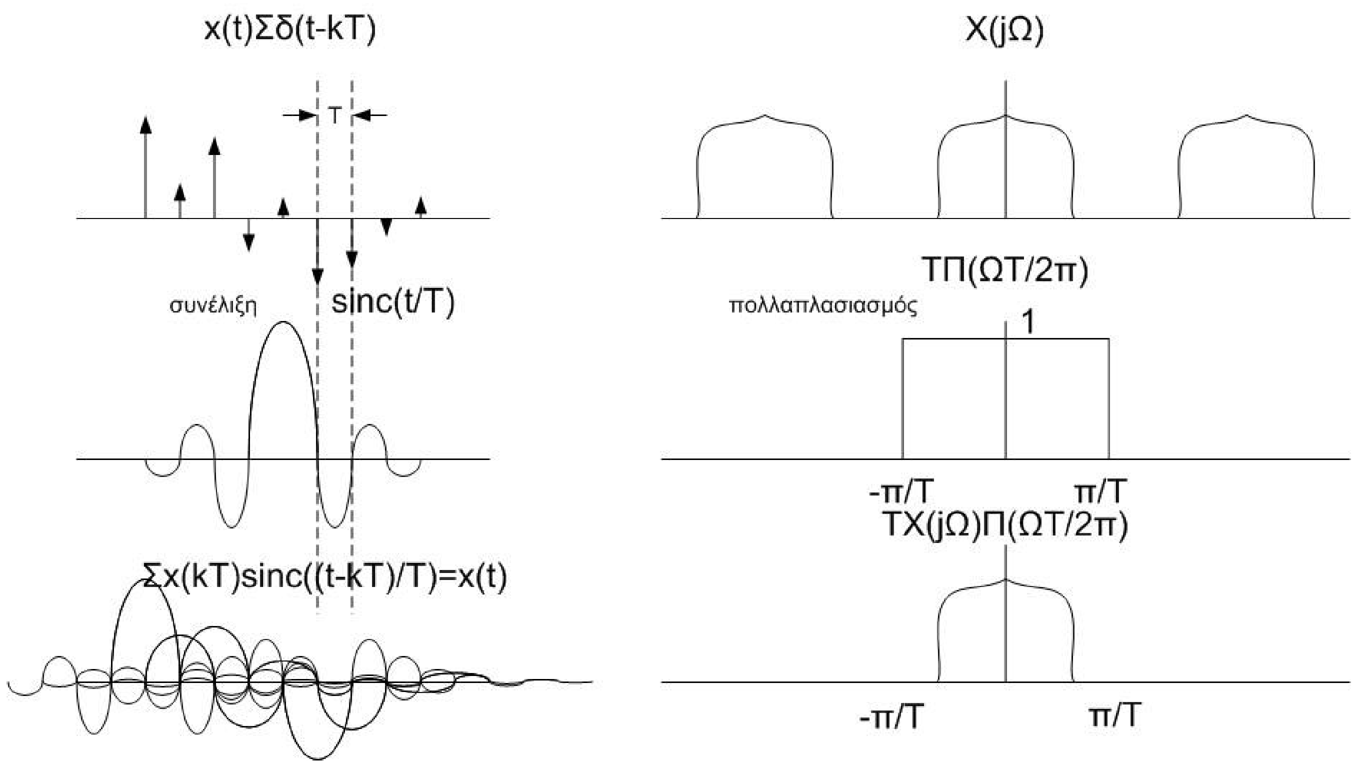

x_a(t)
t
δ_T(t)
1
T
x_s(t)
x(n)
n
x_s(t) with slower sampling
x(n) with slower sampling
X_a(Ω)
A
Ω_h
Ω
(1/T)δ_1/T(Ω)
1/T
2π/T
X_s(Ω)
A/T
Ω_h + 2π/T
−π/T
π/T
X(e^jω)=X(Ω/T)
Ω_hT
−π
π
ω
X_s(Ω): overlap because the replicas get closer
A/2T
−π/2T
π/2T
X(e^jω)=X(Ω/2T)
Ω_h2T

Θεώρημα Δειγματοληψίας **Shannon/Nyquist** (2)

- Επομένως, η ανακατασκευή ενός συνεχούς σήματος από τα δείγματά του είναι πάντοτε δυνατή εφόσον η δειγματοληψία γίνει με ρυθμό τουλάχιστον διπλάσιο της μεγαλύτερης συχνότητας του σήματος.
- Ικανή, αλλά όχι αναγκαία συνθήκη (γιατί;)
- Ανακατασκευή σήματος. Με χρήση επίπεδου ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου κέρδους 1. Στο πεδίο του χρόνου:

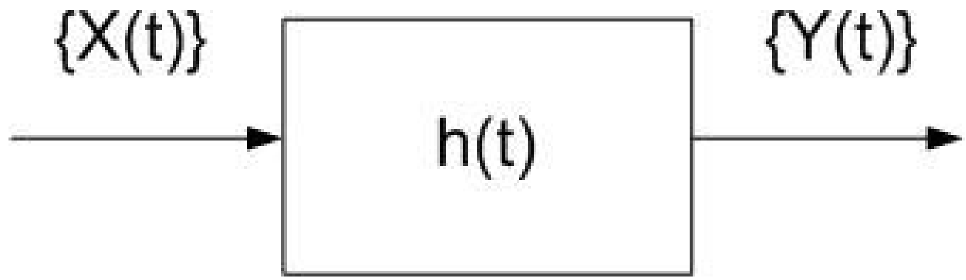
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin\left[\frac{\pi(t-kT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-kT)}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \mathsf{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right).$$

Θεώρημα Δειγματοληψίας **Shannon/Nyquist** (3)



- Το ιδανικό φίλτρο είναι υλοποιήσιμο; Η sinc;

Συστήματα και Στοχαστικές Ανελίξεις



- Έστω μια WSS στοχαστική ανέλιξη $\{X(t)\}$ ($\{X_k\}$) η οποία διέρχεται από το LTI σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Μπορεί να αποδειχθεί (με απλές πράξεις) ότι:
  - $m_Y = m_X H(0)$ ($m_Y = m_X H(z=1)$)
  - $R_Y(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_X(\tau)$ ($R_Y(m) = h_m * h^*_{-m} * R_X(m)$)
  - $S_Y(j\omega) = S_X(j\omega)|H(j\omega)|^2$ ($S_Y(e^{j\omega T}) = S_X(e^{j\omega T})|H(e^{j\omega T})|^2$)
  - $S_Y(s) = S_X(s)H(s)H^*(-s^*)$ ($S_Y(z) = S_X(z)H(z)H^*(1/z^*)$).

Στοχαστικές Ανελίξεις και Δειγματοληψία

- Έστω μια WSS στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$ η οποία δειγματοληπτείται ομοιόμορφα με περίοδο T: $Y_k = X(kT)$.
  - $R_{YY}(k,l) = E[X(kT)X(lT)^*] = R_X((k-l)T)$. Άρα η αυτοσυσχέτιση της ακολουθίας $\{Y_k\}$ προκύπτει από την αυτοσυσχέτιση της $\{X(t)\}$ με δειγματοληψία.
  - $S_Y(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_X(j(\omega - \frac{2\pi k}{T}))$, παρόμοια με την περίπτωση νομοτελειακών σημάτων.
- Επομένως, η ανακατασκευή της συνεχούς στοχαστικής ανέλιξης γίνεται με χρήση βαθυπερατού φίλτρου (παλμών sinc). Ωστόσο, σε αντίθεση με τα νομοτελειακά σήματα, για την ανακατασκευασμένη στοχαστική ανέλιξη $\{\hat{Y}(t)\}$ ισχύει $E[(\hat{Y}(t) - Y(t))^2] = 0$ και όχι $\hat{Y}(t) = Y(t)$. Για τους δικούς μας σκοπούς (ανάλυση και σχεδίαση Ψηφιακών Συστημάτων Επικοινωνιών) η συνθήκη $E[(\hat{Y}(t) - Y(t))^2] = 0$ είναι επαρκής.