

ΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών  
Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάκης  
1ο Μάθημα – 4 Μαΐου 2007

## Γενικές Πληροφορίες – Θέματα προς συζήτηση

---

- Διδάσκων: Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάκης. [dtouba@upatras.gr](mailto:dtouba@upatras.gr).
- Σκοπός του μαθήματος:
  - Να συμβάλει σε κάποια θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών
  - Να συμβάλει στη βαθύτερη κατανόηση της Ψηφιακής Μετάδοσης.
  - Να βοηθήσει την έρευνά σας.
- Θέματα προς συζήτηση
  - Καθορισμός ωρών γραφείου κατά τις οποίες θα δίνεται προτεραιότητα σε όσους έχουν δηλώσει το μάθημα.
  - Καθορισμός τρόπου εξέτασης / αξιολόγησης.
  - Αλλαγή ώρας μαθήματος (;)

## Σχετικά Βιβλία / Συγγράμματα

---

- Θα χρησιμοποιηθούν διαφάνειες. Δε θα δοθεί βιβλίο. Εάν χρειαστεί, θα χρησιμοποιηθούν κεφάλαια από Ελληνόγλωσσα βιβλία
- Τα παρακάτω βιβλία / συγγράμματα καλύπτουν θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών. Θα είναι διαθέσιμα από το διδάσκοντα για δανεισμό για λίγες ώρες.
  - E. A. Lee and D. G. Messerschmitt, *Digital Communication*, 3rd ed. Καλό βιβλίο, περισσότερο από την πλευρά της Επεξεργασίας Σήματος. Περιέχει και εισαγωγικά κεφάλαια. Η 3η έκδοση καλύπτει και συστήματα MIMO.
  - J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4th ed. Κλασικό βιβλίο Ψηφιακών Επικοινωνιών. Γενικά υπεισέρχεται σε περισσότερες λεπτομέρειες από τους Lee & Messerschmitt.
  - John M. Cioffi, *Digital Communication*, *Class Reader*, <http://www.stanford.edu/class/ee379a>, ee379c, ee379b, ee479. Καλύπτει ένα μεγάλο εύρος θεμάτων. Ωστόσο, προϋποθέτει καλή γνώση πιθανοτήτων, σημάτων και συστημάτων και στοιχειωκών ανελίξεων. Εκτενής αναφορά σε συστήματα DMT, στη γενικευμένη θεωρία εξίσωτών (GDPE) και σε συστήματα πολλών χρηστών (multiuser).

## Σχετικά Βιβλία / Συγγράμματα (2)

---

- S. M. Kay, **Fundamentals of Statistical Signal Processing - Volume 1, Estimation Theory**.  
Επιμεντρώνεται στη Θεωρία Εκτίμησης.
- D. Tse and P. Viswanath, **Fundamentals of Wireless Communications**.  
Πολύ καλοοργανωμένο βιβλίο με σύγχρονα θέματα. Δεν καλύπτει λεπτομέρειες σχεδίασης συστημάτων. Αναλύει τα Ασύρματα Συστήματα από τη σκοπιά της Επεξεργασίας Σήματος και της Θεωρίας Πληροφορίας.
- A. Papoulis, **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**, 3rd ed.  
Κλασικό βιβλίο πιθανοτήτων και στοχαστικών ανεξίτητων. Πολύ χρήσιμο ως αναφορά.
- A. Leon-Garcia, **Probability and Random Processes for Electrical Engineering**, 2nd ed.

Όπως φανερώνει και ο τίτλος του, είναι προσαρμοσμένο στις ανάγκες του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού.

## ‘Γλη Μαθήματος

---

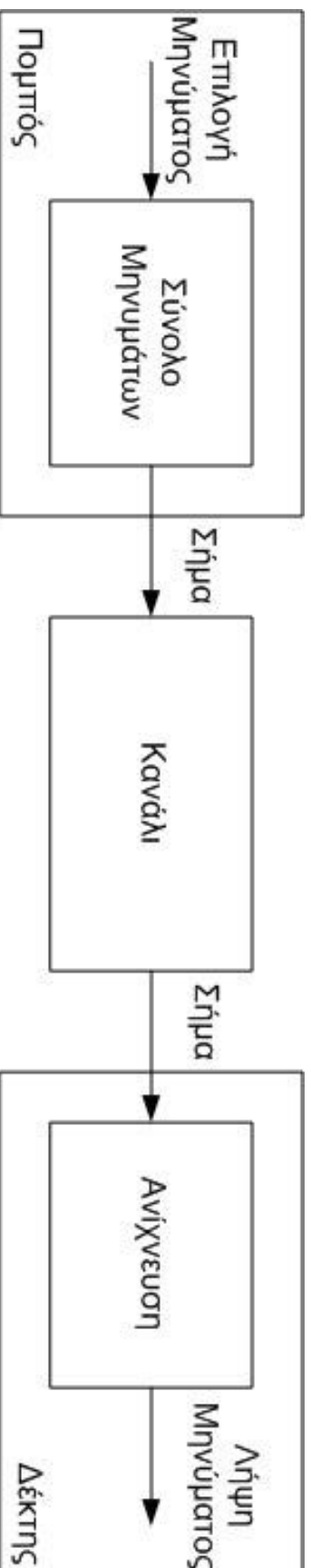
- Η ακριβής ύλη θα καθοριστεί ύστερα από συζήτηση στο πρώτο μάθημα.
- Πιθανά θέματα που μπορούν να συμπεριληφθούν στην ύλη
  - Επανάληψη βασικών αρχών Ψηφιακής Μετάδοσης: Διανυσματική Αναπαράσταση Κυματομορφών, Κανάλι Γκαουσιανού Θορύβου, Βέλτιστη Ανίχνευση, Πιθανότητα Λάθους, Είδη Αστερισμών και Διαμόρφωσης, Ανάλυση βαθυπερατών συστημάτων.
  - Ανάλυση ζωνοπερατών Ψηφιακών Συστημάτων.
  - Διασυμβολική Παρεμβολή, Κριτήριο Nyquist, Εξισωτές (ZF, MMSE, DFE), Προκωδικοποιητής Tomlinson.
  - Στοχαστικές Ανεξίξεις. Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες και Είδη Θορύβου. Θεωρία Εκτίμησης.
  - Συγχρονισμός συστημάτων. Εκτίμηση καναλιού.
  - Συστήματα DMT/OFDM.
  - Ασύρματα συστήματα. Χωρητικότητα καναλιών και τρόποι μετάδοσης. Συστήματα MIMO.

## Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

---

- **Εισαγωγή**
  - Ψηφιακή Μετάδοση: Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 1.
- Βασικές έννοιες πιθανοτήτων και στοχαστικών ανελίξεων.

## Ψηφιακή Μετάδοση



- Σκοπός της Ψηφιακής Μετάδοσης είναι να στείλει μηνύματα από τον πομπό στο δέκτη δια μέσου του καναλιού.
- Τα μηνύματα που στέλνονται ανήκουν σε ένα πεπερασμένο σύνολο.
- Η αποστολή των μηνυμάτων γίνεται με τη χρήση σημάτων (κυματομορφών).
- Ειδικότερα, η Ψηφιακή Μετάδοση είναι, σε επίπεδο φυσικού καναλιού, αναλογική.
- Επίσης, η Ψηφιακή Μετάδοση είναι, στην ουσία, μετάδοση διακριτών μηνυμάτων. Εάν τα μηνύματα προέρχονται από ψηφία δια μέσου κάποιας απεικόνισης ή εάν τα αναπαραστήσουμε με ψηφία μπορούμε, ισοδύναμα, να θεωρήσουμε ότι στέλνουμε ομάδες ψηφίων.

## Ψηφιακή Μετάδοση (2)

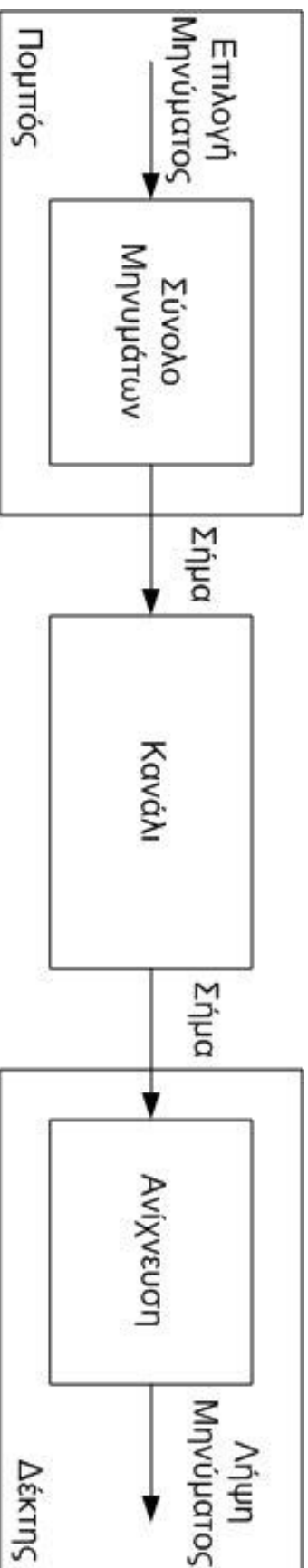
---

- Η μετάδοση είναι επιτυχής όταν ο δέκτης ανιχνεύσει το ίδιο μήνυμα με αυτό που έστειλε ο πομπός.
- Στην πράξη, η μετάδοση αποτυγχάνει με κάποια πιθανότητα λάθους  $P_e$  λόγω
  - Θορύβου / μεταβολών του καναλιού, θορύβου του δέκτη
  - Αναπαρκούς γνώσης του καναλιού
  - Μη βέλτιστης σχεδίασης του συστήματος ώστε να μειωθεί η πολυπλοκότητα και, επομένως, το κόστος ή/και η κατανάλωση ισχύος.
- Ακόμα και αν η σχεδίαση είναι η βέλτιστη υπάρχει κάποιο όριο στο ρυθμό με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε δια μέσου του καναλιού. Τα όρια στη μετάδοση μελετώνται από τη Θεωρία Πληροφορίας.



## Ψηφιακή Μετάδοση (3)

---



- Αρχικά, η πληροφορία που θέλουμε να στείλουμε στο δέκτη μετατρέπεται σε κάποιο από τα μηνύματα με χρήση κωδικοποίηση.
- Στη συνέχεια τα μηνύματα μετατρέπονται σε (αναλογικές) κυματομορφές / ηλεκτρικά σήματα με τη χρήση διαμορφωτή και στέλνονται στο κανάλι για μετάδοση.
- Το κανάλι παραμορφώνει τις μεταδιδόμενες κυματομορφές τόσο με γνωστό τρόπο (π.χ. απόσβεση) όσο και με τυχαίο (θόρυβος, διαλείψεις (**fading**)).
- Στο δέκτη το σήμα αποδιαμορφώνεται, γίνεται ανίχνευση του μηνύματος που μεταδόθηκε και, στη συνέχεια, αποκωδικοποιείται.

## Ψηφιακή Μετάδοση (4)

---

- Τα μηνύματα που στέλνει ο πομπός είναι τυχαία από τη σκοπιά του δέκτη (αλλιώς δε θα είχε νόημα η μετάδοση).
- Ο θόρυβος του καναλιού είναι ένα άγνωστο και, συνήθως, τυχαίο σήμα.
- Ακόμα και η παραμόρφωση καναλιού μπορεί να είναι τυχαία (για παράδειγμα, στα ασήματα κανάλια που παρουσιάζουν διαλείψεις και πολλαπλή όδευση – **multipath**).
- Επομένως, τόσο τα μεταδιδόμενα όσο και τα λαμβανόμενα σήματα και μηνύματα είναι στοχαστικά.
- Παρόλο που δε γνωρίζουμε εκ των προτέρων την τιμή των σημάτων, γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητές τους. Βασίζομενοι σε αυτές μπορούμε να κάνουμε υποθέσεις για τις τιμές τους. Η πιθανότητα λάθους εξαρτάται από την κατανομή των εκπεμπόμενων και των λαμβανόμενων σημάτων και, φυσικά, από τους αλληλοθιμους αντίκτυπους που χρησιμοποιεί ο δέκτης.

## Βασικές έννοιες πιθανοτήτων και στοχαστικών ανελίξεων

---

- Εισαγωγή
- Βασικές έννοιες πιθανοτήτων και στοχαστικών ανελίξεων.
  - Proakis Ch. 2, Lee & Messerschmitt Ch. 3

## Διευκρίνιση

---

Η επισκόπηση των εννοιών Θεωρίας Πιθανοτήτων, Στοχαστικών Ανεξίξων και Σημάτων και Συστημάτων στις επόμενες διαφάνειες γίνεται εν είδει επανάληψης. Για το λόγο αυτό δίνεται προτεραιότητα στη σημασία και στην εφαρμογή των εννοιών στις Ψηφιακές Επικοινωνίες σε βάρος της μαθηματικής αυστηρότητας και πληρότητας. Είναι, ωστόσο, σημαντικό να ελέγχουμε εάν ισχύουν οι απαραίτητες συνθήκες και υποθέσεις κάθε φορά που χρησιμοποιούμε κάποιο μαθηματικό εργαλείο για τους σκοπούς των Ψηφιακών Επικοινωνιών.

## Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

---

- Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.): Μια συνάρτηση η οποία παίρνει τυχαίες τιμές από το δειγματικό χώρο  $\Omega$ . Μπορεί να είναι πραγματική ή μιγαδική, συνεχής ή διακριτή.
  - Παράδειγμα 1:  $A =$  Αποτέλεσμα του αγώνα Ολυμπιακός - Παναθηναϊκός.  $\Omega = \{1, 2, X\}$ .
  - Παράδειγμα 2:  $B =$  Θερμοκρασία στην Πάτρα.  $\Omega = ?$
- Οι διακριτές τ.μ. περιγράφονται με χρήση της συνάρτησης μάζας πιθανότητας  $\sigma$ .μ.π.  $p_X(x) = Pr\{X = x\}$  (probability mass function - pmf).  $\sum_{a \in \Omega} p_X(a) = 1$ .  
 $F_X(x) = Pr\{X \leq x\} = \sum_{a: a \leq x} p_X(a)$ . Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας (cumulative distribution factor - cdf).
  - Παράδειγμα 1 (ΟΣΦΠ-ΠΑΟ):  $p_A(a = 1) = 1$ ,  $p_A(a = X) = p_A(a = 2) = 0$ .
- Οι συνεχείς τ.μ. περιγράφονται με χρήση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας  $\sigma$ .π.π. (probability density function - pdf)  $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$ .  $\int_{\Omega} f_X(x) dx = 1$ .  
 $Pr\{X \in S\} = \int_S f_X(x) dx$ .
- Ενωλθατικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει pdf με συναρτήσεις Dirac αντί για pmf  $f_X(x) = \sum_{a \in \Omega} p_x(a) \delta(x - a)$ .

## Κανονική (Γκαουσιανή) Κατανομή

---

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Συνεχής κατανομή. Θα τη χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον στα επόμενα. Η χρήση της δικαιολογείται από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem): Το άθροισμα  $N$  ανεξάρτητων και ομοιόμορφα κατανεμημένων (i.i.d.) τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη μέση τιμή και διασπορά τείνει στην γκαουσιανή κατανομή για  $N \rightarrow \infty$  ανεξάρτητα από την κατανομή τους.
- Μοντελοποιεί πολύ καλά το θερμικό θόρυβο στα ηλεκτρονικά κυκλώματα.
- $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{a^2}{2}} da = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ . Η συνάρτηση  $Q(\cdot)$  δεν έχει αναλυτική έκφραση. Για μεγάλες τιμές του  $x$  προσεγγίζεται πολύ καλά από την  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Χρησιμοποιείται ευρέως για τον υπολογισμό της πιθανότητας λάθους στα Ψηφιακά Συστήματα.

## Σημαντικές Ποσότητες

---

- Μέση τιμή τ.μ.  $E_f[X] = \sum_{x \in \Omega} x p_X(x)$  για διακριτές τ.μ.,  
 $E[X] = \int_{x \in \Omega} x f_X(x)$  για συνεχείς.
- Μέση τιμή συνάρτησης  $g(\cdot)$  τ.μ.  $E_f[g(X)] = \int_{x \in \Omega} g(x) f_X(x)$ . Αντίστοιχα για διακριτές τ.μ.
- Διασπορά τ.μ.  $\sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$ . Για μιγαδικές τ.μ.  
 $\sigma_X^2 = E[|(X - E[X])|^2] = E[XX^*] - (E[X])^*$ .
- Χαρακτηριστική Σύνδεση  $\Phi_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx$ .

## Συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών

---

- Από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (joint cdf) δύο (συνεχών) τ.μ.  $F_{X,Y}(x, y) = \underline{Pr\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(a, b) da db}$ .
- $f_{X,Y}(x, y)$ : Από κοινού  $\sigma$ .π.π. (joint pdf).
- Περιθώρια  $\sigma$ .π.π. (marginal pdf)  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$ .
- Δύο τ.μ. είναι (στατιστικά) ανεξάρτητες όταν για οποιαδήποτε διαστήματα  $I$  και  $J$ ,  $\underline{Pr\{X \in I \cap Y \in J\} = Pr\{X \in I\}Pr\{Y \in J\}}$ . Ισοδύναμα,  $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  ή  $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$  ή  $E[XY] = E[X]E[Y]$  (ασυσχέτιστες).
- Ασυσχέτιστες τ.μ. δεν είναι απαραίτητα και ανεξάρτητες. Ωστόσο, εάν οι τ.μ. είναι γκαουσιανές και ασυσχέτιστες, τότε είναι και ανεξάρτητες.



## Από κοινού Γκαουσιανή Κατανομή

---

- Δύο (πραγματικών) μεταβλητών,  $\mu = 0$ :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right]$$

όπου  $\rho = \frac{E[XY]}{\sigma^2}$  ο συντελεστής συσχέτισης.

- Γενική μορφή για  $M$  (πραγματικές) μεταβλητές

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\mathbf{K}_{\mathbf{x}}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\mathbf{x}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})\right]$$

όπου  $\mathbf{K}_{\mathbf{x}} = E[(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})^T]$  ο πίνακας συσχέτισης και  $\mathbf{m}_{\mathbf{x}} = E[\mathbf{X}]$ .

- Οι περιθώριες  $\sigma$ .π.π. είναι και αυτές γκαουσιανές.
- Από γραμμικό μετασχηματισμό από κοινού γκαουσιανών τ.μ. προκύπτουν από κοινού γκαουσιανές τ.μ.

## Δεσμευμένες Πιθανότητες και Κανόνας του Bayes

---

- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$  για τις τιμές του  $y$  όπου  $f_Y(y) \neq 0$ .
- Κανόνας Bayes:  $f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$ .
- Θεώρημα Bayes:  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{x \in \Omega_x} f_{Y|X}(y|x)f_X(x) dx}$ .
- Για διαφορετές τ.μ.:  $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{Y|X}(y|x)p_X(x)}{\sum_{x \in \Omega_x} p_{Y|X}(y|x)p_X(x)}$ .

## Στοχαστικές Ανεξίξεις (**Random Processes**)

---

- Διακριτού χρόνου  $\{X_k\}$ : Μια ακολουθία τ.μ.  $\{X_k\}$  με ακέραιο δείκτη  $k$ .
- Συνεχούς χρόνου  $\{X(t)\}$ : Μια συνάρτηση του χρόνου  $t$  της οποίας τα δείγματα  $X(t = \tau)$  είναι τ.μ.
- Οι τιμές μιας στοχαστικής ανεξίξης μπορεί να είναι διακριτές (π.χ. αριθμός αυτοκινήτων που περνούν από τα διόδια από τις 10 έως τις 11 π.μ. κάθε ημέρα) ή συνεχείς (π.χ. η θερμοκρασία στην Πάτρα).
- Μια στοχαστική ανεξίξη αποτελείται από ένα σύνολο (πιθανώς άπειρων) πραγματικών συναρτήσεων.
- Παρόλο που οι στοχαστικές ανεξίξεις είναι τυχαίες, γνωρίζουμε, όπως και στην περίπτωση των τ.μ., κάποιες ιδιότητές τους.

## Στοχαστικές Ανελίξεις (2)

---

- Γενική Περιγραφή: με χρήση από κοινού  $\sigma$ .π.π. (ή  $\sigma$ .μ.π.). Για παράδειγμα, η πιθανότητα τα δείγματα  $k = 1, 2, \dots, N$  της στοχαστικής ανελίξης  $\{X_k\}$  να ισούνται με  $x_k$  ισούται με  $p(x_1, x_2, \dots, x_N)$ .
- Η στοχαστική ανελίξη  $\{X(t)\}$  είναι γκαουσιανή εάν οποιοδήποτε σύνολο δειγμάτων της είναι από κοινού γκαουσιανές τιμ.
- Μέση τιμή στοχαστικής ανελίξης:  $m_k = E[X_k]$ ,  $m(t) = E[X(t)]$  (στη γενική περίπτωση εξαρτάται από τη χρονική στιγμή!).
- Αυτοσυσχέτιση:  $R_{XX}(k, l) = E[X_k X_l^*]$ ,  $R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)^*]$ .
  - Παράδειγμα 1: Στοχαστική ανελίξη που περιγράφει διαδοχική ρίψη κέρματος: Δύο ο-ποιαδήποτε δείγματα είναι αυτοσχετίστα (εάν το κέρμα δεν είναι ‘πειραγμένο’).
  - Παράδειγμα 2: Στοχαστική ανελίξη που περιγράφει τη θερμοκρασία στην Πάτρα: Η αυτοσυσχέτιση είναι μη μηδενική.

## Στοχαστικές Ανεξίτητες (3) – Στασιμότητα

---

- Μια στοχαστική ανάλιξη είναι Στάσιμη κατά τη Στενή Έννοια (**Strict Sense Stationary**) - **SSS**) όταν  $f(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_k}) = f(x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, \dots, x_{t_k+t})$ . Όταν, δηλαδή, η από κοινού  $\sigma$ .π.π. εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων και όχι από τις ακριβείς τους χρονικές στιγμές (παρόμοια ορίζεται η **SSS** για διακριτές στοχαστικές ανελίξεις).
- Μια στοχαστική ανάλιξη είναι Στάσιμη κατά την Ευρεία Έννοια (**Wide Sense Stationary** - **WSS**) όταν
  - $m(t) = \mu$  (σταθερή) και
  - $R_{XX}(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2)$  (εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων).
- **SSS**  $\Rightarrow$  **WSS**. **WSS** + γκαουσιανή  $\Rightarrow$  **SSS**.