EE725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

2ο Μάθημα – 26 Οκτωβρίου 2007

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- Βασικές έννοιες στοχαστικών ανελίξεων και σημάτων και συστημάτων.
  - Στοχαστικές Ανελίξεις: Proakis Ch. 2, Lee & Messerschmitt Ch. 3
  - Σήματα και Συστήματα: Proakis Ch. 2, Lee & Messerschmitt Ch. 2
- Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα.
- Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

Στοχαστικές Ανελίξεις (**Random Processes**)

- Διακριτού χρόνου $\{X_k\}$: Μια ακολουθία τ.μ. $\{X_k\}$ με ακέραιο δείκτη k.
- Συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$: Μια συνάρτηση του χρόνου t της οποίας τα δείγματα $X(t = \tau)$ είναι τ.μ.
- Οι τιμές μιας στοχαστικής ανέλιξης μπορεί να είναι διακριτές (π.χ. αριθμός αυτοκινήτων που περνούν από τα διόδια από τις 10 έως τις 11 π.μ. κάθε ημέρα) ή συνεχείς (π.χ. η θερμοκρασία στην Πάτρα).
- Μια στοχαστική ανέλιξη αποτελείται από ένα σύνολο (πιθανώς άπειρων) δειγματικών συναρτήσεων.
- Παρόλο που οι στοχαστικές ανελίξεις είναι τυχαίες, γνωρίζουμε, όπως και στην περίπτωση των τ.μ., κάποιες ιδιότητές τους.

Στοχαστικές Ανελίξεις (2)

- Γενική Περιγραφή: με χρήση από κοινού σ.π.π. (ή σ.μ.π.). Για παράδειγμα, η πιθανότητα τα δείγματα $k = 1, 2, \ldots N$ της στοχαστικής ανέλιξης $\{X_k\}$ να ισούνται με x_k ισούται με $p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.
- Η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t)\}$ είναι γκαουσιανή εάν οποιοδήποτε σύνολο δειγμάτων της είναι από κοινού γκαουσιανές τ.μ.
- Μέση τιμή στοχαστικής ανέλιξης: $m_k = E[X_k]$, $m(t) = E[X(t)]$ (στη γενική περίπτωση εξαρτάται από τη χρονική στιγμή!).
- Αυτοσυσχέτιση: $R_{XX}(k, l) = E[X_k X_l^*]$, $R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)^*]$.
  - Παράδειγμα 1: Στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει διαδοχική ρίψη κέρματος: Δύο οποιαδήποτε δείγματα είναι <u>ασυσχέτιστα</u> (εάν το κέρμα δεν είναι 'πειραγμένο'). Εάν Κορώνα $\leftrightarrow$ +1 και Γράμματα $\leftrightarrow$ -1 (ούτως ώστε $E[X] = 0$), η αυτοσυσχέτιση είναι ίση με 0.
  - Παράδειγμα 2: Στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει τη θερμοκρασία στην Πάτρα: Η αυτοσυσχέτιση είναι μη μηδενική.

Στοχαστικές Ανελίξεις (3) – Στασιμότητα

- Μια στοχαστική ανέλιξη είναι Στάσιμη κατά τη Στενή Έννοια (Strict Sense Stationary - SSS) όταν $f(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k}) = f(x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \ldots, x_{t_k+\tau})$. Όταν, δηλαδή, η από κοινού σ.π.π. εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων και όχι από τις ακριβείς τους χρονικές στιγμές (παρόμοια ορίζεται η SSS για διακριτές στοχαστικές ανελίξεις).
- Μια στοχαστική ανέλιξη είναι Στάσιμη κατά την Ευρεία Έννοια (Wide Sense Stationary - WSS) όταν
  - $m(t) = \mu$ (σταθερή) και
  - $R_{XX}(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2)$ (εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων).
- SSS $\Rightarrow$ WSS. WSS + γκαουσιανή $\Rightarrow$ SSS.

Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις

- Μια στάσιμη στοχαστική ανέλιξη έχει άπειρη ενέργεια (γιατί;).
- Επομένως, δεν είναι δυνατόν να οριστεί μετασχηματισμός Fourier μιας στάσιμης στοχαστικής ανέλιξης.
- Για τη στατιστική περιγραφή στάσιμων στοχαστικών ανελίξεων στο πεδίο της συχνότητας χρησιμοποιείται η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (ή Φάσμα Ισχύος) (Power Spectral Density - PSD).
- Όπως θα δούμε, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει πόσο γρήγορα ‘αποσυσχετίζεται’ ένα σήμα, σε αναλογία με το Φάσμα ενός νομοτελειακού σήματος το οποίο περιγράφει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το σήμα. Επομένως, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει τη μέση κατανομή της ισχύος στο πεδίο της συχνότητας.

Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις (2)

- Ισχύς στάσιμης στοχαστικής ανέλιξης: $R_x(0) = E[|X_k|^2]$, $R_x(0) = E[|X(t)|^2]$.
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος: $S_X(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) e^{-j\omega kT}$, $S_X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$.
- Με χρήση ιδιοτήτων μετασχηματισμού Fourier, $R_x(0) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} S_X(e^{j\omega T}) d\omega$, $R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega) d\omega$.
- Η αυτοσυσχέτιση είναι συζυγώς συμμετρική (conjugate symmetric): $R_X(\tau) = R_X^*(-\tau) \Rightarrow$ η $S(j\omega)$ παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορεί, επίσης, να αποδειχθεί εύκολα ότι η $S(j\omega)$ είναι μη αρνητική (π.χ. Lee & Messerschmitt Prob. 3-9).

Ετεροσυσχέτιση, Αμοιβαία Στασιμότητα

- Ετεροσυσχέτιση $R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y^*(t_2)]$.
- Οι $\{X(t)\}$ και $\{Y(t)\}$ είναι αμοιβαία στάσιμες κατά την ευρεία έννοια (jointly WSS) εάν η καθεμία τους είναι WSS και $R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2)$.

Γραμμικά, Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

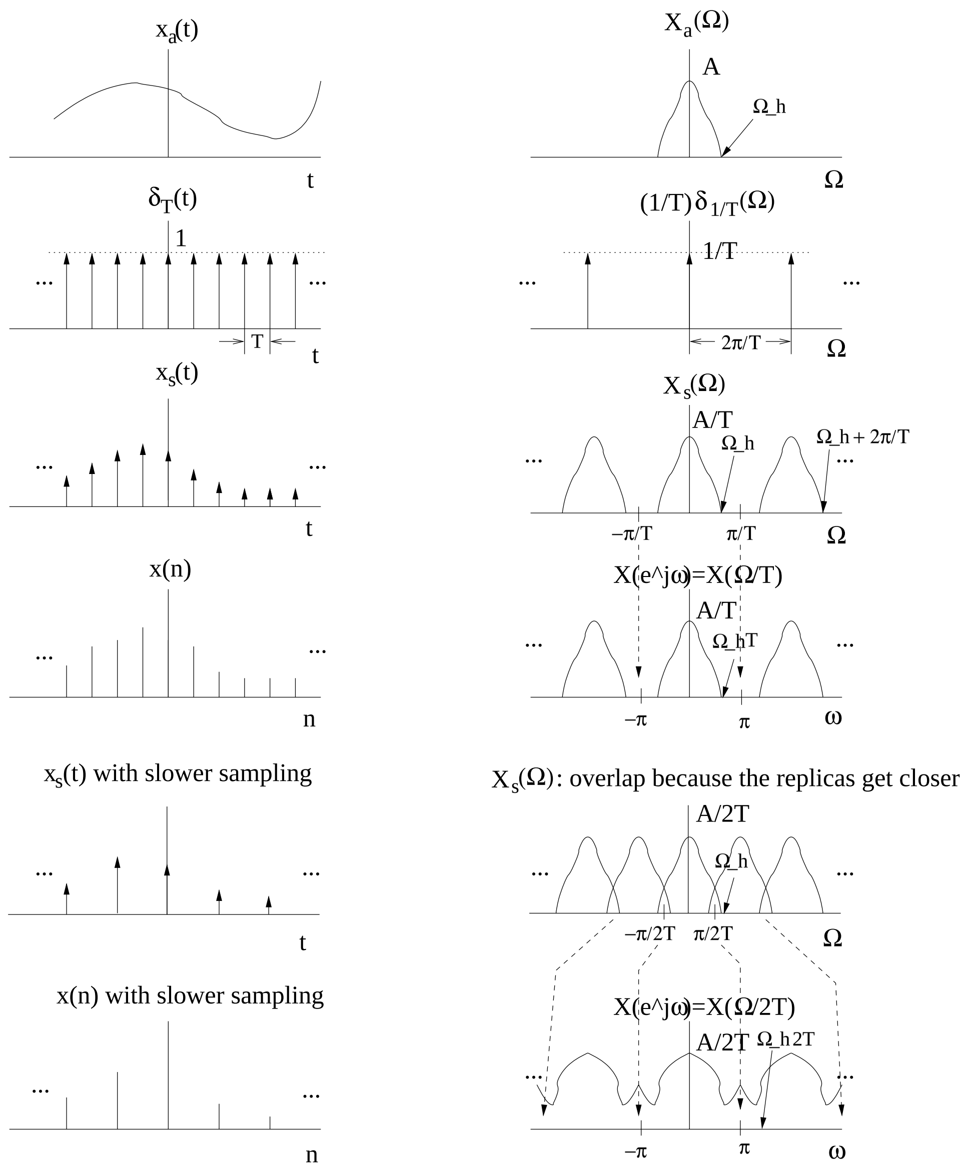
- Σύστημα S: Μια απεικόνιση της εισόδου του στην έξοδο: $y = s(x)$.
- Ένα σύστημα είναι γραμμικό όταν ισχύουν οι αρχές της ομοιογένειας και της υπέρθεσης: $s(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \overline{\alpha_i s(x_i)}$.
- Ένα σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο όταν έχει την ίδια έξοδο για μια δεδομένη είσοδο, ανεξάρτητα με το πότε η είσοδος εφαρμόζεται στο σύστημα.
- Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (Linear Time Invariant - LTI) μπορεί να περιγραφεί
  - Στο χρόνο με χρήση της κρουστικής απόκρισης (impulse response) h_i ($h(t)$).
  - Στη συχνότητα με χρήση της συνάρτησης μεταφοράς (transfer function) $H(z)$ ($H(s)$) και της απόκρισης συχνότητας (frequency response) $H(e^{j\omega T})$ ($H(j\omega)$).
- Πώς μπορούμε να περιγράψουμε ένα Γραμμικό, Χρονικά Μεταβαλλόμενο σύστημα;

Θεώρημα Δειγματοληψίας **Shannon/Nyquist**

- Έστω συνεχές σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$ το οποίο δειγματοληπτείται <u>ομοιόμορφα</u> με περίοδο δειγματοληψίας T.

- Ο μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x_k = x(kT)$ ισούται με

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left[j\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right].$$



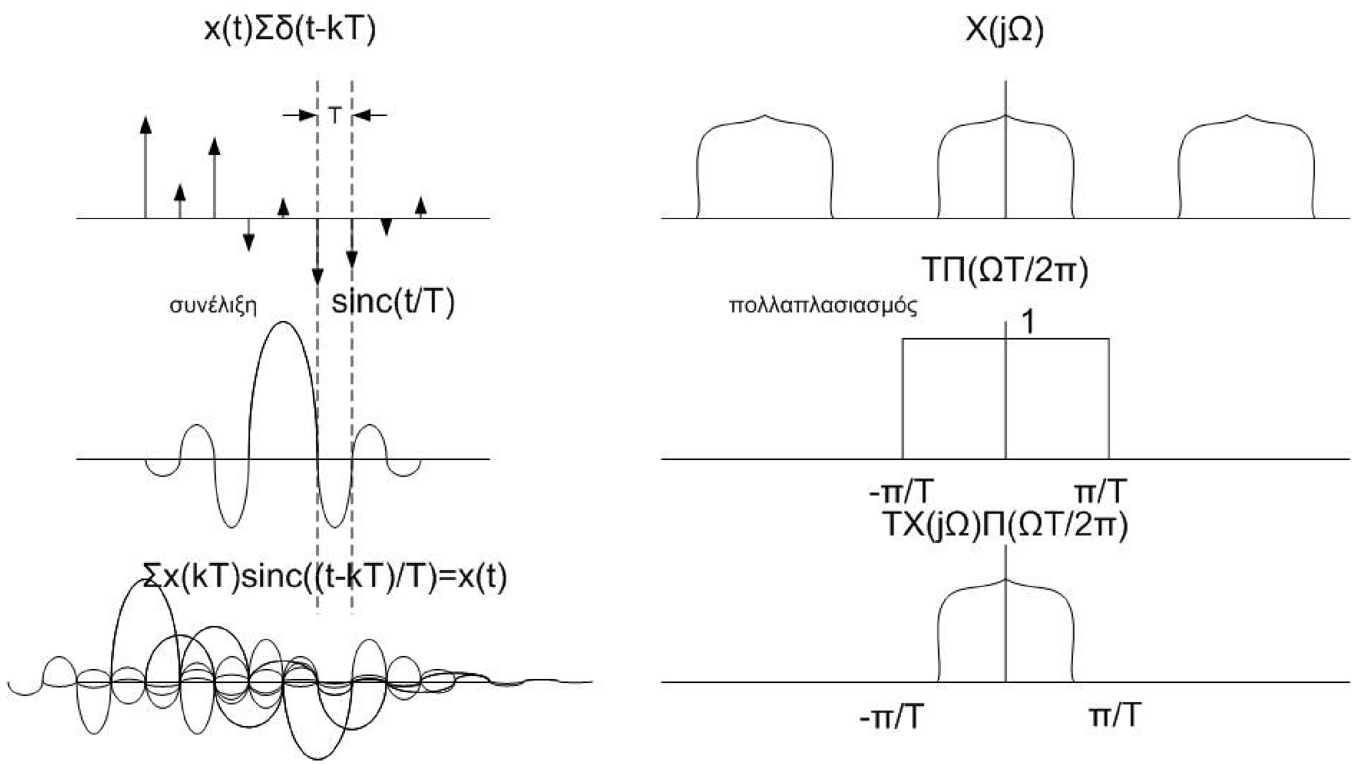
x_a(t)
t
δ_T(t)
1
...
T
x_s(t)
x(n)
n
x_s(t) with slower sampling
x(n) with slower sampling
X_a(Ω)
A
Ω_h
Ω
(1/T) δ_1/T(Ω)
1/T
2π/T
X_s(Ω)
A/T
Ω_h + 2π/T
−π/T
π/T
X(e^jω)=X(Ω/T)
Ω_hT
−π
π
ω
X_s(Ω): overlap because the replicas get closer
A/2T
−π/2T
π/2T
X(e^jω)=X(Ω/2T)
Ω_h2T

Θεώρημα Δειγματοληψίας **Shannon/Nyquist** (2)

- Επομένως, η ανακατασκευή ενός συνεχούς σήματος από τα δείγματά του είναι πάντοτε δυνατή εφόσον η δειγματοληψία γίνει με ρυθμό τουλάχιστον διπλάσιο της μεγαλύτερης συχνότητας του σήματος.
- Ικανή, αλλά όχι αναγκαία συνθήκη (γιατί;)
- Ανακατασκευή σήματος. Με χρήση επίπεδου ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου κέρδους 1. Στο πεδίο του χρόνου:

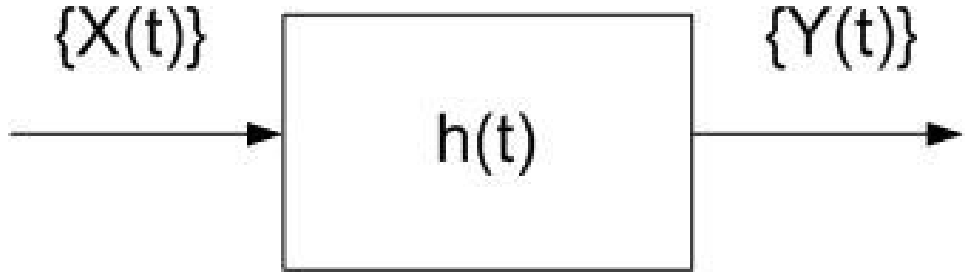
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin\left[\frac{\pi(t-kT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-kT)}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \mathsf{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right).$$

Θεώρημα Δειγματοληψίας **Shannon/Nyquist** (3)



- Το ιδανικό φίλτρο είναι υλοποιήσιμο; Η sinc;

Συστήματα και Στοχαστικές Ανελίξεις



- Έστω μια WSS στοχαστική ανέλιξη $\{X(t)\}$ ($\{X_k\}$) η οποία διέρχεται από το LTI σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Μπορεί να αποδειχθεί (με απλές πράξεις) ότι:
  - $m_Y = m_X H(0)$ ($m_Y = m_X H(z=1)$)
  - $R_Y(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_X(\tau)$ ($R_Y(m) = h_m * h^*_{-m} * R_X(m)$)
  - $S_Y(j\omega) = S_X(j\omega)|H(j\omega)|^2$ ($S_Y(e^{j\omega T}) = S_X(e^{j\omega T})|H(e^{j\omega T})|^2$)
  - $S_Y(s) = S_X(s)H(s)H^*(-s^*)$ ($S_Y(z) = S_X(z)H(z)H^*(1/z^*)$).

Στοχαστικές Ανελίξεις και Δειγματοληψία

- Έστω μια WSS στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$ η οποία δειγματοληπτείται ομοιόμορφα με περίοδο T: $Y_k = X(kT)$.
  - $R_{YY}(k,l) = E[X(kT)X(lT)^*] = R_X((k-l)T)$. Άρα η αυτοσυσχέτιση της ακολουθίας $\{Y_k\}$ προκύπτει από την αυτοσυσχέτιση της $\{X(t)\}$ με δειγματοληψία.
  - $S_Y(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_X(j(\omega - \frac{2\pi k}{T}))$, παρόμοια με την περίπτωση νομοτελειακών σημάτων.
- Επομένως, η ανακατασκευή της συνεχούς στοχαστικής ανέλιξης γίνεται με χρήση βαθυπερατού φίλτρου (παλμών sinc). Ωστόσο, σε αντίθεση με τα νομοτελειακά σήματα, για την ανακατασκευασμένη στοχαστική ανέλιξη $\{\hat{Y}(t)\}$ ισχύει $E[(\hat{Y}(t) - Y(t))^2] = 0$ και όχι $\hat{Y}(t) = Y(t)$, δηλαδή υπάρχει περίπτωση οι $\hat{Y}(t)$ και $Y(t)$ να διαφέρουν σε ένα αριθμήσιμο σύνολο τιμών του χρόνου t. Για τους δικούς μας σκοπούς (ανάλυση και σχεδίαση Ψηφιακών Συστημάτων Επικοινωνιών) η συνθήκη $E[(\hat{Y}(t) - Y(t))^2] = 0$ είναι επαρκής.

Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα

- Βασικές έννοιες στοχαστικών ανελίξεων και σημάτων και συστημάτων.
- Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα.
  - Proakis Ch. 4, Lee & Messerschmitt Ch. 2, Cioffi Ch. 1
  - Καλή αναφορά για θέματα άλγεβρας / διανυσματικών χώρων:
    S. Boyd, EE263 class notes: `www.stanford.edu/class/ee263/`
- Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα

- Είναι δυνατόν να παραστήσουμε τα σήματα σε ένα Ψηφιακό Σύστημα Επικοινωνιών ως διανύσματα (vectors), να ορίσουμε, δηλαδή, διανυσματικό χώρο (vector space) διακριτών και διανυσματικό χώρο συνεχών σημάτων.
- Η αναπαράσταση ως διανύσματα πολλές φορές απλοποιεί το σχεδιασμό και διευκολύνει την εξαγωγή συμπερασμάτων.
- Προτάθηκε αρχικά από τους Wozencraft και Jacobs.
- Στα επόμενα παραθέτουμε την αντιστοιχία μεταξύ της αναπαράστασης σημάτων στο χώρο (ως κυματομορφές) και της αναπαράστασής τους ως διανύσματα.

Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα (2)

- Ένας <u>γραμμικός</u> ή <u>διανυσματικός χώρος</u> $\mathcal{V}$ αποτελείται από ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{x}\}$ και από δύο πράξεις: πρόσθεση και πολλαπλασιασμό με σταθερά.

  Διακριτά σήματα: $\mathbf{x} \leftrightarrow x[k],\ k \in \mathcal{S}$ (ενδεχομένως το $\mathcal{S}$ να περιλαμβάνει όλους τους ακέραιους).

  Συνεχή σήματα: $\mathbf{x} \leftrightarrow x(t),\ t \in \mathcal{S}$ (ενδεχομένως το $\mathcal{S}$ να περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς).

- Συνήθως υποθέτουμε ότι τα σήματα έχουν πεπερασμένη ενέργεια

$$\sum_{k\in\mathcal{S}} |y[k]|^2 < \infty, \qquad \int_{\mathcal{S}} |y(\tau)|^2 d\tau < \infty.$$

- Τα σήματα ενδέχεται να παίρνουν μιγαδικές τιμές, δηλαδή $x[k] \in \mathbf{C}$ ($x(t) \in \mathbf{C}$).

Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός

- Πρόσθεση: $\mathbf{x}+\mathbf{y} \leftrightarrow x[k]+y[k] \; \forall \; k \in \mathcal{S}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \leftrightarrow x(t)+y(t) \; \forall \; t \in \mathcal{S}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathcal{V}$. Επίσης, ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα. Περιλαμβάνεται το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης $\mathbf{0}$ (μηδενικό σήμα), καθώς και το αντίστροφο στοιχείο της πρόσθεσης $-\mathbf{x}$ (αντίθετο σήμα).
- Πολλαπλασιασμός με σταθερά: $\alpha \cdot \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha x[k] \; \forall \; k \in \mathcal{S}$, $\alpha \cdot \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha x(t) \; \forall \; t \in \mathcal{S}$, $\alpha \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{V}$. $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Περιλαμβάνεται το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ($x[k] = 1 \; \forall \; k \in \mathcal{S}$, $x(t) = 1 \; \forall \; k \in \mathcal{S}$). Τέλος, ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$, $(\alpha+\beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$.

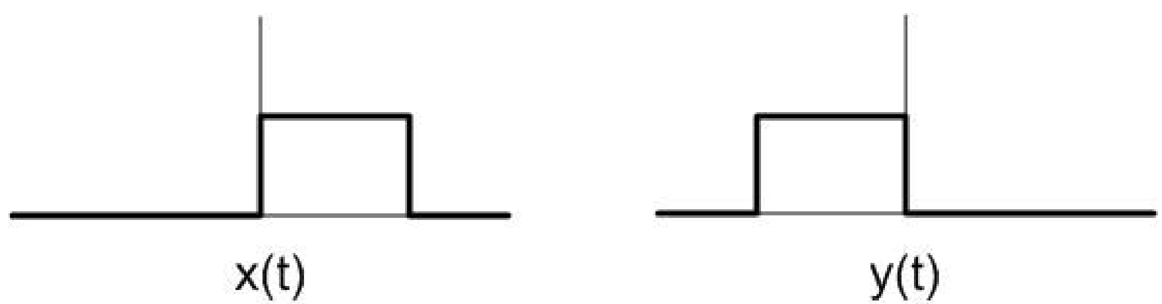
Εσωτερικό γινόμενο

- Το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ στο $N-$διάστατο Ευκλείδειο χώρο ισούται με $\sum_{k=1}^{N} x_k y_k^*$ (υποθέτουμε ότι τα διανύσματα είναι, στη γενική περίπτωση, μιγαδικά).
- Για το χώρο σημάτων, το εσωτερικό γινόμενο (inner product) ορίζεται ως εξής:
  - Διακριτά σήματα: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k \in \mathcal{S}} x[k] y[k]^*$.
  - Συνεχή σήματα: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{\mathcal{S}} x(\tau) y^*(\tau) d\tau$.

  Ένας διανυσματικός χώρος εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert (εφόσον ο χώρος είναι πλήρης – υποθέτουμε ότι είναι).
- Το μέτρο (norm) $||\mathbf{x}||$ ενός σήματος μπορεί να οριστεί ανάλογα:
  $||\mathbf{x}||^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{k \in \mathcal{S}} |x[k]|^2$, $||\mathbf{x}||^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \int_{\mathcal{S}} |x(\tau)|^2 d\tau$.
  Το μέτρο (μήκος) ενός σήματος ισούται με την τετραγωνική ρίζα της ενέργειάς του (λογικό). Υπενθυμίζεται ότι έχει υποτεθεί πεπερασμένη ενέργεια (όχι σήμα ισχύος).

Άλλες ιδιότητες – ορισμοί

- Επομένως, μπορούμε να φανταστούμε τα σήματα ως διανύσματα με μήκος, κατεύθυνση στο χώρο, γωνία μεταξύ τους κλπ.
- Δύο σήματα είναι <u>ορθογώνια</u> όταν $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Για παράδειγμα, $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau)^* d\tau = 0$.



- Ένα σύνολο N διανυσμάτων/σημάτων είναι <u>ορθοκανονικά</u> όταν είναι μεταξύ τους ορθογώνια και το μέτρο του καθενός ισούται με 1.

Άλλες ιδιότητες – ορισμοί (2)

- Ένα σύνολο N διανυσμάτων είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εάν κανένα διάνυσμα δε μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.
- Η τριγωνική ανισότητα ισχύει (προφανώς) για τα σήματα, όπως και για τα διανύσματα: $||x[k] + y[k]|| \leq ||x[k]|| + ||y[k]||$.
- Ανισότητα Cauchy-Schwartz: $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| ||\mathbf{y}||$.
  Η ισότητα ισχύει όταν $\mathbf{x} = k \cdot \mathbf{y}$ (k σταθερά) – θα μας χρειαστεί αργότερα.
  π.χ. για συνεχή σήματα

$$\left| \int_{\mathcal{S}} x(\tau) y^*(\tau) d\tau \right|^2 \leq \left| \int_{\mathcal{S}} |x(\tau)|^2 d\tau \right| \left| \int_{\mathcal{S}} |y(\tau)|^2 d\tau \right|.$$

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων

- Έστω ένα διάνυσμα N διαστάσεων στον Ευκλείδειο χώρο, και N ορθοκανονικά διανύσματα $\mathbf{e}_i$ (επίσης στον Ευκλείδειο χώρο διάστασης N, π.χ. $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ με 1 στη θέση i). Τότε, κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ του N-διάστατου χώρου μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των $\mathbf{e}_i$ τα οποία αποτελούν μια <u>βάση</u> του χώρου:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{N} x_i \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e_i} \rangle \mathbf{e}_i.$$

- Ισοδύναμα, μπορούμε να εκφράσουμε μια συνάρτηση με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων.

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων (2)

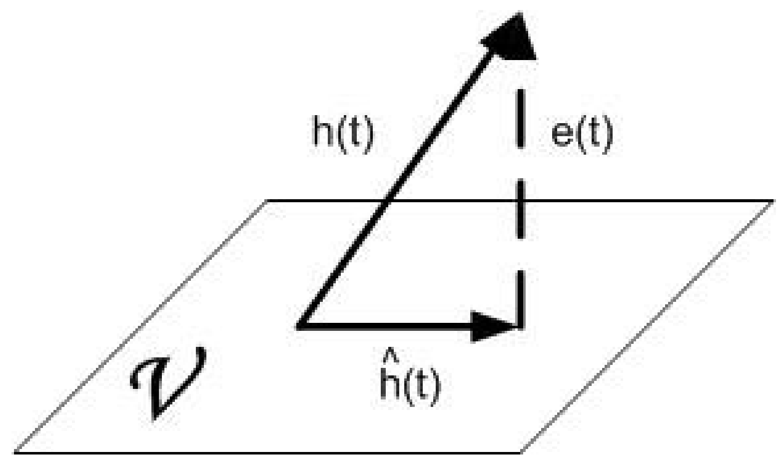
- Έστω N ορθοκανονικές συναρτήσεις $f_i(t)$:

$$\int_{\mathcal{S}} f_i(\tau) f_j^*(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

- Οι συναρτήσεις αυτές καλύπτουν ένα χώρο συναρτήσεων $\mathcal{V}$ διάστασης N (είναι οι συναρτήσεις βάσης του χώρου). Ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του χώρου όλων των συναρτήσεων συνεχούς χρόνου (ο οποίος έχει άπειρη διάσταση).
- Εάν $g(x) \in \mathcal{V}$, $g(x) = \sum_{k=1}^{N} g_k f_k(x) \leftrightarrow \mathbf{g} = \sum_{k=1}^{N} g_k \mathbf{f}_k = \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{g}, \mathbf{f}_k \rangle \mathbf{f}_k$, όπου $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f}_k \rangle = \int_{\mathcal{S}} g(\tau) f_k^*(\tau) d\tau$.
- Παραδείγματα:
  - Σειρές Fourier. Συναρτήσεις βάσης: $e^{\frac{j2\pi kt}{T}} = e^{j2\pi k f_c t}$.
  - Διαμόρφωση FSK. Συναρτήσεις βάσης: $\cos(2\pi k f_c t)$.

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων (3)

- Έστω μια συνάρτηση $h(t)$ η οποία ενδέχεται να μην ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}$. Εάν $\hat{h}(t) = \sum_{k=1}^{N} h_i f_i(t)$ (και, άρα, $\in \mathcal{V}$) πώς πρέπει να επιλεγούν οι συντελεστές h_i ώστε να ελαχιστοποιηθεί το τετράγωνο της διαφοράς $e(t) = h(t) - \hat{h}(t)$;



Θεώρημα προβολής

- Μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά αυτό που περιμένουμε διαισθητικά από το σχήμα, ότι, δηλαδή, η συνάρτηση $\hat{h}(t)$ η οποία ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα ισούται με την προβολή της $h(t)$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$: $\hat{\mathbf{h}} = \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{h}, \mathbf{f}_k \rangle \mathbf{f}_k$.
- Θεώρημα Προβολής: Έστω ένας υπόχωρος $\mathcal{V}$ του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ του $\mathcal{H}$. Υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ για το οποίο ισχύει ότι

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = 0$$

  για οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{y}$ του $\mathcal{V}$. Το διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ ονομάζεται προβολή του $\mathbf{x}$ στον $\mathcal{V}$.
- Διαισθητικά, εάν το διάνυσμα $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ δεν ήταν κάθετο στο $\mathcal{V}$ θα μπορούσαμε να προβάλουμε ένα μέρος του στο $\mathcal{V}$ με αποτέλεσμα το διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}$ να προσεγγίσει ακόμα καλύτερα το διάνυσμα $\mathbf{x}$. Το $\mathbf{e}$ περιέχει μόνο την ποσότητα πληροφορίας του $\mathbf{x}$ η οποία βρίσκεται στο συμπλήρωμα (ορθογώνιο υπόχωρο) $\mathcal{V}^{\perp}$ του $\mathcal{V}$.

Διαδικασία **Gram-Schmidt**

- Η διαδικασία Gram-Schmidt είναι μια μέθοδος κατασκευής ορθοκανονικών διανυσμάτων.
- Έστω N διανύσματα $\mathbf{v}_i$ (όχι κατ᾽ ανάγκη γραμμικά ανεξάρτητα)
  - $\boxed{\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||}.}$
  - $\mathbf{u}_2' = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1.$ $\boxed{\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{u}_2'}{||\mathbf{u}_2'||}.}$
  - $\mathbf{u}_3' = \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2.$ $\boxed{\mathbf{u}_3 = \dfrac{\mathbf{u}_3'}{||\mathbf{u}_3'||}.}$
  - κ.ο.κ.

Διαδικασία **Gram-Schmidt** (2)

- Σε κάθε βήμα προβάλλουμε το διάνυσμα $\mathbf{v}_i$ στον υπόχωρο που δημιουργούν τα διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\}$ και κανονικοποιούμε το μέτρο στο 1. Το $\mathbf{u}_i$ περιέχει μόνο πληροφορία η οποία δεν περιέχεται στα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\}$. Επαγωγικά, η πληροφορία που περιέχει το $\mathbf{u}_i$ δεν περιέχεται σε επόμενα διανύσματα $\mathbf{u}_k$. Άρα, τα $\mathbf{u}_i$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους.
- Η σειρά με την οποία επιλέγουμε τα $\mathbf{v}_i$ είναι αυθαίρετη. Τα ορθοκανονικά διανύσματα που προκύπτουν ενδέχεται να είναι διαφορετικά, αλλά ο αριθμός τους είναι ο ίδιος και ίσος με τη διάσταση του υπόχωρου (η οποία ενδέχεται να είναι $< N$).
- Εάν η διάσταση του υπόχωρου είναι $< N$, κάποια από τα $\mathbf{u}_i$ θα είναι μηδενικά (όλη η πληροφορία του $\mathbf{v}_i$ περιέχεται σε προηγούμενα διανύσματα).

Παραγοντοποίηση **QR**

- Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}_i$ είναι συνάρτηση μόνο των $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_i\}$.
  - $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 ||\mathbf{v}_1||$
  - $\mathbf{v}_2 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + ||\mathbf{u}_2'|| \mathbf{u}_2$
  - κ.ο.κ.

  Μπορούμε, επομένως να γράφουμε

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_M \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \ldots & r_{1,N} \\ 0 & r_{2,2} & \ldots & r_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & r_{M,N} \end{bmatrix}}_{R}$$

- Ο πίνακας R είναι κλιμακωτός άνω τριγωνικός (κλιμακωτός όταν κάποια από τα διανύσματα $\mathbf{v}_i$ είναι εξαρτημένα $(M < N)$). Ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος.
- Η παραγοντοποίηση QR χρησιμοποιείται συχνά για αποδείξεις και απλοποίηση εκφράσεων και υλοποιήσεων.

Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

- Βασικές έννοιες στοχαστικών ανελίξεων και σημάτων και συστημάτων.
- Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα.
- Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες
  - Lee & Messerschmitt Ch. 3, 5 (2nd ed.).

Θόρυβος

- Ο θόρυβος είναι ένα άγνωστο σήμα.
- Μπορεί να οφείλεται σε φυσικά φαινόμενα (π.χ. θερμικός θόρυβος, ηλεκτρικές εκκενώσεις), στον ανθρώπινο παράγοντα (π.χ. κινητήρες, παρεμβολές στις ραδιοσυχνότητες) ή στα συστήματα επικοινωνιών (διαφωνία, θόρυβος κβαντισμού).
- Κατηγορίες θορύβου
  - Ανάλογα με το πώς υπερτίθεται στο σήμα: Αθροιστικός / Πολλαπλασιαστικός / Θόρυβος φάσης.
  - Ανάλογα με τη στατιστική του κατανομή: στάσιμος, μη στάσιμος, κρουστικός (impulse/burst).
- Το ποσό της πληροφορίας που μπορούμε να μεταδώσουμε εξαρτάται (και) από το θόρυβο.

Λευκός Θόρυβος (**White Noise**)

- Ας περιοριστούμε, προς το παρόν, στην κατηγορία του WSS αθροιστικού θορύβου.
- Παρόλο που δε γνωρίζουμε τις ακριβείς τιμές του θορύβου, ενδέχεται να γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητές του (π.χ. μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση).
- Έστω η WSS στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου $\{n_k\}$ με $m = 0$ και $R(l) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta_l$ (δέλτα του Kronecker).
  - Η $\{n_k\}$ εξελίσσεται όσο πιο τυχαία γίνεται στο χρόνο k (γιατί;)
  - Η PSD είναι επίπεδη. Διαισθητικά, η $\{n_k\}$ μπορεί να μεταβληθεί εξίσου πιθανά με οποιαδήποτε ‘ταχύτητα’.
- Μια στοχαστική ανέλιξη με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση $R(t_1, t_2) = K\delta(t_1 - t_2)$ ονομάζεται <u>λευκή</u> (σε αναλογία με το λευκό φως το οποίο περιέχει όλες τις συχνότητες του ορατού <u>φάσ</u>ματος).

Λευκός Θόρυβος (**White Noise**) (2)

- Έστω, τώρα, η WSS στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου $\{n(t)\}$ με $m = 0$ και $R(\tau) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(\tau)$.
- Στη φύση είναι αδύνατο να υπάρχει τέτοιο σήμα (συνεχής λευκός θόρυβος) (γιατί;)
- Ας υποθέσουμε, όμως, ότι η $\{n(t)\}$ έχει επίπεδη PSD στις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν. Εάν γίνει δειγματοληψία σε αυτές τις συχνότητες (μετά, βέβαια, από κατάλληλο βαθυπερατό φίλτρο), η διακριτή στοχαστική ανέλιξη $\{n_k\}$ που προκύπτει έχει επίπεδη PSD. Άρα, στο ψηφιακό πεδίο η $\{n_k\}$ είναι λευκή.

Θερμικός θόρυβος (**Johnson**)

- Οφείλεται στη θερμική κίνηση των ηλεκτρονίων. Εμφανίζεται σε οποιοδήποτε σύστημα λειτουργεί σε μη μηδενική θερμοκρασία. Η (μονόπλευρη) PSD του θερμικού θορύβου ισούται με

$$S(f) = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT_n}} - 1},$$

όπου h η σταθερά του Planck, k η σταθερά του Boltzmann ($= 1.38 \cdot 10^{-23}$ Joules ανά βαθμό Kelvin) και T_n η θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin.

- Η (μονόπλευρη) PSD για συχνότητες έως και τα 300, περίπου, GHz ισούται με kT_n (επίπεδη). Επομένως, στο ψηφιακό πεδίο, και εφόσον η δειγματοληψία γίνεται κάτω από τα 300 GHz, ο θερμικός θόρυβος μπορεί να θεωρηθεί λευκός με πολύ καλή προσέγγιση.
- Στην ουσία, ο θερμικός θόρυβος μεταβάλλεται εξίσου πιθανά στην περιοχή 'ταχυτήτων' έως και 300 GHz. Για τα ψηφιακά συστήματα τα οποία λειτουργούν κάτω από τα 300 GHz ο θόρυβος μεταβάλλεται εξίσου πιθανά σε όλες τις χρησιμοποιούμενες συχνότητες.

Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος (**AWGN**)

- Το γεγονός ότι η αυτοσυσχέτιση του λευκού θορύβου ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(t)$ δε δίνει καμια πληροφορία για την κατανομή των τιμών του. Για παράδειγμα, μια λευκή στοχαστική ανέλιξη ενδέχεται να παίρνει τιμές μόνο 0 και 1 (Bernoulli).
- Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος: Λευκός θόρυβος τα δείγματα του οποίου είναι ανεξάρτητες ομοιόμορφα κατανεμημένες (iid) γκαουσιανές μεταβλητές.
- Ο AWGN είναι το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο θορύβου. Ο λόγος είναι ότι μοντελοποιεί πολύ καλά ένα μεγάλο ποσοστό κυματομορφών θορύβου που εμφανίζεται στις Ψηφιακές Επικοινωνίες.
  - Λευκότητα: Αποτέλεσμα της τυχαιότητας της κίνησης των ηλεκτρονίων.
  - Γκαουσιανός: Δικαιολογείται από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα: Ο συνολικός θόρυβος είναι αποτέλεσμα της αθροιστικής συμβολής ενός πολύ μεγάλου αριθμού (iid) πηγών θορύβου.
  - Ο θερμικός θόρυβος μοντελοποιείται ως AWGN.
- Έγχρωμος (colored) Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος: Η PSD δεν είναι επίπεδη. Μοντελοποιεί θόρυβο λόγω διαφωνίας (crosstalk), φίλτρων.