

ΕΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών
Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάκης
9ο Μάθημα – 14 Δεκεμβρίου 2007

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- Το ασύρματο (wireless) κανάλι
 - Tse & Viswanath, Ch.2
- Στατιστικά μοντέλα καναλιού
- Μετάδοση στο ασύρματο κανάλι
- Διαμόρφωση OFDM

Το ασύρματο κανάλι κινητών τηλεπικοινωνιών (**mobile wireless channel**)

- Το ασύρματο κανάλι κινητών τηλεπικοινωνιών μεταβάλλεται στο χρόνο και στη συχνότητα.
- Δύο βασικά φαινόμενα:
 - Διαλείψεις μεγάλης κλίμακας (large-scale fading): λόγω απωλειών διαδρομής (**path loss**) και σκίασης (**shadowing**) λόγω απορρόφησης ενέργειας από εμπόδια όπως κτίρια και φυσικά εμπόδια (π.χ. λόφοι). Το κανάλι μεταβάλλεται σε αποστάσεις της τάξης του μεγέθους της κυψέλης και, συνήθως, η μεταβολή του δεν εξαρτάται από τη συχνότητα.
 - Διαλείψεις μικρής κλίμακας (small-scale fading): λόγω συμβολής πολλαπλών ανωαλάσεων του ίδιου σήματος. Το κανάλι μεταβάλλεται σε αποστάσεις της τάξης του μήκους κύματος της φέρουσας συχνότητας και η μεταβολή εξαρτάται από τη συχνότητα.

Απώλειες διαδρομής και σκίαση

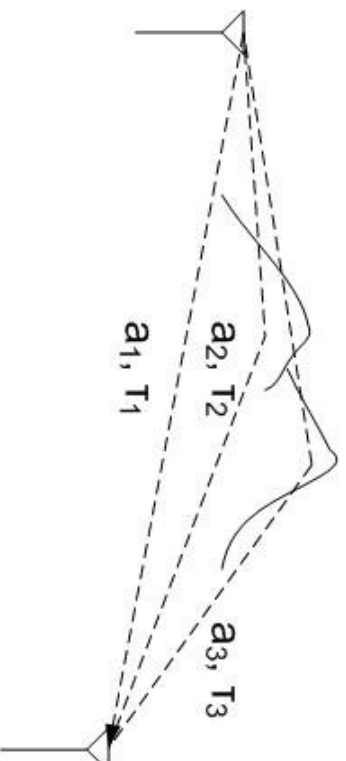
- Απώλειες διαδρομής: Λόγω σφαιρικής διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.
 - Στον ελεύθερο χώρο, η ισχύς μειώνεται με το τετράγωνο της απόστασης r από την πηγή: $P(r) \sim \frac{1}{r^2}$.
 - Σε περιβάλλοντα με ανακλάσεις η απόσβεση ενδέχεται να είναι ακόμη μεγαλύτερη· της τάξης του $\frac{1}{r^4}$ (ύψαιθρος), ακόμα και $\frac{1}{r^6}$, ανάλογα με την πυκνότητα των εμποδίων που συναντούν τα κύματα.
- Σκίαση: Με τον όρο αυτό εννοούμε τις (τυχαίες) διακυμάνσεις της ενέργειας του σήματος λόγω των αλλαγών στο περιβάλλον (αριθμός εμποδίων, θέση, συντελεστής απορρόφησης κλπ.).

Τα δύο βασικά φαινόμενα σε ένα κανάλι κινητών επικοινωνιών

- Σε ένα κανάλι κινητών επικοινωνιών διακρίνουμε δύο βασικά φαινόμενα τα οποία, γενικά, εμφανίζονται ταυτόχρονα.
- Λόγω της κίνησης του πομπού ή/και του δέκτη ή/και των αντικειμένων πάνω στα οποία ανακλάται ή σκεδάζεται το σήμα, το κανάλι μεταβάλλεται στο χρόνο (**fading**) και έχουμε εμφάνιση φαινομένου **Doppler**.
- Λόγω των πολλών μονοπατιών που ενδέχεται να ακολουθεί κάθε σήμα στη διαδρομή του μεταξύ πομπού και δέκτη (πολυδιαδρομική διάδοση) εμφανίζεται διαστορά της κρουστικής απόκρισης (**multipath delay spread**), με αποτέλεσμα το κανάλι να μην είναι επίπεδο στη συχνότητα (**frequency selectivity**).
- Η μεταβολή στο χρόνο και στη συχνότητα δεν είναι κατ' ανάγκη επιβλαβής. Πολλές φορές προσφέρει τη δυνατότητα να βελτιώσουμε τη μετάδοση/λήψη με χρήση τεχνικών διαφορισμού (**diversity**).

Πολυδιαδρομική διάδοση (Multipath propagation)

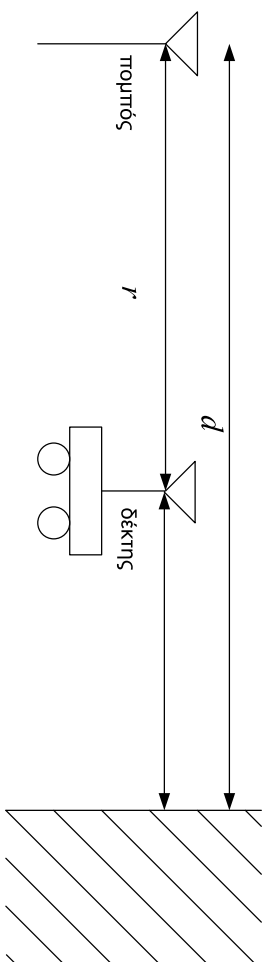
- Έστω ότι ένα σήμα διέχεται από διαφορετικά μονοπάτια, με αποτέλεσμα διαφορετικά αντήγραφα του να φτάνουν στο δέκτη με διαφορετικό πλάτος και φάση, καθώς και σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.
- Έστω ότι μεταδίδουμε μια εκθετική συνάρτηση $\phi(t) = \exp(j2\pi f_c t)$, $y(t) = \sum_i a_i(t, f_c)\phi(t - \tau_i(t, f_c))$, όπου η μιγαδική σταθερά $a_i(t, f_c)$ (πλάτος και φάση) και η καθυστέρηση $\tau_i(t, f_c)$ αντιστοιχούν στο μονοπάτι i .



Πολυδιαδρομική διάδοση (**Multipath propagation**) (2)

- Εάν υποθέσουμε ότι οι $a_i(t, f)$ και $\tau_i(t, f)$ δε μεταβάλλονται σημαντικά με τη συχνότητα f στο εύρος ζώνης που χρησιμοποιείται για τη μετάδοση και εκφράσουμε το μεταδιδόμενο σήμα ως άθροισμα συναρτήσεων της μορφής $\phi(t) = \exp(j2\pi ft)$ (αρχή της υπέρθεσης) μπορούμε να γράψουμε $y(t) = \sum_i a_i(t)x(t - \tau_i(t))$.
- Παρατηρήστε ότι το κανάλι αλλάζει στο χρόνο λόγω κίνησης \Rightarrow Μοντελοποιείται ως γραμμικό, χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα.
- $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t)x(t - \tau)d\tau$, όπου $h(\tau, t) = \sum_i a_i(t)\delta(\tau - \tau_i(t))$.
- Δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απόκριση συχνότητας $H(f)$, εκτός αν συμπεριλάβουμε την εξάρτηση από το χρόνο: $H(f, t) = \mathcal{F}\{h(\tau, t)\}$ για δεδομένο t .
- Εάν δεν έχουμε κίνηση, $y(t) = \sum_i a_i x(t - \tau_i)$ (γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο). $h(t) = \sum_i a_i \delta(\tau - \tau_i)$.
- Το κανάλι δεν είναι επίπεδο στη συχνότητα αόμοια και όταν δε μεταβάλλεται με το χρόνο (γιατί;)

Παράδειγμα (Tse): Τοίχος με ανάκλαση



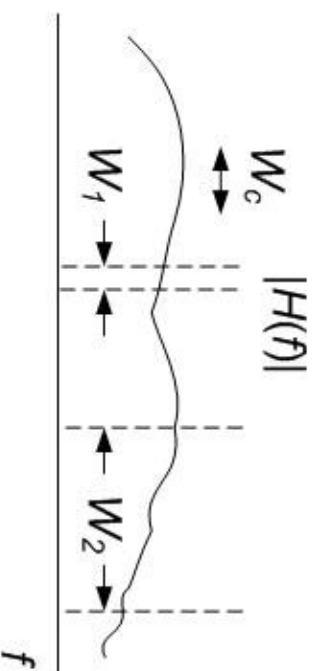
- Ο δέκτης δεν κινείται.
- Πεδίο στο δέκτη: $E_r(f, t) = \frac{\alpha \cos 2\pi f \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} - \frac{\alpha \cos 2\pi f \left(t - \frac{2d-r}{c}\right)}{2d-r}$. α : Κέρδος κεραίας.
Θεωρούμε ότι η απώλεια διαδρομής είναι η ίδια και για τα δύο κύματα.
- Η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο κυμάτων ισούται με $\Delta\theta = \left(\frac{2\pi f(2d-r)}{c} + \pi\right) - \left(\frac{2\pi fr}{c}\right) = \frac{4\pi f}{c}(d-r) + \pi$.
- Εάν η $(d-r)$ αλλάξει κατά $\frac{\lambda}{4}$ η διαφορά φάσης αλλάζει κατά π . Επομένως, εάν για κάποια τιμή της $(d-r)$ η $E_r(f, t)$ μεγιστοποιείται, σε απόσταση $\frac{\lambda}{4}$ θα ελαχιστοποιηθεί.
- Για $f = 2.4$ GHz (π.χ. IEEE 802.11b), $\frac{\lambda}{4} \approx 3.1$ cm!

Διαστορά λόγω πολυδιαδρομικής διάδοσης (**multipath spread**) και εύρος ζώνης συμφωνίας (**coherence bandwidth**)

- **Multipath Delay Spread** $T_d \triangleq \max_{i,j} |\tau_i(t) - \tau_j(t)|$: Το μέγιστο μήκος καναλιού στο χρόνο. Σχετίζεται με τη διασπορά χρονική παρεμβολή (και την 'επιλεκτικότητα' στη συχρότητα).
- Συνήθως είναι ανάλογο του μεγέθους της κυψέλης (cell). Για LANs με μονοπάτια μήκους λίγων km, $T_d \sim 1 - 2 \mu s$. Τυπικές τιμές: **macro-cellular**: 100 ns - 10 μs (μεγάλες τιμές στις αστικές περιοχές, μικρές σε ανοικτούς χώρους). **Indoor και micro-cellular**: Διπλάσιο από 1 μs .
- Στο προηγούμενο παράδειγμα, $T_d = \frac{2d-r}{c} - \frac{r}{c}$.
- **Coherence bandwidth** $W_c \triangleq \frac{1}{2T_d}$. Όσο μεγαλύτερο το μέγιστο μήκος καναλιού, τόσο πιο γρήγορα μεταβάλλεται το κανάλι στη συχρότητα. Μικρό $W_c \rightarrow$ γρήγορη μεταβολή στη συχρότητα (**frequency selectivity**).
- Στο προηγούμενο παράδειγμα, $\Delta\theta = \left(\frac{2\pi f(2d-r)}{c} + \pi \right) - \left(\frac{2\pi fr}{c} \right) = \frac{4\pi f}{c}(d-r) + \pi$.
Επιτομένως, η φάση αλλάζει κατά π εάν η συχρότητα f αλλάξει κατά $\frac{1}{2} \left(\frac{2d-r}{c} - \frac{r}{c} \right)^{-1} = \frac{1}{2T_d}$.

Flat/frequency selective fading

- Παρατηρήστε ότι η μορφή διαλείψεων εξαρτάται τόσο από το εύρος ζώνης συμφωνίας W_c όσο και από το εύρος ζώνης που χρησιμοποιεί το σύστημα.
- Όταν το εύρος ζώνης W που χρησιμοποιείται για τη μετάδοση είναι $\ll W_c$ (π.χ. W_1), έχουμε επίπεδη διάλειψη (flat fading). Αλλιώς η διάλειψη ονομάζεται επιλεκτική στη συχνότητα (frequency-selective fading).
- Διαισθητικά: Όταν μεταδίδουμε αργά (και δειγματοληπτούμε αργά στην έξοδο του προσαρμωμένου φίλτρου) δε μπορούμε να διαχωρίσουμε τα μονοπάτια μεταξύ τους και βλέπουμε απλώς την ενέργεια του λαμβανόμενου σήματος να μεταβάλλεται.



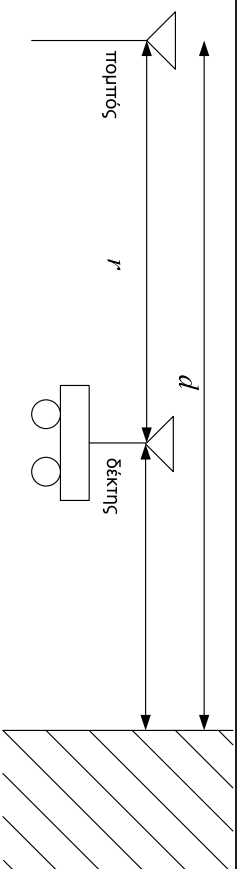
Φαινόμενο Doppler και χρόνος συμφωνίας

- Υποθέτουμε ότι ο πομπός μεταδίδει σήμα $x(t) = \cos(2\pi ft)$. Ο δέκτης λαμβάνει σήμα $y(t) = \alpha \cos(2\pi f(t - t_d))$, όπου t_d η καθυστέρηση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος λόγω πεπερασμένης ταχύτητας του φωτός c .
- Εάν η απόσταση πομπού-δέκτη ισούται με r , $t_d = \frac{r}{c}$.
- Εάν ο δέκτης απομακρύνεται από τον πομπό με σταθερή ταχύτητα, $r = r_0 + vt \Rightarrow y(t) = \alpha \cos(2\pi f(t - \frac{r_0+vt}{c})) = \alpha \cos(2\pi f((1 - \frac{v}{c})t - \frac{r_0}{c}))$.
- Ειδικώς, ο δέκτης βλέπει το προσπίπτον σήμα μετατοπισμένο στη συχνότητα κατά $f_D = -f \frac{v}{c} = -\frac{v}{\lambda}$.
- Γενικά (εάν η κίνηση γίνεται υπό γωνία θ) η μετατόπιση συχνότητας λόγω Doppler ισούται με $f_D \cos(\theta) = \cos(\theta) \frac{v}{\lambda}$.

Φαινόμενο Doppler και χρόνος συμφωνίας (2)

- Κάθε μονοπάτι στα κανάλια πολυδιαδρομικής διάδοσης έχει διαφορετική μετατόπιση **Doppler**, ανάλογα με την ταχύτητα του πομπού, του δέκτη και των ανακλαστών που βρίσκονται στη διαδρομή του. Επίσης, οι ταχύτητες ενδέχεται να μεταβάλλονται.
- Ειδικώς, οι μετατοπίσεις συχνότητας λόγω **Doppler** σχηματίζουν μια περιοχή γύρω από τη συχνότητα φέροντας f_c (**Doppler Spread**).
- Έστω ένα κανάλι με L taps τη χρονική στιγμή t : $h(t) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l(t)\delta(t - \tau_l(t))$.
- **Doppler spread** για ένα από τα taps του καναλιού: $D_s \triangleq \max_{i,j} f_c |\tilde{\tau}'_i(t) - \tilde{\tau}'_j(t)|$ ($\tilde{\tau}'$: ταχύτητες, $\tilde{\tau}_i$: όλα τα μονοπάτια που ενσωματώσαμε στο tap τ_i όταν δειγματοληπτούμε το κανάλι).
- Χρόνος συμφωνίας (**Coherence Time**) $T_c \approx \frac{1}{4D_s}$. Είναι ένα μέτρο του πόσο γρήγορα αλλάζει η τιμή του tap $h_l(t)$ στο χρόνο (η αλλαγή οφείλεται σε αλλαγές της φάσης του σήματος λόγω **Doppler**).

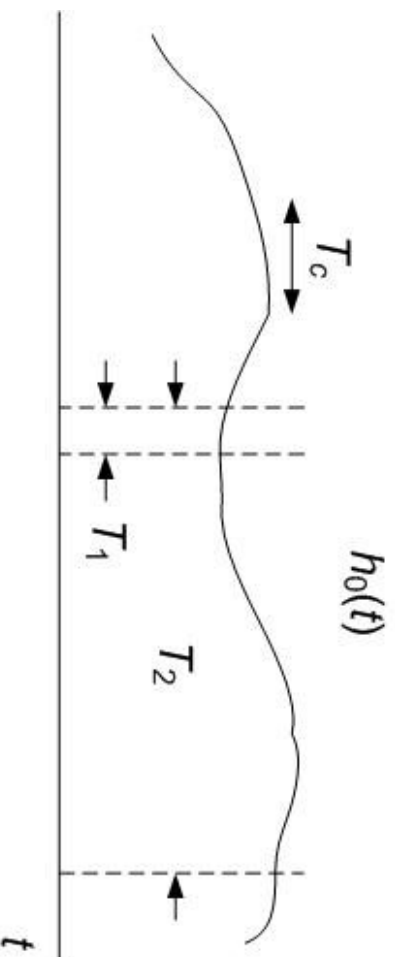
Παράδειγμα (**Tse**): Τοίχος με ανάκλαση (συνέχεια)



- Ο δέκτης κινείται με σταθερή ταχύτητα v : $r = r_0 + vt$.
- Πεδίο στο δέκτη: $E_r(f, t) = \frac{\alpha \cos 2\pi f \left[\left(1 - \frac{v}{c}\right)t - \frac{r_0}{c} \right]}{r_0 + vt} - \frac{\alpha \cos 2\pi f \left[\left(1 + \frac{v}{c}\right)t + \frac{r_0 - 2d}{c} \right]}{2d - r_0 - vt}$.
- Το απ' ευθείας κύμα υφίσταται μετατόπιση Doppler $D_1 = -\frac{fv}{c}$. Το ανακλώμενο κύμα υφίσταται μετατόπιση Doppler $D_2 = +\frac{fv}{c}$.
- Διαστορά Doppler: $D_s = D_2 - D_1$.
- Με πρόξεις, μπορεί να δειχθεί ότι $E_r(f, t) \approx \frac{2\alpha \sin 2\pi f \left[\frac{v}{c}t + \frac{r_0 - d}{c} \right] \sin 2\pi f \left[t - \frac{d}{c} \right]}{r_0 + vt}$. Δηλαδή, η περιβάλλουσα της $E_r(f, t)$ μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με συχνότητα $f \frac{v}{c} = \frac{D_s}{2}$ λόγω της κίνησης του δέκτη.

Ταχύτητα διαλείψεων (**fast/slow fading**).

- Η ταχύτητα διαλείψεων καθορίζεται τόσο από το φαινόμενο Doppler, όσο και από το χρονικό διάστημα που χρησιμοποιούμε στο κανάλι.
- Στο σχήμα απεικονίζεται το πλάτος ενός **tap**. Όταν το κανάλι χρησιμοποιείται για χρονικό διάστημα της τάξης του T_c (π.χ. T_1) η διάλειψη είναι αργή, αλλιώς είναι ταχεία.



Πίνακας Συσχέτισης Καναλιού

- $R_h(\Delta f, \Delta t) = E\{H(f, t)H^*(f - \Delta f; t - \Delta t)\}$.
- Συνάρτηση συσχέτισης συχνότητας (frequency correlation function): $p_h(\Delta f) \triangleq R_h(\Delta f, 0)$. Το εύρος ζώνης συμφωνίας (coherence bandwidth) ισούται με το 'εύρος' της $p_h(\Delta f)$.
- Κατανομή ισχύος στο χρόνο (Delay power profile): $p_h(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{p_h(\Delta f)\}$. Το multipath delay spread ισούται με το 'εύρος' της $p_h(\tau)$.
- Συνάρτηση χρονικής συσχέτισης (time correlation function): $p_h(\Delta t) = R_h(0, \Delta t)$. Ποσοτικοποιεί τη μεταβολή του καναλιού στο χρόνο (λόγω κίνησης).
- Φάσμα ισχύος Doppler (Doppler power spectrum): $\Phi_h(\nu) = \mathcal{F}\{p_h(\Delta t)\}$. Το doppler delay spread ισούται με το 'εύρος' της $\Phi_h(\nu)$, ενώ ο χρόνος συμφωνίας του καναλιού (coherence time) είναι ανάλωτος του αντιστρόφου της του doppler delay spread, όπως είδαμε.

Ανακεφαλαίωση

- 2 Βασικά φαινόμενα στο κανάλι κινητών επικοινωνιών:
 - Πολυδιαδρομική διάδοση (**multipath**): Δημιουργεί επιλεκτικότητα καναλιού στη συχνότητα. Ποσοτικοποιείται με χρήση του εύρους ζώνης συμφωνίας ή της διαστοράς πολυδιαδρομικής διάδοσης.
 - Διαλείψεις λόγω κίνησης (φαινόμενο **Doppler**): Δημιουργεί μεταβολή των **taps** του καναλιού στο χρόνο. Ποσοτικοποιείται με χρήση του χρόνου συμφωνίας ή της διαστοράς **Doppler**.
- Η επιλεκτικότητα στο χρόνο και στη συχνότητα δημιουργεί προβλήματα στην εκτίμηση του καναλιού. Ωστόσο, από την άλλη, μπορούμε να κερδίσουμε σε αξιοπιστία μετάδοσης χρησιμοποιώντας τεχνικές διαφορισμού (**diversity**) στο χρόνο ή στη συχνότητα.

Στατιστικά μοντέλα καναλιού

- Το ασύρματο (wireless) κανάλι
- Στατιστικά μοντέλα καναλιού
 - Tse & Viswanath, Ch.2
- Μετάδοση στο ασύρματο κανάλι
- Διαμόρφωση OFDM

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚά Μοντέλα

- Οι παράμετροι που αναφέραμε παραπάνω (αριθμός και κατανομή των **taps** h_i , **multipath spread**, **coherence time**) διαφέρουν ανάλογα με το κανάλι (το οποίο, με τη σειρά του εξαρτάται από παράγοντες όπως το περιβάλλον, η φέρουσα συχνότητα f_c , το εύρος ζώνης W που χρησιμοποιεί το σύστημα, η ταχύτητα κλπ).
- Για να σχεδιάσουμε συστήματα χρειάζόμαστε στατιστικά μοντέλα που να περιγράφουν τα κανάλια κινητών επικοινωνιών.
- Τα μοντέλα αυτά φτιάχνονται είτε προσπαθώντας να τα ταιριάζουμε με μετρήσεις, είτε θεωρητικά, κάνοντας όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστικές παραδοχές.
- Ένα μοντέλο πρέπει να είναι αρκετά λεπτομερές ώστε να περιγράφει καλά το κανάλι, αλλά και αρκετά απλό/γενικό ώστε να καλύπτει όλα τα παρόμοια κανάλια. Γενικά η μοντελοποίηση καναλιών κινητών τηλεπικοινωνιών δεν είναι μια απλή διαδικασία.

Στατιστικά Μοντέλα (2)

- Είδαμε ότι, εάν η καθυστέρηση όδευσης και η εξασθένηση δε μεταβάλλονται σημαντικά με τη συχνότητα, $\mathbf{y}(t) \approx \sum_i \mathbf{a}_i(t)x(t - \tau_i(t)) + w(t)$.
- Μπορεί να αποδειχθεί (βλ. π.χ. **Tse & Viswanath**) ότι αν δειγματοληπτήσουμε ανά $\frac{1}{W}$ (και κάνουμε κάποιες υποθέσεις) μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{y}[m] = \sum_l h_l[m]x[m-l] + w[m]$, όπου $h_l[m] = \sum_i \mathbf{a}_i \left(\frac{m}{W}\right) e^{-j2\pi f_c \tau_i \left(\frac{m}{W}\right)} \text{sinc} \left[l - \tau_i \left(\frac{m}{W}\right) W\right]$.
- Πολύ συχνά θεωρούμε το κανάλι $\mathbf{y}[m] = \sum_l h_l[m]x[m-l] + w[m]$ και μοντελοποιούμε τα taps $h_l[m]$.

Διάλεξη Rayleigh

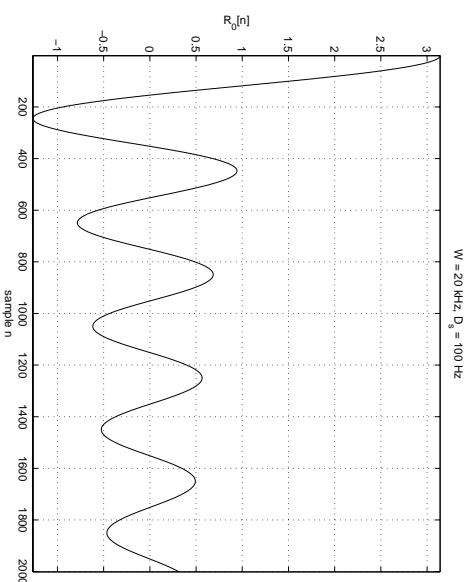
- Θεωρούμε ότι κάθε **tap** είναι το αποτέλεσμα της συμβολής ενός μεγάλου αριθμού στατιστικά ανεξάρτητων ανακλώμενων και σκεδαζόμενων μονοπατιών με τυχαίες τιμές πλάτους.
- Θεωρούμε, επίσης, ότι οι φάσεις των μονοπατιών είναι κατανομημένες ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και ότι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- Με αυτές τις παραδοχές, το **tap** $h_l[m]$ είναι μια κυκλική συμμετρική γκαουσιανή τ.μ. $\mathcal{CN}(0, \sigma_l^2)$.
- Κυκλική συμμετρική (μυγαδική) τ.μ. **X**: Όταν η $e^{j\theta} \mathbf{X}$ ακολουθεί την ίδια κατανομή με τη **X** για οποιαδήποτε γωνία θ . Αποδεικνύεται ότι $E[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$.

Διάλεξη Rayleigh (2)

- Το πλάτος $|h_l[m]|$ ακολουθεί κατανομή Rayleigh με σ.π.π. $f(x) = \frac{x}{\sigma_l^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_l^2}\right)$.
- Το τετράγωνο του πλάτους $|h_l[m]|^2$ είναι εκθετικά κατανοημένο. $f(x) = \frac{1}{\sigma_l^2} \exp\left(-\frac{x}{\sigma_l^2}\right)$.
- Το μοντέλο Rayleigh είναι εφαρμόσιμο σε περιβάλλοντα όπου υπάρχουν πολλοί μικροί ανακλαστές (non-Line of Sight (non-LOS) περιβάλλοντα). Ωστόσο, χρησιμοποιείται συχνά ακόμα και όταν ο αριθμός των ανακλαστών/σχεδιαστών είναι σχετικά μικρός, λόγω της απλότητάς του.

Μεταβολή των **taps** στο χρόνο

- Για να περιγράψουμε πλήρως το κανάλι χρειαζόμαστε και την αυτοσυσχέτιση κάθε tap l , $R_l[n] = E\{h_l^*[m]h_l[m+n]\}$ (θεωρούμε ότι οι $h_l[m]$ είναι WSS και ανεξάρτητες από τις $h_k[m]$).
- Η $R_l[n]$ εξαρτάται από το κανάλι και την ταχύτητα του πομπού/δέκτη/εμποδίων. Εάν έχουμε 1 tap (flat fading) και πολλά προσπίπτοντα μονοπάτια ίσης ενέργειας a^2 με ομοιόμορφη γωνία πρόσπτωσης, $R_0[n] = a^2\pi J_0(n\pi D_s/W)$, όπου $J_0(\cdot)$ η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, μηδενικής τάξης και $D_s = 2f_c v/c$ η διαστορά Doppler (Clarke's model).



Μεταβολή των **taps** στο χρόνο (2)

- Εναλλακτικός ορισμός multipath spread T_d : $\frac{L}{W}$, όπου L η τιμή για την οποία $\sum_{l=0}^L R_l[0] \approx \sum_{l=0}^{\infty} R_l[0]$, δηλαδή ο αριθμός των **taps** που περιέχουν σχεδόν όλη την ενέργεια του καναλιού.
- Εναλλακτικός ορισμός χρόνου συμφωνίας T_c : Η μικρότερη τιμή του n για την οποία το $R_l[n]$ διαφέρει σημαντικά από το $R_l[0]$.

Μοντέλα Rice, Nakagami-m

- Μοντέλο Rice: Για κανάλια στα οποία υπάρχει και ένα μονοπάτι οπτικής επαφής (LOS).
- $h_l[m] = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \sigma_l e^{j\theta} + \sqrt{\frac{1}{\kappa+1}} \mathcal{CN}(0, \sigma_l^2)$. κ : K-factor: Ο λόγος της ενέργειας του μονοπατιού LOS δια της ενέργειας στα σκεδασμένα μονοπάτια.
- Μοντέλο Nakagami-m: Βασισμένη σε πειραματικά δεδομένα. Μοντελοποιεί κάποια κανάλια με μεγαλύτερη ακρίβεια. Μπορεί να μοντελοποιήσει και κανάλια με ' χειρότερες ' διασείψεις από τη Rayleigh.

Μετάδοση στο ασύρματο κανάλι

- Το ασύρματο (*wireless*) κανάλι
- Στατιστικά μοντέλα καναλιού
- Μετάδοση στο ασύρματο κανάλι.
 - Tse & Viswanath, Ch.3
 - Proakis, Ch 14
- Διαμόρφωση OFDM

Μετάδοση στο ασύρματο κανάλι

- Λόγω των διαλείψεων, η μετάδοση δια μέσου ενός καναλιού κινητών επικοινωνιών απαιτεί μεγαλύτερη ισχύ σε σχέση με ένα μη μεταβαλλόμενο κανάλι.
- Αυτό ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που γνωρίζουμε το κανάλι σε κάθε χρονική στιγμή.
- Δηλαδή, η μείωση της απόδοσης οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι το κανάλι μεταβάλλεται και όχι στη μη τέλεια εκτίμηση καναλιού.
- Φυσικά, η ακριβής εκτίμηση καναλιού συμβάλλει στο να επιτευχθεί η βέλτιστη δυνατή μετάδοση.

Παράδειγμα: **BPSK**

- Έστω κανάλι **AWGN** με σταθερό **SNR**. Γνωρίζουμε ότι, για μετάδοση **BPSK**, $P_e = Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{2\sqrt{E_x}}{2\sigma}\right) = Q(\sqrt{\text{SNR}})$.
- Έστω, τώρα, μετάδοση **BPSK** σε κανάλι **Rayleigh**, **flat fading** με $E[|h|^2] = 1$. Δηλαδή, $y[m] = h[m]x[m] + n[m]$. Υποθέτουμε ότι ο δέκτης γνωρίζει την ακριβή τιμή όλων των (μγαδικών) $h[m]$. Επίσης, στο δέκτη, $\overline{\text{SNR}} \triangleq E[\text{SNR}]$.
- Προσαρμοσμένο φίλτρο: $h^*[m]$. Επομένως, $r[m] \triangleq \Re\left\{\frac{h^*[m]}{|h[m]|}y[m]\right\} = |h[m]|x[m] + z[m]$, $z \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{N}_0/2)$.
- Αποδεικνύεται ότι $P_e = E_h[P_{e|h}] = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\overline{\text{SNR}}}{2+\overline{\text{SNR}}}}\right) \approx \frac{1}{2\overline{\text{SNR}}}$.
- Το κανάλι διαθέσιμων έχει πολύ χειρότερη απόδοση σε σχέση με το κανάλι **AWGN**!

Γιατί η μεγάλη διαφορά απόδοσης;

- Σε ένα κανάλι **AWGN** η πιθανότητα σφάλματος εξαρτάται μόνο από την πιθανότητα ο γκαουσιανός θόρυβος να υπερβεί την τιμή $d_{\min}/2$.
- Όταν ένα κανάλι με διαλείψεις έχει μεγάλο στιγμιαίο κέρδος $h[m]$, η πιθανότητα σφάλματος οφείλεται σε εξαιρετικές περιπτώσεις μεγάλου θορύβου δεδομένου ότι η ‘ουρά’ της $Q(\cdot)$ έχει μικρό εμβαδόν.
- Ωστόσο, όταν το κανάλι έχει μικρό στιγμιαίο κέρδος, η d_{\min} είναι ίδιας τάξης μεγέθους με την τυπική απόκλιση του θορύβου, με αποτέλεσμα η $Q(\cdot)$ να παίρνει μεγάλες τιμές.
- Η πιθανότητα το στιγμιαίο κέρδος του καναλιού να είναι μικρό ώστε $|h[m]|^2 \text{SNR} = 1$ ισούται με $\int_0^{1/\text{SNR}} e^{-x} dx \approx \frac{1}{\text{SNR}}$.
- Ειδομένως, στα κανάλια διαλείψεων έχουμε 2 φαινόμενα: θόρυβο **AWGN** και διαλείψεις. Η πιθανότητα μεγάλης διάλειψης (**deep fades**) καθορίζει, στην ουσία, την πιθανότητα λάθους.
- Όσο καλός και να είναι ο δέκτης δε μπορούμε να κάνουμε τίποτα κατά τη διάρκεια των **deep fades!** (δεδομένου του καναλιού $y[m] = h[m]x[m] + n[m]$)

Πώς μπορούμε να ελαττώσουμε την P_e σε κανάλια με διαλείψεις;

- Ένας τρόπος είναι να δημιουργήσουμε με κάποιο τρόπο αντίγραφα του ίδιου σήματος \Rightarrow τεχνικές διαφορισμού (**diversity**).
 - Διαφορισμός στο χρόνο (**time diversity**): Μετάδοση σε περισσότερες από μια χρονικές στιγμές ώστε να εκμεταλλευόμαστε διαφορετικές τιμές των $h[m]$.
 - Διαφορισμός στη συχνότητα (**frequency diversity**): Μετάδοση σε περισσότερες από μια περιοχές του φάσματος (στην περίπτωση που έχουμε **multipath** και, επομένως, **frequency-selective fading**) ώστε να εκμεταλλευόμαστε διαφορετικές τιμές της απόκρισης συχνότητας $H(f, m)$.
 - Διαφορισμός στο χώρο (**space diversity**): Χρήση περισσότερων από μία κεραίων στον πομπό (**MISO**), στο δέκτη (**SIMO**) ή και στους δύο (**MIMO**) ώστε να έχουμε περισσότερα από ένα κανάλια.

Πώς μπορούμε να ελαττώσουμε την P_e σε κανάλια με διαλείψεις; (2)

- Επίσης, μπορούμε να μεταδώσουμε πιο ‘έξυπνα’ στον πομπό: Να αποφύγουμε τις ‘ κακές ’ περιοχές του καναλιού και να καταναείμουμε την ισχύ που εξοικονομείται στις ‘ καλές ’ περιοχές.
- Αποδεικνύεται ότι για **SNR** $\rightarrow \infty$ η χωρητικότητα του καναλιού **Rayleigh 1 tap** υπολείπεται κατά **0.83 bits/s/Hz** (**-2.5 dB**) του καναλιού **AWGN**.
- Αντίθετα, για πολύ μικρά **SNR** η χωρητικότητα υπερβαίνει αυτή του καναλιού **AWGN** γιατί η πολύ περιορισμένη ενέργεια που διαθέτουμε χρησιμοποιείται μόνο όταν το στιγμιαίο κέρδος του καναλιού είναι πολύ μεγάλο.
- Πρόβλημα: Καθυστερήση. Ενδέχεται να μην έχουμε την πολυτέλεια να περιμένουμε μέχρι να εμφανιστεί καλό κανάλι (ειδικά για πολύ μικρά **SNR**).

Διαφορισμός Χώρου (**space/antenna diversity**)

- Τα συστήματα **MIMO** επιτυγχάνουν και κάτι περισσότερο: Εάν τα κανάλια που δημιουργούνται είναι ανεξάρτητα **Rayleigh**, ένα σύστημα $N_t \times N_r$ όπου N_t και N_r ο αριθμός κεραιών στον πομπό και στο δέκτη, αντίστοιχα, έχει χωρητικότητα $\min(N_t, N_r)$ φορές μεγαλύτερη από αυτή του συστήματος **SISO**.
- Επομένως, με τα συστήματα **MIMO** αυξάνουμε τους βαθμούς ελευθερίας (**degrees of freedom**) του συστήματος.
- Μάλιστα, σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να 'ανταλλάξουμε' βαθμούς ελευθερίας με κέρδος λόγω διαφορισμού (**diversity gain**).

Διαμόρφωση **OFDM**

- Το ασύρματο (**wireless**) κανάλι
- Στατιστικά μοντέλα καναλιού
- Μετάδοση στο ασύρματο κανάλι
- Διαμόρφωση **OFDM**
 - Van Nee & Prasad, Ch.2, Cioffi, Ch. 4

OFDM – Εισαγωγή

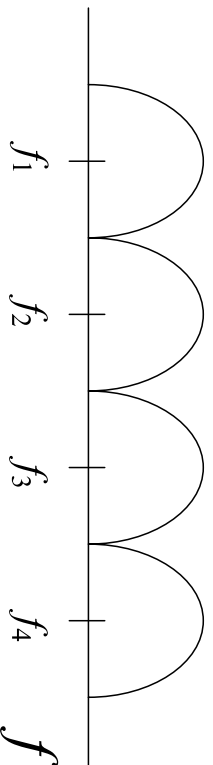
- Μέθοδος διαμόρφωσης, αλά και πολυπλεξίας.
- Μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα της διασυμβολικής παρεμβολής.
- Τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιείται και σε κανάλια τα οποία μοιράζονται πολλοί χρήστες (OFDM (802.11a/g/n) ή OFDMA (802.16)).
- Σύνητο ιστορικό
 - Η ιδέα υπήρχε από τα τέλη της δεκαετίας του 1950.
 - Πρώτη πατέντα OFDM: 1970. Πρόταση για χρήση DFT: 1971 και 1981.
 - Περιορισμένη χρήση έως τις αρχές της δεκαετίας του 1990 λόγω δυσκολιών στην υλοποίηση, ιδιαίτερα λόγω αδυναμίας γρήγορης υλοποίησης του DFT με ψηφιακά κυκλώματα.
 - Χρήση OFDM στο πρωτόκολλο ADSL T1.413 (DMT) και ETSI DAB (1995), καθώς και DVB-T (1997).
- Σήμερα: Χρήση σε IEEE 802.11a/g/n (WiFi), IEEE 802.16a/d/e (WiMAX), 3GPP-LTE downlink (συστήματα GSM γενιάς 3.75 και 4).
- Πιθανότητα στο εγγύς μέλλον τα περισσότερα εμπορικά συστήματα θα χρησιμοποιούν OFDM/OFDMA.

OFDM – Πλεονεκτήματα/Μειονεκτήματα

- Πλεονεκτήματα
 - Σχετικά απλή αντιμετώπιση της διασυβολικής παρεμβολής λόγω πολυδιαδρομικής διάδοσης (**multipath**) και διαλείψεων (**fading**).
 - Εάν το κανάλι δε μεταβάλλεται (ή μεταβάλλεται αργά), ο ρυθμός μετάδοσης μπορεί να αυξηθεί με προσαρμογή της μεταδιδόμενης ισχύος στον πομπό (**transmitter power adaptation**) → καλύτερη προσέγγιση της χωρητικότητας καναλιού.
 - Μπορεί να αντιμετωπίσει καλά παρεμβολή μικρού εύρους ζώνης (**narrowband interference**).
 - Το **OFDM** επιτρέπει τη δημιουργία δικτύων μιας συχνότητας (**single-frequency networks**) είτε με χρήση πρωτοκόλλων τύπου διεκδίκησης (**contention-based**) ή με χρήση **OFDMA**.
- Μειονεκτήματα
 - Μεγαλύτερη ευαισθησία στην απόκλιση συχνότητας φορέα (**Carrier Frequency Offset**)
 - Σχετικά μεγάλος λόγος Μέγιστης προς Μέση ισχύος (**Peak-to-Average Ratio – PAR**).

OFDM – Η βασική ιδέα

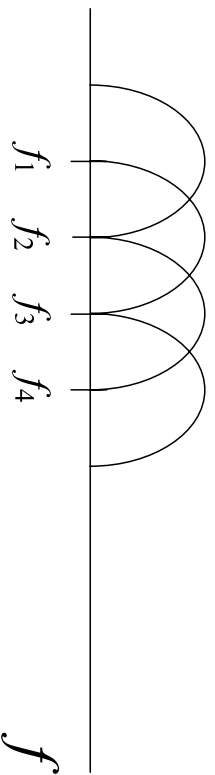
- Εάν ο ρυθμός μετάδοσης αυξηθεί μειώνοντας την απόσταση μεταξύ των κυματομορφών που μεταδίδουμε (ελαττώνοντας, δηλαδή, την περίοδο T_s μεταξύ διαδοχικών συμβόλων) η διασυμβολική παρεμβολή αυξάνει (στη γενική περίπτωση).
- Η ιδέα: Εάν χωρίσουμε το διαθέσιμο φάσμα σε περιοχές (γύρω από υποφέρουσες – **subcarriers**) και μεταδώσουμε γύρω από κάθε υποφέρουσα με μεγαλύτερη περίοδο T'_s , η διασυμβολική παρεμβολή θα είναι μικρότερη (γιατί η μετάδοση σε κάθε περιοχή γίνεται πιο αργά), και, επομένως, η εξίσωση (ισοστάθμιση) θα είναι απλούστερη.
- Απαιτείται πολυπλεξία στη συχνότητα (**Frequency Division Multiplexing – FDM**).



- Για την υλοποίηση χρειάζονται φίλτρα και αποστάσεις ‘ασφαλείας’ στο φάσμα (ζώνες φύλαξης – **guard bands**). Η υλοποίηση είναι πολυπλοκή και οδηγεί σε απώλεια μέρους του διαθέσιμου φάσματος.

OFDM – Η βασική ιδέα (2)

- Εάν υπάρχει τρόπος η απόσταση των υποφερουσών να ελαττωθεί, τότε μπορούμε να μεταδώσουμε με μεγαλύτερο ρυθμό για δεδομένο εύρος ζώνης (καλύτερη εκμετάλλευση του φάσματος – **spectral efficiency**).



- Οι φασματικές περιοχές (κανάλια) επικαλύπτονται. Υπάρχει τρόπος η διακανάλιακή παρεμβολή να είναι μηδενική;
- Θα δούμε ότι αυτό είναι δυνατό με χρήση ορθογώνιων συναρτήσεων → Orthogonal **FD**M (OFDM).

Σήμα OFDM στο χρόνο

$$\mathbf{s}(t) = \Re \left\{ \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \exp \left(j2\pi \left(f_c - \frac{i+0.5}{T} \right) (t - t_s) \right) \right\}, \quad t_s \leq t \leq t_s + T$$

$$\mathbf{s}(t) = 0, \quad t < t_s \text{ και } t > t_s + T$$

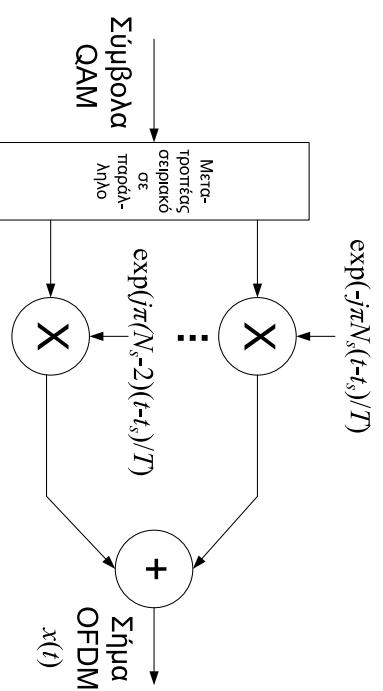
- N_s : αριθμός υποπερουσών. T : διάρκεια συμβόλου OFDM. f_c : συχνότητα φέρουσας.
- d_i : Σύμβολα στις υποφέρουσες (μγαδικά στη γενική περίπτωση – συνήθως ανήκουν σε αστερισμό QAM).
- Το σύμβολο OFDM είναι ένα άθροισμα N_s (μγαδικών) συναρτήσεων της μορφής $\phi_i(t) = \exp(j2\pi(f_c - \frac{i+0.5}{T})(t - t_s))$. Αποδεικνύεται ότι οι $\phi_i(t)$ (μετά από κατάλληλη κανονικοποίηση) αποτελούν συναρτήσεις βάσης (θα το δείξουμε σύντομα).
- Παρατηρούμε ότι αντί να μεταδίδουμε 1 σύμβολο ανά T_s με χρήση όλου του διαθέσιμου φάσματος, δημιουργούμε μια ομάδα N_s συμβόλων τα οποία μεταδίδονται ταυτόχρονα και ανά T sec. Το κάθε σύμβολο καταλαμβάνει ένα από N_s κομμάτια του διαθέσιμου φάσματος.

Σήμα **OFDM** στο χρόνο – Βαθμωπατό ισοδύναμο

$$s(t) = \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \exp\left(j2\pi\frac{i}{T}(t-t_s)\right), \quad t_s \leq t \leq t_s + T$$

$$s(t) = 0, \quad t < t_s \text{ και } t > t_s + T$$

- Η συχνότητα κάθε υποφέρουσας είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{1}{T}$. Επομένως, κάθε υποφέρουσα έχει ακέραιο αριθμό περιόδων στο διάστημα T (διάρκεια του συμβόλου **OFDM**).



Αποδιαμόρφωση υποφέρουσας

- Αγνοούμε, προς το παρόν, το θόρυβο, και υποθέτουμε κανάλι **AWGN**
- Για να ανακτήσουμε το σύμβολο $d_{k+\frac{N_s}{2}}$ πολλαπλασιάζουμε με τη $\phi_k^*(t) = \exp(-j2\pi\frac{k}{T}(t-t_s))$ και ολοκληρώνουμε.

$$\int_{t_s}^{t_s+T} \exp\left(-j2\pi\frac{k}{T}(t-t_s)\right) \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \exp\left(j2\pi\frac{i}{T}(t-t_s)\right) dt =$$
$$\sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \int_{t_s}^{t_s+T} \exp\left(j2\pi\frac{i-k}{T}(t-t_s)\right) dt = Td_{k+\frac{N_s}{2}}.$$

- Επομένως, οι $\frac{1}{\sqrt{T}}\phi_i(t)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση.
- Ωστόσο, ακόμα δεν έχουμε εξετάσει πώς επηρεάζεται η ορθογωνιότητα των $\phi_i(t)$ στην περίπτωση καναλιού με διασχυριστική παρεμβολή.

Σήμα **OFDM** στη συχνότητα

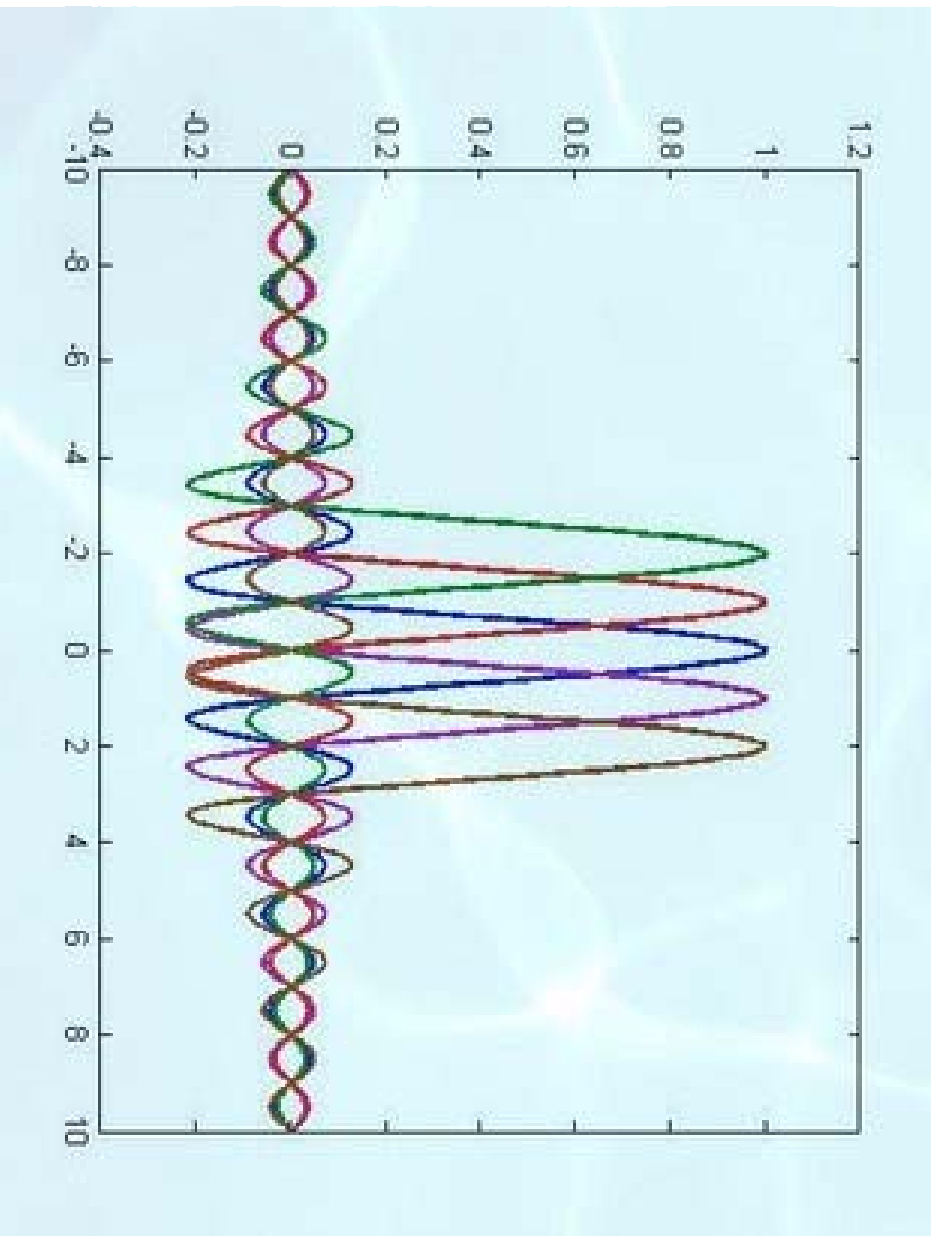
$$s(t) = \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \exp \left(j2\pi \frac{i}{T} (t - t_s) \right), \quad t_s \leq t \leq t_s + T$$

$$s(t) = 0, \quad t < t_s \text{ και } t > t_s + T$$

- Το σύμβολο **OFDM** είναι ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων οι οποίες έχουν περιοριστεί στο διάστημα $[t_s, t_s + T]$.
- Ειδικότερα, στη συχνότητα, είναι ένα άθροισμα συναρτήσεων **sinc** με κέντρο τις συχνότητες υποφέρουσας $\frac{i}{T}$.

$$S(f) = \sqrt{T} \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \exp \left(-j2\pi t_s \frac{i}{T} \right) \text{sinc} \left(\left(f - \frac{i}{T} \right) T \right)$$

Σήματα **OFDM** στη συχνότητα (2)



Σήμα **OFDM** στη συχνότητα (3)

- Κατά την αποδιαμόρφωση, υπολογίζεται η τιμή του σήματος στις συχνότητες $\frac{i}{T}$. Επειδή τα σήματα όλων των άλλων υποφρερυσών είναι μηδενικά, μπορεί να ανακτηθεί το σήμα της υποφρέρυσας i . Το μόνο άγνωστο σήμα είναι ο θόρυβος.
- Επομένως, σε κανάλια **AWGN** δεν εμφανίζεται διακαναλική παρεμβολή (**Inter-Channel Interference – ICI**), αρκεί ο δέκτης να γνωρίζει επακριβώς τις συχνότητες $\frac{i}{T}$ (το οποίο εξασφαλίζεται από το πόσο καλά γνωρίζει τη συχνότητα φέρυσας f_c).
- Παρατηρήστε ότι ικανοποιείται το κριτήριο **Nyquist**, αλλά στη συχνότητα. Δηλαδή, η διακαναλική (και όχι η διασυβολική) παρεμβολή ισούται με 0.

Σήμα **OFDM** – Αντίστροφος μετασχηματισμός **Fourier**

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \exp \left(j2\pi \frac{i}{T} (t - t_s) \right), \quad t_s \leq t \leq t_s + T$$

$$\mathbf{s}(t) = 0, \quad t < t_s \text{ και } t > t_s + T$$

- Το σήμα $\mathbf{s}(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός **Fourier** των N_s συμβόλων d_i , περιερισμένος στο χρονικό διάστημα $[t_s, t_s + T]$.
- Εάν το διάστημα $[t_s, t_s + T]$ χωριστεί σε N δείγματα, $\mathbf{s}(t) = \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \exp \left(j2\pi \frac{i}{T} (t - t_s) \right) \Rightarrow$
$$\mathbf{s}[n] = s \left(t_s + n \frac{T}{N} \right) = \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} \frac{1}{2} d_{i+\frac{N_s}{2}} \exp \left(j2\pi \frac{i}{T} \left(n \frac{T}{N} \right) \right) = \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} \frac{1}{2} d_{i+\frac{N_s}{2}} \exp \left(j2\pi \frac{in}{N} \right).$$

Σήμα **OFDM** – Αντίστροφος μετασχηματισμός **Fourier** (2)

- Εάν το εύρος ζώνης που χρησιμοποιεί το σύστημα δεν υπερβαίνει το $\frac{N}{T}$, τα δείγματα αρχούν για την αναπαράσταση του συνεχούς σήματος $s(t)$ και το σύμβολο **OFDM** μπορεί να υπολογιστεί με χρήση του αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού **Fourier** (**Inverse Discrete Fourier Transform** – **IDFT**):

$$s[n] = \sum_{i=0}^{N_s-1} d_i \exp\left(j2\pi\frac{in}{N}\right).$$

- Ο **IDFT** (και ο **DFT**) μπορούν να υλοποιηθούν με χρήση του αλγορίθμου **Fast Fourier Transform** – **FFT**, ο οποίος απαιτεί $N \log_2 N$ πολλαπλασιασμούς (αντί για N^2 της προφανούς υλοποίησης με χρήση του ορισμού).

OFDM σε κανάλια με ISI

- Έστω, τώρα, ότι το κανάλι είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (LTI) με χρονστική απόκριση $h(t)$.
- Στη γενική περίπτωση, οι αποκρίσεις παλμού $p_i(t) = \phi_i(t) * h(t)$ δεν είναι, πλέον, ορθογώνιες. Παρόλο που σε κάθε υποφέρουσα μεταδίδουμε πιο αργά, υπάρχει διασυμβολική παρεμβολή λόγω της πεπερασμένης διάρκειας του συμβόλου OFDM.
- Μια λύση: Υπολογισμός νέων συναρτήσεων $\phi_i(t)$ ώστε η $q(t) = p(t) * p^*(-t)$ να ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist.
 - Πολύπλοκο στη γενική περίπτωση.
 - Απαιτείται γνώση του καναλιού στον πομπό.
 - Απαιτείται επανυπολογισμός των $\phi_i(t)$ κάθε φορά που το κανάλι αλλάζει, και κατάλληλη αρχιτεκτονική συστήματος για την προσαρμογή στις νέες $\phi_i(t)$.
- Η λύση που εφαρμόζεται στο OFDM: Χρήση Κυκλικού Προθέματος (Cyclic Prefix – CP).

Κυκλικό Πρόθεμα – Cyclic Prefix

- Έστω ότι η κρουστική απόκριση του καναλιού έχει μήκος L sec (ή ότι η εξάπλωση καθυστέρησης (**delay spread**) ισούται με L στα κανάλια με διαλείψεις).
- Το σύμβολο επεκτείνεται από T σε $T + T_{CP}$ sec ως εξής: Τα τελευταία T_{CP} sec του αρχικού συμβόλου αντιγράφονται στην αρχή του αρχικού συμβόλου. Δηλαδή, προστίθεται ένα κυκλικό πρόθεμα.

$$s(t) = \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \exp\left(j2\pi\frac{i}{T}(t - t_s - T_{CP})\right), \quad t_s \leq t \leq t_s + T + T_{CP}$$

$$s(t) = 0, \quad t < t_s \text{ και } t > t_s + T + T_{CP}$$

- Όπως θα δείξουμε, η χρήση κυκλικού προθέματος εξασφαλίζει την ορθογωνιότητα των υποφερουσών (αρκεί $T_{CP} \geq L$).
- Το τίμημα: Απαιτείται $\frac{T_{CP}}{T}$ περισσότερη ενέργεια για τη μετάδοση. Επίσης, ο ρυθμός μετάδοσης μειώνεται σε $\frac{T}{T+T_{CP}}$.

Αποδιαμόρφωση σήματος **OFDM** με κυκλικό πρόθεμα

- Έστω ότι η κρουστική απόκριση του καναλιού έχει τη μορφή $h(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t + \tau)$, $\tau < T_{CP}$.
- Στον αποδιαμορφωτή,

$$\int_{t_s+T_{CP}}^{t_s+T+T_{CP}} \exp\left(-j2\pi\frac{k}{T}(t - t_s - T_{CP})\right) \times$$

$$\sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \left\{ \exp\left(j2\pi\frac{i}{T}(t - t_s - T_{CP})\right) + \alpha \exp\left(j2\pi\frac{i}{T}(t - t_s - T_{CP} - \tau)\right) \right\} dt =$$

$$T d_{k+\frac{N_s}{2}} + \alpha \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \int_{t_s+T_{CP}}^{t_s+T+T_{CP}} \exp\left(j2\pi\frac{i-k}{T}(t - t_s - T_{CP}) - j2\pi\frac{k\tau}{T}\right) dt$$

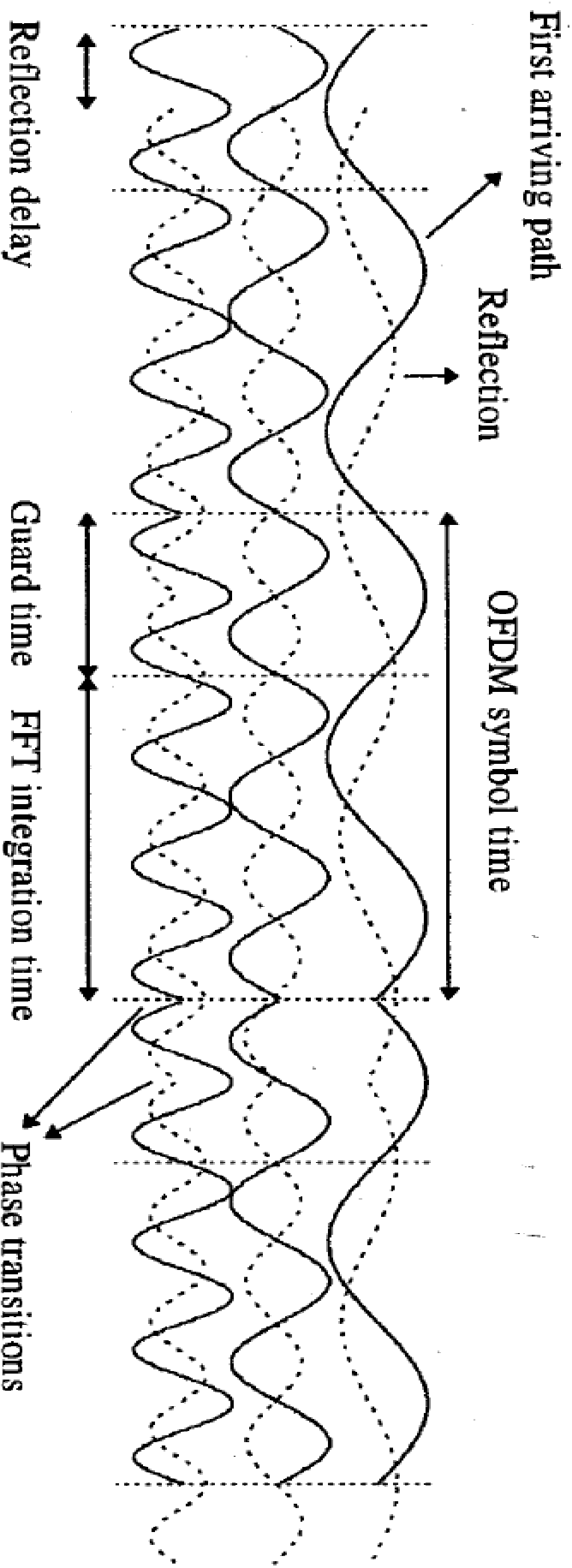
Αποδιαμόρφωση σήματος **OFDM** με κυκλικό πρόθεμα (2)

- Ειπομένως, στην έξοδο του αποδιαμορφωτή,

$$T d_{k+\frac{N_s}{2}} + \alpha T d_{k+\frac{N_s}{2}} \exp\left(-j2\pi\frac{k\tau}{T}\right) = T d_{k+\frac{N_s}{2}} \left(1 + \alpha \exp\left(-j2\pi\frac{k\tau}{T}\right)\right)$$

- Τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν για $h(t) = \sum \alpha_i \delta(t - \tau_i)$.
- Παρόλο που το κανάλι έχει διασυμβολική παρεμβολή, η έξοδος του αποδιαμορφωτή της υποφέρουσας k εξαρτάται μόνο από το σήμα που μεταδόθηκε στην υποφέρουσα k . Επίσης, επειδή η ολοκλήρωση αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_s + T_{CP} \geq t_s + L$ και τελειώνει πριν την αρχή του επόμενου συμβόλου **OFDM**, τα d_i που μεταδίδονται από τα προηγούμενα και τα επόμενα σύμβολα **OFDM** δεν παρεμβάλλονται στο αποδιαμορφωθέν σήμα.
- Συνεπώς, η χρήση κυκλικού πρόθεματος κατάλληλου μήκους οδηγεί στην εξάλειψη του **ISI** και του **ICI**.
- Όλα αυτά, όμως, υπό την προϋπόθεση ότι $T_{CP} \geq L = \tau_{\max} - \tau_{\min}$.

Αποδιαμόρφωση σήματος **OFDM** με κυκλικό πρόθεμα (3)



(Σχήμα από Van Nee & Prasad)

Παρεμβολή σε γειτονικές συχνότητες

- Είδαμε ότι το φάσμα ενός μεμονωμένου συμβόλου **OFDM** είναι ένα άθροισμα **sinc** γύρω από τις συχνότητες των υποφερουσών. Επομένως, το φάσμα ενός συμβόλου **OFDM** δεν περιορίζεται μόνο στην περιοχή συχνοτήτων πλάτους $\frac{N}{T}$, αλλά εκτείνεται και έξω από αυτήν.
- Παρατηρούμε ότι όσο λιγότερο διαρκεί ένα σύμβολο **OFDM**, όσο στενότερα, δηλαδή, είναι τα **sinc**, τόσο πιο αργά 'πέφτει' το φάσμα του συμβόλου έξω από τις υποφέρειουσες.
- Το φασματικό περιεχόμενο έξω από το βασικό εύρος ζώνης $\frac{N}{T}$ είναι ακόμη μεγαλύτερο στην πράξη λόγω των διαδοχικών συμβόλων **OFDM** που μεταδίδονται. Οι (απότομες) αλλαγές των κυματομορφών στα όρια των συμβόλων οδηγούν στη δημιουργία υψηλών συχνοτήτων στο φάσμα.
- Δύσεις
 - Μεγαλύτερη απομόνωση του συστήματος **OFDM** από γειτονικά συστήματα που λειτουργούν σε γειτονικές φέρουσες με χρήση ζωνών φύλαξης → φασματική ατώλεια.
 - Χρήση λιγότερης ισχύος ώστε να μειωθούν οι παρεμβολές → ατώλεια ρυθμού μετάδοσης.
 - **Windowing** (παραθύρωση) → παραμόρφωση σήματος, ελάττωση **delay spread** το οποίο μπορεί να αντισταθμίσει το σύστημα.

Windowing στο χρόνο

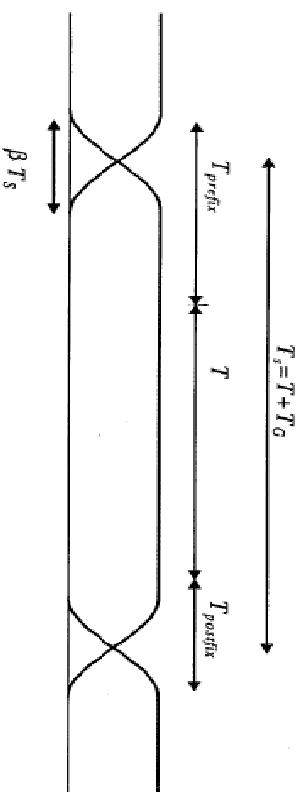
- Η ιδέα: Να πολλαπλασιάσουμε το σύμβολο OFDM στο χρόνο με μια συνάρτηση $w(t)$ η οποία θα ελαττώσει το πλάτος του σήματος στα όρια του συμβόλου ούτως ώστε οι αλλαγές μεταξύ συμβόλων να είναι λιγότερο ‘απότομες’.

$$s(t) = \mathfrak{R} \left\{ w(t - t_s) \sum_{i=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} d_{i+\frac{N_s}{2}} \exp \left(j2\pi \left(f_c - \frac{i+0.5}{T} \right) (t - t_s - T_{CP}) \right) \right\},$$
$$t_s \leq t \leq t_s + T_s(1 + \beta)$$

$$s(t) = 0, t < t_s \text{ και } t > t_s + T_s(1 + \beta)$$

- Η περίοδος μετάδοσης συμβόλων OFDM T_s είναι μικρότερη από τη διάρκεια του συμβόλου OFDM η οποία περιλαμβάνει το σύμβολο, το κυκλικό πρόθεμα και, πιθανώς, κυκλικό επίθεμα (postfix). Δηλαδή, διαδοχικά σύμβολα OFDM επικαλύπτονται στο χρόνο.
- Το μήκος της περιοχής επικάλυψης στο όριο δύο συμβόλων ισούται με βT_s .

Windowing στο χρόνο (2)



(Σχήματα από Van Nee & Prasad)

- Ένας από τους τύπους παραθύρου που χρησιμοποιείται συχνά είναι το ανυψωμένο συνημίτονο (**raised cosine**) (βλ. π.χ. **Van Nee & Prasad, 2.4**).
- Εναλλακτικά, το **windowing** μπορεί να γίνει με χρήση φίλτρου (συνέλιξη στο χρόνο).
- Η χρήση **windowing** οδηγεί σε παραμόρφωση και, επομένως, σε ελάττωση του **delay spread** το οποίο μπορεί να αντιστραφεί ένα σύστημα. Συνεπώς, ο σχεδιασμός της $w(t)$ και η επιλογή των T_s και β απαιτεί προσοχή.