EE725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

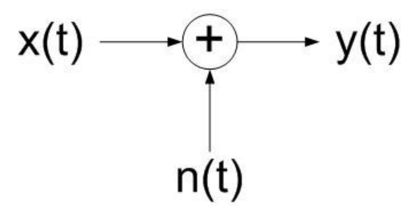
Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

6ο Μάθημα – 7 Ιουνίου 2007

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

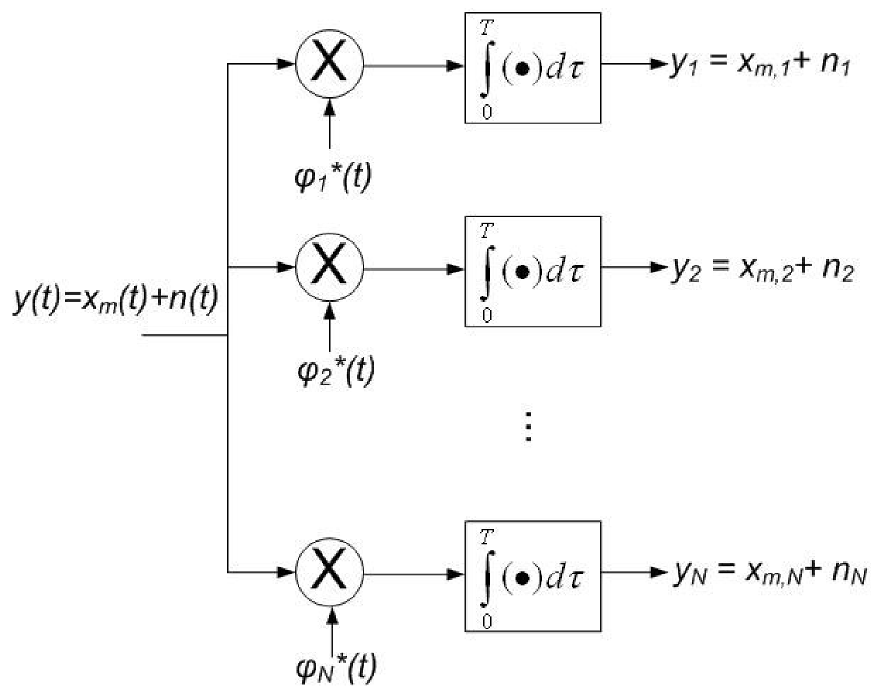
- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
  - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5
- Πιθανότητα Λάθους στο Κανάλι AWGN

Το κανάλι **AWGN**



- Ο $\{n(t)\}$ είναι Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος με $R_n(\tau) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(\tau)$ και $E[n(t)] = 0$. Τα δείγματά του ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0, \frac{\mathcal{N}_0}{2})$.
- Εάν υποθέσουμε ότι η μετάδοση διαρκεί T s, $y(t) = x(t) + n(t),\ t \in [0, T]$.
- Υποθέτουμε, επίσης, ότι το μεταδιδόμενο σήμα $x(t)$ ανήκει σε υπόχωρο $\mathcal{V}$ του $\mathcal{L}_2[0, T]$ διάστασης N. Άρα, μπορεί να εκφραστεί με χρήση των συναρτήσεων βάσης του $\mathcal{V}$: $x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i\phi_i(t)$.
- Ο θόρυβος $n(t)$ είναι, στη γενική περίπτωση, άπειρης διάστασης, και, επομένως, οι N συναρτήσεις βάσης $\phi_i(t)$ δεν αρκούν για την περιγραφή του: $n(t) = \sum_{i=1}^{N} n_i\phi_i(t) + n'(t)$, όπου $n'(t) \in \mathcal{V}^{\perp}$.

Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή



$$y_i = \int_0^T y(\tau)\phi_i^*(\tau)d\tau = \int_0^T (x_m(\tau) + n(\tau))\phi_i^*(\tau)d\tau = x_{m,i} + n_i.$$

Το ίδιο αποτέλεσμα, προφανώς, προκύπτει εάν χρησιμοποιήσουμε προσαρμοσμένα φίλτρα.

Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή (2)

- $n_i = \int_0^T n(\tau)\phi_i^*(\tau)d\tau$. Η τ.μ. n_i είναι γκαουσιανή με μέση τιμή 0. Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι $E[n_i n_j] = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta_{ij} = \sigma^2\delta_{ij}$.
- Επομένως, τα στοιχεία n_i του διανύσματος θορύβου $\mathbf{n}$ το οποίο υπερτίθεται στο διάνυσμα $\mathbf{x}_m$ είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστα και, επομένως, ανεξάρτητα (γιατί;).

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) = \prod_{i=1}^{N} p(y_i|x_{m,i}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_i - x_{m,i})^2}{2\sigma^2}}$$

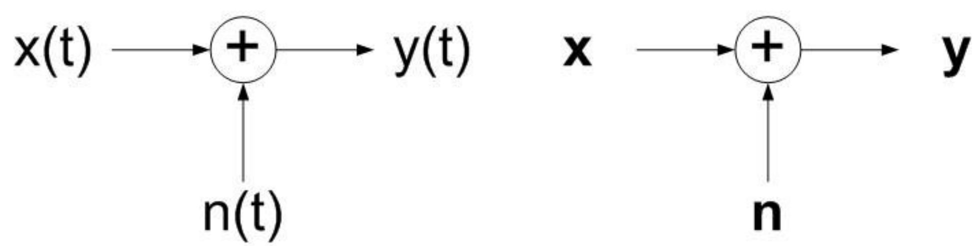
$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_{m,i})^2}{2\sigma^2}\right\}}.$$

- Υπολογίσαμε, λοιπόν, την $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ για το διανυσματικό μοντέλο του καναλιού AWGN!

Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή (3)

- Επομένως, αντί για το γκαουσιανό κανάλι αριστερά μπορούμε ισοδύναμα να χρησιμοποιούμε το διανυσματικό γκαουσιανό κανάλι δεξιά, όπου το $\mathbf{n}$ είναι ένα τυχαίο γκαουσιανό διάνυσμα N διαστάσεων με μηδενική μέση τιμή, ασυσχέτιστα μεταξύ τους στοιχεία n_i και κατανομή

$$p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\pi\mathcal{N}_0)^{N/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{N} |n_i|^2}{\mathcal{N}_0}} = \frac{1}{(\pi\mathcal{N}_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{\mathcal{N}_0}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma^2}}.$$



Irrelevance του $n'(t)$.

- Δεν έχουμε, ακόμα, απαντήσει στο εξής ερώτημα: Η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου και, στη συνέχεια, του διανυσματικού μοντέλου καναλιού για να εκτιμήσουμε το μεταδοθέν μήνυμα στο κανάλι AWGN, είναι ισοδύναμη με την εκτίμηση του m απευθείας από την $y(t)$ ή κατά τη μετατροπή έχει χαθεί κάποια πληροφορία;
- Μπορεί να αποδειχθεί ότι $E[n'(t)y_i] = 0$ (π.χ. Proakis Ch.5). Επομένως, το $n'(t)$ είναι ανεξάρτητο (γιατί;) των στοιχείων του $\mathbf{y}$ και, συνεπώς, δεν προσφέρει καμια πληροφορία για την εκτίμηση του $\mathbf{x}$.
- Θυμηθείτε και το θεώρημα προβολής: Δεδομένου ότι το σήμα $\mathbf{x}_m$ ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ διάστασης N, για να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης πρέπει να βρούμε την προβολή του $\mathbf{y}$ στον $\mathcal{V}$. Αυτό ακριβώς κάνουν ο αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων και ο συνελικτικός αποδιαμορφωτής.
- Άρα, η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου (ή συσχετιστικού αποδιαμορφωτή) διατηρεί όλη την πληροφορία που σχετίζεται με την ανίχνευση των $x_{m,i}$.
- Για την ολοκληρωμένη απόδειξη, με χρήση του ότι το $n'(t)$ είναι irrelevant βλ. Cioffi Ch. 1.

Ανίχνευση **MAP/ML** στο γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

- Είδαμε ότι, για το γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι,

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}}.$$

- Επομένως, ο κανόνας ανίχνευσης MAP για το γκαουσιανό κανάλι μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \ \forall \ j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \ \forall \ j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \ \forall \ j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)\} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j)\} \ \forall \ j \neq i$$

Ανίχνευση **MAP/ML** στο γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι (2)

- Κανόνας MAP:

$$\boxed{\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)\} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j)\} \ \forall\ j \neq i}$$

- Κανόνας ML (γιατί;):

$$\boxed{\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 \ \forall\ j \neq i}$$

- Άρα, ο ανιχνευτής ML επιλέγει το διάνυσμα $\mathbf{x}_i$ με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το διάνυσμα $\mathbf{y}$ στην έξοδο του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένου φίλτρου. Ο ανιχνευτής MAP χρησιμοποιεί την απόσταση σε συνδυασμό με μια σταθερά που εξαρτάται από την κατανομή των $\mathbf{x}_i$.

Πιθανότητα Λάθους στο Κανάλι **AWGN**

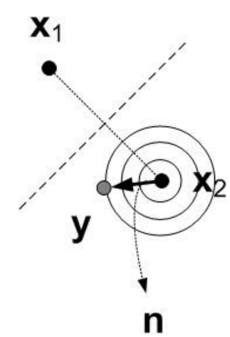
- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
- Πιθανότητα Λάθους στο Κανάλι AWGN
  - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5

Πιθανότητα Λάθους στο Κανάλι **AWGN**

- Διανυσματικό γκαουσιανό κανάλι: $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$.
- Πιθανότητα λάθους $P_e = \sum_{m=0}^{M-1} P_{e|m} p_m$, όπου $P_{e|m}$ η πιθανότητα λάθους δεδομένου ότι μεταδόθηκε το σημείο m του αστερισμού και p_m η πιθανότητα μετάδοσης του σημείου m.
- $P_e = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} P_{e|m}$ όταν όλα τα σύμβολα μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα.
- Περιστροφή αστερισμού: Εάν ο αστερισμός περιστραφεί στον Ευκλείδειο χώρο (σε κανάλια AWGN) η P_e δεν αλλάζει, επειδή η κατανομή του θορύβου παραμένει η ίδια και οι ευκλείδειες αποστάσεις τις οποίες χρησιμοποιεί ο ανιχνευτής MAP (και ML) διατηρούνται.
- Μετατόπιση αστερισμού: Η P_e παραμένει αμετάβλητη όταν ο αστερισμός μετατοπίζεται στον Ευκλείδειο χώρο.
- Για ένα δεδομένο αστερισμό, για να ελαχιστοποιήσουμε την ισχύ του, εάν $E[\mathbf{x}] \neq 0$ τον μετατοπίζουμε ώστε $E[\mathbf{x}] = 0$.
- Για λεπτομέρειες / αποδείξεις, βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1.

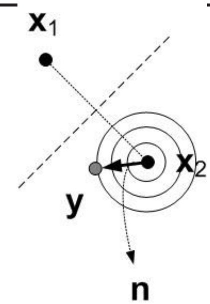
P_e για δυαδική μετάδοση

- Έστω ένας αστερισμός στο $N-$διάστατο χώρο με δύο σύμβολα και κανάλι AWGN. Ο ανιχνευτής ML θα επιλέξει το $\mathbf{x}_i$ με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το $\mathbf{y}$. Ισοδύναμα, μπορεί να χρησιμοποιήσει την προβολή του $\mathbf{y}$ στην κατεύθυνση $\mathbf{x_2} - \mathbf{x}_1$ (γιατί;)



- Εάν προβάλουμε το γκαουσιανό θόρυβο επάνω στην κατεύθυνση $\mathbf{x_1} - \mathbf{x}_2$ παραμένει γκαουσιανός.
- Επομένως, δεδομένου ότι μεταδόθηκε το $\mathbf{x}_2$, σφάλμα θα συμβεί όταν $\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\phi} \rangle > \frac{\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\|}{2}$, όπου $\boldsymbol{\phi}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

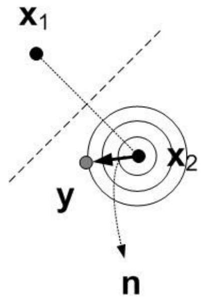
P_e για δυαδική μετάδοση (2)

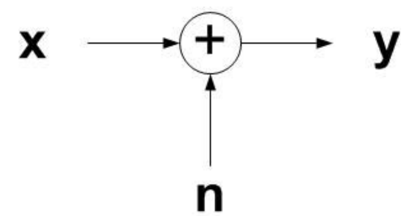


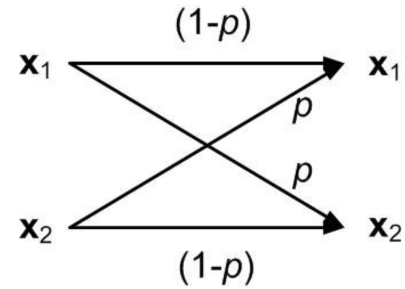
- Επομένως, εάν $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x}_1\| = d$, $P_e = Pr\left\{\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\phi} \rangle = \tilde{n} > \frac{d}{2}\right\}$.
- $P_{e|\mathbf{x}_1} = P_{e|\mathbf{x}_2} = P_e = \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} f_{\tilde{N}}(n)dn = \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn = \int_{\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \Rightarrow$

  $\boxed{P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right),}$ όπου $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ η συνάρτηση Q.
- Η Q δεν έχει αναλυτική έκφραση, αλλά μπορεί να προσεγγιστεί με φράγματα (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1 Appendix B, Lee & Messerschmitt Ch. 1).
- $Q(x) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ (χρήσιμο στη Matlab).

P_e για δυαδική μετάδοση (3)







- Για τον υπολογισμό της P_e χρησιμοποιήσαμε γκαουσιανό κανάλι με 2 μεταδιδόμενα σήματα: $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$.
- Διανυσματικό γκαουσιανό κανάλι: $f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}}$, $i = 1$ και 2.
- Εάν εκτιμήσουμε το κανάλι με κανόνα ML: $p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i|\mathbf{x}_i) = 1 - P_e = 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$. $p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2) = P_e \Rightarrow$ Το κανάλι από το $\mathbf{x}$ στο $\hat{\mathbf{x}}$ όταν χρησιμοποιείται δέκτης ML είναι το δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με $p = P_e$!
- Επομένως, ένα σύστημα μπορεί να περιγράφεται από διαφορετικά μοντέλα αναλόγως με την υλοποίηση και τα σήματα που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή του.

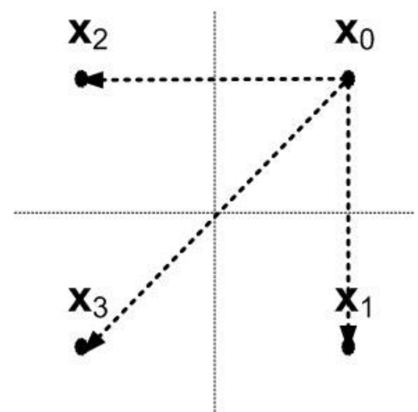
Ελάχιστη απόσταση αστερισμού

Η ελάχιστη απόσταση αστερισμού ορίζεται ως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συμβόλων του αστερισμού.

$$d_{\min} \triangleq \min_{i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|.$$

Όπως θα δούμε σύντομα, η πιθανότητα λάθους στο δέκτη εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη $\boldsymbol{d}_{\min}$ του αστερισμού.

Union Bound



- Υποθέτουμε ότι έχει μεταδοθεί το $\mathbf{x}_0$. Επομένως, η πιθανότητα λάθους ισούται με

$$P_{e|0} \overset{\text{γιατί;}}{=} \sum_{i=1}^{3} Pr\{\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i | \mathbf{x} = \mathbf{x}_0\} \overset{\text{γιατί;}}{<} \sum_{i=1}^{3} Q\left(\frac{d_{0,i}}{2\sigma}\right)$$

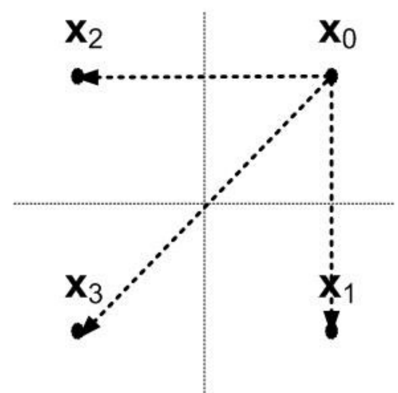
$$\overset{\text{γιατί;}}{<} \sum_{i=1}^{3} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) = 3Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right).$$

Union Bound (2)

- Ομοίως, για τα υπόλοιπα $\mathbf{x}_i$, $P_{e|i} < 3Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$.
- Union bound: $\boxed{P_e < (N-1)Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right),}$ όπου N ο αριθμός των σημάτων του αστερισμού.
- Άνω φράγμα, αλλά σπανίως ακριβές. Πολλές φορές απέχει πολύ από την πραγματική P_e.
- Καλύτερο φράγμα: Nearest Neighbor Union Bound (NNUB).

Nearest Neighbor Union Bound (NNUB)

- $\boxed{P_e \leq N_e Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right),}$ όπου $N_e = \sum_{m=0}^{M-1} N_m p_{\mathbf{x}_m}$, N_m ο αριθμός των συμβόλων του αστερισμού των οποίων οι περιοχές απόφασης εφάπτονται με αυτή του $\mathbf{x}_m$.



- Στο προηγούμενο παράδειγμα, εάν ο θόρυβος διασχίσει την οριζόντια ή την κάθετη γραμμή θα έχουμε σφάλμα μετάδοσης. Επομένως, $P_e \overset{\text{γιατί;}}{<} 2Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$. Παρατηρήστε ότι $N_e = 2$ (έχουμε υποθέσει ότι τα μεταδιδόμενα σήματα είναι ισοπίθανα).

Nearest Neighbor Union Bound (NNUB) (2)

- Συχνά, για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού γειτόνων $N_e = \sum_{m=0}^{M-1} N_m p_{\mathbf{x}_m}$ χρησιμοποιούνται μόνο οι γείτονες κάθε συμβόλου $\mathbf{x}_m$ οι οποίοι απέχουν την ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση $d_{\min}$.
- Στην περίπτωση αυτή το προσεγγιστικό NNUB που προκύπτει ενδέχεται να μην είναι άνω φράγμα της P_e.
- Ωστόσο, στην πράξη, αποτελεί συνήθως καλή προσέγγιση της P_e με αποτέλεσμα πολλές φορές όταν σχεδιαστές αναφέρονται στο NNUB να εννοούν το προσεγγιστικό NNUB.