ΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

5ο Μάθημα – 1η Ιουνίου 2007

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

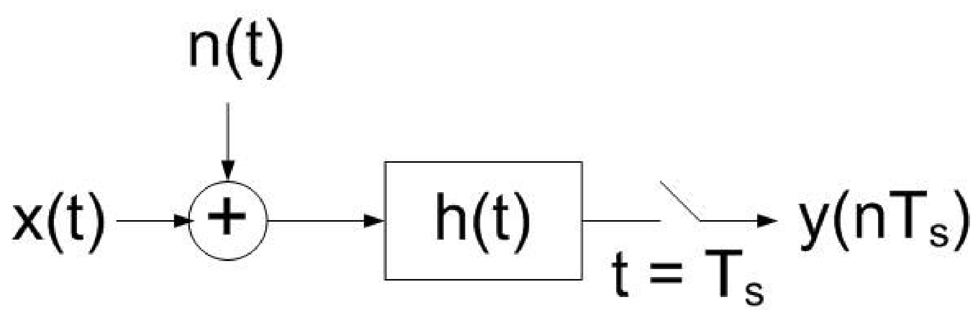
- Προσαρμοσμένο φίλτρο (συνέχεια).
  - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5
- Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)

Σηματοθορυβικός Λόγος Δέκτη (**Receiver SNR**)

- SNR στην έξοδο του δέκτη (τόσο για διακριτές όσο και για συνεχείς στοχαστικές ανελίξεις):

$$\text{SNR} = \frac{\text{ενέργεια διαμορφωμένου σήματος}}{\text{μέση τετραγωνική τιμή θορύβου}}.$$

- Στο δέκτη του σχήματος θέλουμε να βρούμε το φίλτρο $h(t)$ που μεγιστοποιεί τον SNR στην έξοδο. Ο θόρυβος είναι AWGN.



Μεγιστοποίηση **SNR** του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο

- Ενέργεια σήματος τη χρονική στιγμή T_s: $|y(T_s)|^2 = \left|x(t) * h(t)|_{t=T_s}\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau|_{t=Ts}\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(T_s-\tau)d\tau\right|^2 = |\langle x(t), h(T_s-t)\rangle|^2$
- Μέση ενέργεια θορύβου στην έξοδο του $h(t)$: $E[|\tilde{n}(T_s)|^2] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(T_s-\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} n^*(\tau')h^*(T_s-\tau')d\tau'\right] =$ $E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(\tau-\tau')h(T_s-\tau)h^*(T_s-\tau')d\tau d\tau'\right] =$ $\frac{\mathcal{N}_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |h(T_s-\tau)|^2 d\tau = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\langle h(t), h(t)\rangle = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\|\mathbf{h}\|^2.$

Μεγιστοποίηση **SNR** του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο (2)

- Επομένως, SNR $= \frac{2}{\mathcal{N}_0}\frac{|\langle x(t), h(T_s - t)\rangle|^2}{\|\mathbf{h}\|^2}$.
- Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, $|\langle x(t), h(T_s - t)\rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{h}\|^2$, με $=$ όταν $x(t) = kh^*(T_s - t)$ ή, ισοδύναμα, $h(t) = Kx^*(t - T_s)$. (γιατί $\langle h(T_s - t), h(T_s - t)\rangle = \langle h(t), h(t)\rangle$;)
- Συνεπώς, SNR $\max = \frac{2}{\mathcal{N}_0}\frac{K^2\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{x}\|^2}{K^2\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{2}{\mathcal{N}_0}\|\mathbf{x}\|^2$, όταν το φίλτρο $h(t)$ είναι <u>προσαρμοσμένο</u> στο σήμα $x(t)$.
- Όπως θα δούμε αργότερα, η πιθανότητα λάθους P_e στο δέκτη εξαρτάται από τον SNR. Επομένως, με χρήση δέκτη προσαρμοσμένων φίλτρων βελτιστοποιούμε την απόδοση του συστήματος.

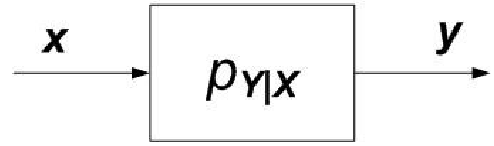
Ανίχνευση μηνυμάτων (**Discrete Data Detection**)

- Προσαρμοσμένο φίλτρο (συνέχεια).
- Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)
  - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5, Lee & Messerschmitt 2nd ed. Ch. 9

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων

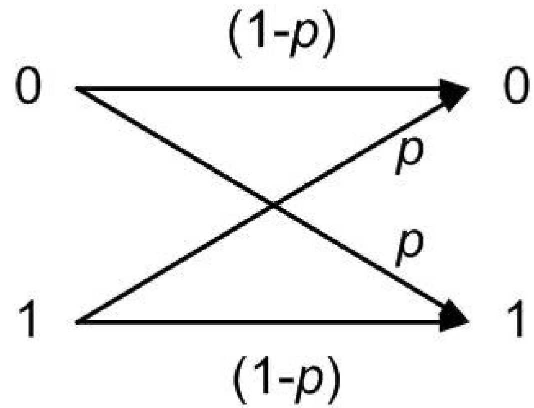
- Η λαμβανόμενη κυματομορφή $y(t)$ στο δέκτη δεν ισούται με την κυματομορφή $x_i(t)$ που μεταδίδεται από τον πομπό (λόγω θορύβου και καναλιού).
- Σκοπός της ανίχνευσης είναι να βρεθεί ποια κυματομορφή $x_i(t)$ (και άρα ποιο διάνυσμα $\mathbf{x}_i$ ή, ισοδύναμα, ποιο μήνυμα m_i) έστειλε ο δέκτης.
- Για την ανάλυση της ανίχνευσης θα δουλέψουμε με διανύσματα. Θα θεωρήσουμε, δηλαδή, ότι με χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου N κλάδων, η κυματομορφή $y(t)$ έχει αναλυθεί (αποδιαμορφωθεί) σε συνιστώσες $y_1, y_2, \ldots, y_N$.
- Επομένως, το πρόβλημα είναι το εξής: Δεδομένου του ληφθέντος διανύσματος $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_N]$ να βρεθεί το μεταδοθέν διάνυσμα $\mathbf{x_i}$.

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων (2)



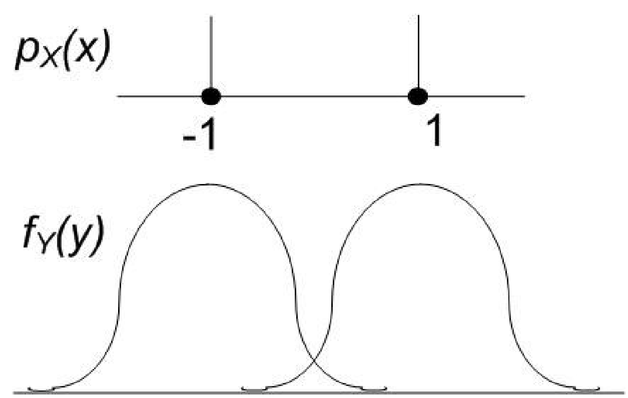
- Για την ανάλυση και τη σχεδίαση του ανιχνευτή χρησιμοποιούμε το διανυσματικό μοντέλο καναλιού του σχήματος.
- Η $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ χαρακτηρίζει πλήρως το διακριτό κανάλι. Εξαρτάται από το κανάλι, από το θόρυβο, από τις κυματομορφές που χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση και από τη σχεδίαση του συστήματος.
- Θα θεωρήσουμε, προς το παρόν, ότι γνωρίζουμε την $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$. Αργότερα θα δούμε παραδείγματα συστημάτων και υπολογισμού της $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$.
- Ο ανιχνευτής / εκτιμητής έχει ως είσοδο το $\mathbf{y}$ και ως έξοδο την εκτίμηση $\hat{\mathbf{x}}$ του σήματος που μεταδόθηκε. Επειδή η σχέση μηνύματος m_i και διανύσματος $\mathbf{x}_i$ είναι 1 - προς - 1, ο δέκτης μπορεί να εκτιμήσει από το $\hat{\mathbf{x}}$ ποιο μήνυμα $\hat{m}$ μεταδόθηκε.
- Σφάλμα μετάδοσης εμφανίζεται όταν $\hat{m} = m_j$, $j \neq i$, όπου m_i το μήνυμα που μεταδόθηκε (ισοδύναμα, όταν $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}_i$).

Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (**Binary Symmetric Channel**)



- $p_{Y|X}(0|1) = p_{Y|X}(1|0) = p$ (αναστροφή ψηφίου)
- $p_{Y|X}(0|0) = p_{Y|X}(1|1) = 1 - p$
- Ένα από τα πιο χρήσιμα μοντέλα στις Ψηφιακές Επικοινωνίες.

Δυαδική μετάδοση που υπόκειται σε γκαουσιανό θόρυβο



- Υποθέτουμε ότι $y = x + n$, όπου $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$. Επομένως, $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y - x)$.
- $f_{Y|X}(y|x = -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}}$, $f_{Y|X}(y|x = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θα το χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον

Κατανομή ληφθέντος σήματος, Πιθανότητα Λάθους

- Από τον κανόνα Bayes, εάν ο αστερισμός αποτελείται από M σύμβολα, το καθένα από τα οποία μεταδίδεται με πιθανότητα $p_X(x_m)$,

$$p_Y(y) = \sum_{m=0}^{M-1} p_{Y|X}(y|x_m)p_X(x_m) \text{ ή } f_Y(y) = \sum_{m=0}^{M-1} f_{Y|X}(y|x_m)p_X(x_m).$$

- Πιθανότητα Λάθους (Probability of Error): $P_e \triangleq Pr\{\hat{m} \neq m\}$.
- Πιθανότητα σωστής λήψης: $P_c = 1 - P_e = Pr\{\hat{m} = m\}$.

Ανίχνευση Μέγιστης εκ των Υστέρων Πιθανότητας (**Maximum a posteriori probability (MAP) detection**)

- Έστω ότι ο πομπός εκπέμπει το μήνυμα m_i και ότι ο δέκτης λαμβάνει σήμα $\mathbf{y}$. $P_{c|\mathbf{y}} = Pr(\hat{m} = m_i | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = p_{M|\mathbf{Y}}(m_i|\mathbf{y}) = p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})$ (γιατί;)
- Ορισμός: Ο ανιχνευτής MAP επιλέγει το σήμα $\mathbf{x}_i$ που μεγιστοποιεί την εκ των υστέρων πιθανότητα $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})$ δεδομένου ότι ελήφθη το σήμα $\mathbf{y}$.
- Από το θεώρημα Bayes, $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y}) = \frac{p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}$.
- Δεδομένου ότι ο παρονομαστής $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ είναι κοινός για όλες τις $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})$, ο ανιχνευτής MAP μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής:

$$\boxed{\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \ \forall\, j \neq i.}$$

Ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας (**Maximum Likelihood (ML) detection**)

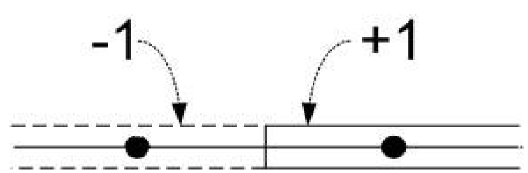
- Εάν όλα τα μεταδιδόμενα σύμβολα (και μηνύματα) είναι ισοπίθανα: $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{M}, \ i = 0, 1, \ldots, M-1$, ο κανόνας ανίχνευσης MAP απλοποιείται στον κανόνα ανίχνευσης ML

$$\boxed{\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j) \ \forall\ j \neq i.}$$

- Ο ανιχνευτής ML χρησιμοποιείται συχνά σε Ψηφιακά Συστήματα. Ωστόσο, μερικές φορές η εύρεση αναλυτικής έκφρασης για τις $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ ενδέχεται να είναι αδύνατη ή οι εκφράσεις μπορεί να είναι πολύπλοκες. Για το λόγο αυτό πολλοί δέκτες χρησιμοποιούν προσεγγιστικούς κανόνες (με αποτέλεσμα να αυξάνεται η πιθανότητα λάθους σε σχέση με την ανίχνευση ML).

Περιοχές Αποφάσεων (**Decision (Voronoi) Regions**)

- Προκειμένου να μην υπολογίζεται η τιμή των συναρτήσεων $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ (ή του γινομένου τους με τις $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)$) στο δέκτη κάθε φορά που λαμβάνεται ένα σήμα $\mathbf{y}$, μπορεί να έχει προσδιοριστεί εκ των προτέρων το σήμα $\mathbf{x}_i$ που προκύπτει από τον κανόνα ML (ή MAP) για κάθε πιθανή τιμή του λαμβανόμενου σήματος $\mathbf{y}$.
- Ο δέκτης προσδιορίζει την περιοχή του Ευκλείδειου χώρου (περιοχή απόφασης) στην οποία ανήκει το $\mathbf{y}$ το οποίο λαμβάνει, και με βάση την περιοχή αποφασίζει για το μεταδοθέν σήμα.
- Οι περιοχές απόφασης για το δέκτη ML του καναλιού με δυαδική μετάδοση και γκαουσιανό θόρυβο που εξετάσαμε ενωρίτερα φαίνονται στο σχήμα. Μαθηματικά, εάν $y < 0 \rightarrow x = -1$, ενώ εάν $y \geq 0 \rightarrow x = +1$.



- Θα δούμε στη συνέχεια ότι, στην περίπτωση γκαουσιανού καναλιού, οι κανόνες MAP και ML απλοποιούνται σημαντικά σε σχέση με τη γενική τους μορφή.

Θεώρημα Αντιστρεψιμότητας (**Reversibility Theorem**)

- Η εφαρμογή <u>αντιστρέψιμου</u> μετασχηματισμού στο διάνυσμα εξόδου $\mathbf{y}$ του καναλιού δεν επηρεάζει την απόδοση του ανιχνευτή MAP.
- Επομένως, στο σχήμα, εφόσον ο μετασχηματισμός F είναι αντιστρέψιμος, η εκτίμηση MAP που βασίζεται στο $\mathbf{y}$ θα είναι ίδια με την εκτίμηση MAP που βασίζεται στο $\mathbf{z}$.
- Φυσικά, οι περιοχές απόφασης των δύο ανιχνευτών MAP θα είναι, στη γενική περίπτωση, διαφορετικές.