

ΕΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών
Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάκης
5ο Μάθημα – 16 Νοεμβρίου 2007

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

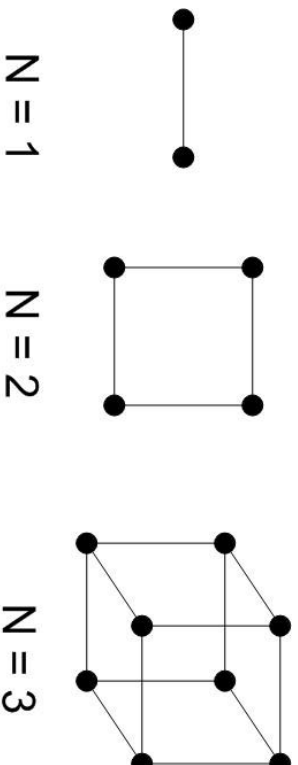
- Κατηγορίες Αστερισμών
 - Cioffi Ch. 1
- PAM και QAM

Πώς συγκρίνουμε διαφορετικές διαμορφώσεις μεταξύ τους;

- Για να υλοποιήσουμε τις συναρτήσεις βόσης οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση χρησιμοποιούμε τους πόρους του καναλιού: χρόνο, συγχρότητα και χώρο. Κάθε μία από τις N διαστάσεις έχει κόστος γιατί απαιτεί χρήση κάποιων από τους πόρους του συστήματος.
- Για παράδειγμα, ένα σύστημα 2 διαστάσεων μπορεί να υλοποιηθεί με εναλλάξ μετάδοση στο χρόνο κάθε διάστασης ή με χρήση δύο περιοχών συχνοτήτων.
- Για δίκαιη σύγκριση συστημάτων, πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όλες οι παρακάτω ποσότητες:
 1. Ο ρυθμός μετάδοσης R .
 2. Η χρησιμοποιούμενη ισχύς P_x .
 3. Το συνολικό εύρος ζώνης W που χρησιμοποιεί το σύστημα.
 4. Η περίοδος T_s που διαρκεί η μετάδοση κάθε συμβόλου.
 5. Το BER ή η P_e .
- Αν οι παραπάνω ποσότητες κανονικοποιηθούν κατάλληλα, 3 ποσότητες αρκούν για σύγκριση συστημάτων: **1.** Ο αριθμός ψηφίων ανά διάσταση $\bar{b} = \frac{b}{N}$, **2.** Η ενέργεια ανά διάσταση $\bar{\xi}_x = \frac{\xi_x}{N}$ και **3.** Η κανονικοποιημένη πιθανότητα σφάλματος $\bar{P}_e = \frac{P_e}{N}$.

Κυβικοί Αστερισμοί (Cubic Constellations)

- Αριθμός διαστάσεων $N =$ αριθμός bits b .
- Αντιστοιχία μιας συνάρτησης βάσης ϕ_m σε κάθε bit.
- Γραμμική διαμόρφωση.
- Χρησιμοποιούνται συχνά σε ατλά κανάλια.



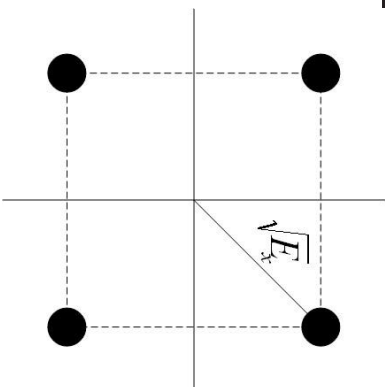
Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα

- **Binary Antipodal:** 2 σήματα ($N=1$), $x_0(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x}\phi(t) = -x_1(t)$.
 - **Binary Phase Shift Keying (BPSK):** $\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλοού.
 - **Bipolar (NRZ):** $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλοού.
 - Κωδικοποίηση **Manchester (Bi-phase level):** $\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [\frac{T}{2}, T] \\ 0 & \text{αλλοού} \end{cases}$
 - Τι εύρος ζώνης απαιτεί κάθε μία από τις παραπάνω $\phi(t)$;
- **On-Off Keying (OOK):** 2 σήματα ($N=1$), $x_0(t) = \sqrt{2\mathcal{E}_x}\phi(t)$. $x_1(t) = 0$.
 - $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλοού.
 - Υποδέσμερη κατά 3 dB σε σχέση με **binary antipodal** αστερισμούς (γιατί;)
 - Χρησιμοποιείται σε οπτικά συστήματα.

Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα – **QPSK**

- Quadrature Phase Shift Keying (QPSK): 4 σήματα (2 bits $\rightarrow N = 2$).
- $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλιού. $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλιού.
- $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2] = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [-1 \ -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [-1 \ +1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [+1 \ -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [+1 \ +1] \end{cases}$
- Ίδιο εύρος ζώνης με τη BPSK. d_{\min}^2 , BPSK $= 2d_{\min}^2$, QPSK. Ωστόσο, εάν η ενέργεια ανά διάσταση της QPSK ισούται με την ενέργεια της BPSK η \bar{P}_e της QPSK ισούται με την P_e της BPSK.

QPSK: Υπολογισμός P_e



- Θεωρούμε ότι όλα τα σήματα μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα.
- Πιθανότητα σωστής λήψης: $P_e = \sum_{i=0}^3 P_{e|i} P_{x_i} = P_{e|i} \stackrel{\text{γιατί;}}{=} (1 - Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}]) (1 - Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}]) = 1 - 2Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}] + (Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}])^2$.
- Πιθανότητα σφάλματος: $P_e = 1 - P_e = 2Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}] - (Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}])^2 < 2Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}]$
(NNUB) $\Rightarrow \bar{P}_e \approx Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}] = Q[\frac{\sqrt{2E_s}}{2\sigma}] = Q[\frac{2\sqrt{E_s}}{2\sigma}] = Q[\frac{d_{\min, \text{BPSK}}}{2\sigma}]$.

Ορθογώνιοι Αστερισμοί (Orthogonal Constellations)

- Για τους κυβικούς αστερισμούς είδαμε ότι $N = b$.
- Στους ορθογώνιους αστερισμούς, ο αριθμός σημάτων M είναι ανάλογος της διάστασης. Επομένως, $M = \alpha N \Rightarrow b = \log_2 M = \log_2 \alpha N \Rightarrow \bar{b} = \frac{b}{N} = \frac{\log_2 \alpha N}{N}$.
- Ο αριθμός των bits ανά διάσταση ελαττώνεται όσο αυξάνεται το N !

Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών

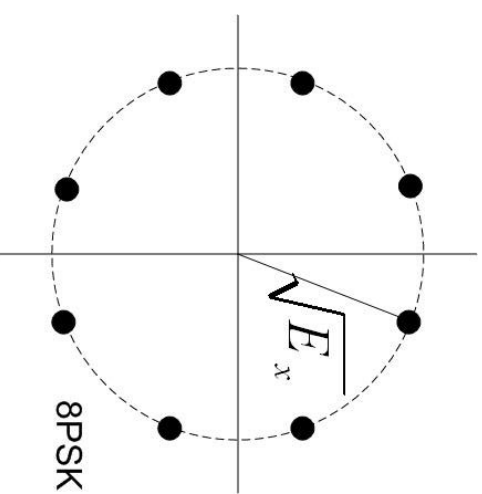
- Block orthogonal: $M = N \Rightarrow$ Μία συνάρτηση βόσσης για κάθε σήμα.
 - $\mathbf{x}_i = [0 \dots 0 \sqrt{\mathcal{E}_x} 0 \dots 0]$. $x_i(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x} \phi_i(t)$.
 - Frequency Shift Keying (FSK): $\phi_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{m\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού.
 - Ποιά είναι η d_{\min} των block orthogonal;
 - P_e του block orthogonal αστερισμού (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1):
$$P_e = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u - \sqrt{\mathcal{E}_x})^2} [1 - Q(u/\sigma)]^{N-1} du.$$
 - Η $E[\mathbf{x}]$ του αστερισμού block orthogonal είναι μη μηδενική (και ίση με $(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1 \ 1 \ \dots \ 1]$).
- Αστερισμός simplex: Block orthogonal μετατοπισμένος κατά $-(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1 \ 1 \ \dots \ 1]$ ώστε η $E[\mathbf{x}]$ να ισούται με 0 (και να ελαχιστοποιηθεί, έτσι, η μέση ενέργεια). Τα σήματα δεν είναι, πλέον, ορθογώνια μεταξύ τους.

Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών (2)

- **Biorthogonal αστερισμοί:** Προκύπτουν από τους ορθογώνιους αστερισμούς με προσθήκη του αντίθετου σήματος — \mathbf{x} για κάθε σήμα \mathbf{x} .
– $P_{e, \text{biorthogonal}} = 1 - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u - \sqrt{E_x})^2} [1 - 2Q(u/\sigma)]^{N-1} du$.
- **Pulse Position Modulation (PPM):** Παλμοί σε διαφορετική θέση στο χρόνο.
- **Pulse Duration Modulation (PDM):** Παλμοί διαφορετικής διάρκειας. Τα σήματα δεν είναι ορθογώνια.
Χρήση σε οπτική αποθήκευση δεδομένων (π.χ. **CD**).

Κυκλικοί Αστερισμοί (Circular Constellations) – MPSK

- Τα σήματα του αστερισμού τοποθετούνται επάνω σε κύκλο ακτίνας $\sqrt{\mathcal{E}_x}$, και σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις. $N = 2$.
- Μόνο η φάση των σημάτων διαφέρει \Rightarrow MPSK κατάλληλη για διαμόρφωση σε κανάλια με μη γραμμική παραμόρφωση πλάτους (π.χ. κανάλια διαλείψεων).
- NNUB: $P_e < 2Q \left[\frac{\sqrt{\mathcal{E}_x} \sin \frac{\pi}{M}}{\sigma} \right]$.

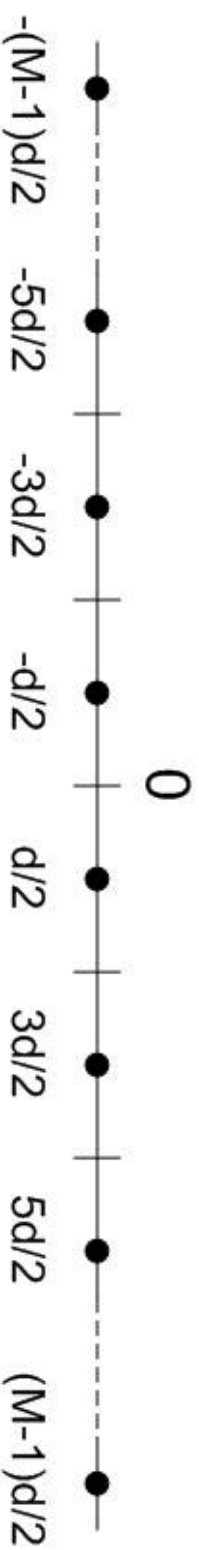


PAM και QAM

- Κατηγορίες Αστερισμών
- **PAM και QAM**
 - Cioffi Ch. 1

Διαμόρφωση Πλάτους Παλμού

Pulse Amplitude Modulation – PAM



- $N = 1$ διάσταση. M σύμβολα $\Rightarrow \log_2 M$ bits /μετάδοση.
- Συνήθως $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ ή raised cosine.
- $d_{\min} = d$.

- Με πρόξενς (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1):

$$\mathcal{E}_x = \bar{\mathcal{E}}_x = \frac{d^2}{12} [M^2 - 1]$$

\Rightarrow

$$d = \sqrt{\frac{12\mathcal{E}_x}{M^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow M = \sqrt{\frac{12\mathcal{E}_x}{d^2} + 1} \Rightarrow$$

$$b = \log_2 M = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{12\mathcal{E}_x}{d^2} + 1 \right)$$

Pulse Amplitude Modulation – PAM (2)

- $\mathcal{E}_x(b+1) = 4\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{4}$. Για ακούνητως μεγάλες τιμές του b απαιτείται 4πλάσια ενέργεια (~ 6 dB επιπλέον) για τη μετάδοση ενός επιπλέον bit.
- Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος:
 - Για τα $M - 2$ σωστικά σημεία: $P_{c|i} = 1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$.
 - Για τα 2 εξωτερικά σημεία: $P_{c|i} = 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$.
 - Επομένως, $P_e = \frac{M-2}{M}\left(1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) + \frac{2}{M}\left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \Rightarrow P_e = \bar{P}_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) < 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$
- Η προσέγγιση (NNUB) γίνεται πιο ακριβής καθώς $M \rightarrow \infty$.
- Με χρήση σχέσεων της προηγούμενης διαφάνειας,

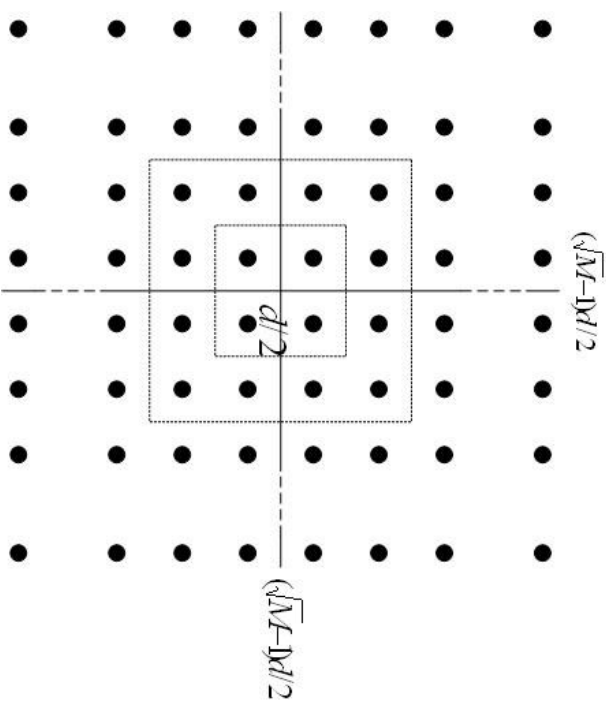
$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2 - 1}}\text{SNR}\right)$$

Pulse Amplitude Modulation – PAM (3)

Στον πίνακα (βλ. επίσης Cioffi Ch. 1) έχει υπολογιστεί ο απαιτούμενος SNR για σταθερή $P_e = 10^{-6}$ και διαφορετικό αριθμό bits/μετάδοση. Επίσης, έχει υπολογιστεί η τιμή του SNR η οποία απαιτείται ώστε η χωρητικότητα του καναλιού AWGN να ισούται με b bits/μετάδοση. Παρατηρούμε ότι η διαμόρφωση PAM για $P_e = 10^{-6}$ έχει απώλειες περίπου 9 dB σε σχέση με τη βέλτιστη διαμόρφωση με την οποία επιτυγχάνεται ρυθμός μετάδοσης ίσος με τη χωρητικότητα του καναλιού.

b	M	$P_e = 10^{-6}$ για $\frac{d}{2\sigma}$ [dB]	SNR [dB]	αύξηση του SNR [dB]	$2^{2b} - 1$ [dB]
1	2	13.53	13.53	–	4.77
2	4	13.69	20.68	7.15	11.76
3	8	13.75	26.97	6.29	17.99
4	16	13.77	33.06	6.09	24.07
5	32	13.78	39.10	6.04	30.10
6	64	13.79	45.14	6.04	36.12

Διαμόρφωση Πλάτους με Ορθογωνισμό Φάσης Quadrature Amplitude Modulation – QAM



- Γενίκευση της PAM σε $N = 2$ διαστάσεις.
- Στο σχήμα απεικονίζεται ο αστερισμός Square QAM (SQ-QAM) ο οποίος αντιστοιχεί σε ζυγό αριθμό bits b .

Quadrature Amplitude Modulation – QAM (2)

- Ως συναρτήσεις βάσης συνήθως χρησιμοποιούνται οι $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_c t)$ και $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \sin(2\pi f_c t) \rightarrow$ ζωνοπερατή (bandpass) μετάδοση.

- Μέση ενέργεια αστερισμού SQ-QAM: Με πράξεις (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1), $\mathcal{E}_{M\text{-QAM}} =$

$$2\mathcal{E}_{\sqrt{M}\text{-PAM}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_{M\text{-QAM}} = d^2 \frac{M-1}{6}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{E}}_{M\text{-QAM}} = d^2 \frac{M-1}{12} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\frac{6\mathcal{E}_x}{M-1}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{6\mathcal{E}_x}{d^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\bar{b} = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{6\mathcal{E}_x}{d^2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{12\bar{\mathcal{E}}_x}{d^2} + 1 \right)$$

ίσο με την PAM (λογικό – γιατί;)

Quadrature Amplitude Modulation – QAM (3)

- $\mathcal{E}_x(b + 1) = 2\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{6}$. Για αποκούντως μεγάλες τιμές του b απαιτείται διπλασία ενέργεια (~ 3 dB επιπλέον) για τη μετάδοση ενός επιπλέον bit (ανά διδιάστατο σύμβολο).
 - Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος:
 - Για τα 4 γωνιακά σημεία: $P_{e|i} = (1 - Q(\frac{d}{2\sigma}))^2$
 - Για τα $(\sqrt{M} - 2)^2$ εσωτερικά σημεία: $P_{e|i} = (1 - 2Q(\frac{d}{2\sigma}))^2$
 - Για τα $4(\sqrt{M} - 2)$ πλευρικά σημεία: $P_{e|i} = (1 - Q(\frac{d}{2\sigma}))(1 - 2Q(\frac{d}{2\sigma}))$
 - Με πράξεις,

$$P_e = 2\bar{P}_e = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 \left(Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow$$
 - Το **SNR** είναι ανά διάσταση ($= \bar{\mathcal{E}}_x / \sigma^2$).
 - Η προσέγγιση (**NNUB**) γίνεται πιο ακριβής καθώς $M \rightarrow \infty$.
- $$\bar{P}_e < 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}} \text{SNR}\right)$$

Quadrature Amplitude Modulation – QAM (4)

Στον πίνακα (βλ. επίσης Cioffi Ch. 1) έχει υπολογιστεί ο απαιτούμενος SNR για σταθερή $\bar{P}_e = 10^{-6}$ και διαφορετικό αριθμό bits/μετάδοση. Επίσης, έχει υπολογιστεί η τιμή του SNR η οποία απαιτείται ώστε η χωρητικότητα του καναλιού AWGN να ισούται με b bits/μετάδοση. Παρατηρούμε ότι η διαμόρφωση QAM για $P_e = 10^{-6}$ έχει απώλειες περίπου 9 dB σε σχέση με τη βέλτιστη διαμόρφωση με την οποία επιτυγχάνεται ρυθμός μετάδοσης ίσος με τη χωρητικότητα του καναλιού.

$b = 2\bar{b}$	M	$\bar{P}_e = 10^{-6}$ για $\frac{d}{2\sigma}$ [dB]	SNR [dB]	αύξηση του SNR ανά bit [dB]	$2^{2\bar{b}} - 1$ [dB]
2	4	13.53	13.53	–	4.77
4	16	13.69	20.68	3.58	11.76
6	64	13.75	26.97	3.15	17.99
8	256	13.77	33.06	3.05	24.07
10	1024	13.78	39.10	3.02	30.10
12	2048	13.79	45.14	3.02	36.12

Παράδειγμα: Ψηφιακή Δορυφορική Εκπομπή (Cioffi 1.6.3)

- Διαμόρφωση: 4-QAM.
- 20 φέρονες, μεταξύ 12.2 και 12.7 GHz.
- Ρυθμός μετάδοσης συμβόλου (symbol rate): $\frac{1}{T} = 19.151$ MHz.
- Εύρος ζώνης: 24 MHz. Γιατί δεν είναι ίσο με $\frac{1}{T}$;
- Επομένως, ρυθμός μετάδοσης δεδομένων (data rate): $R = 38.302$ Mbps σε κάθε φέρονσα.
- Για τη μετάδοση video απαιτούνται περίπου 2-3 Mbps \rightarrow έως 16 κανάλια ανά φέρονσα.
- Για τα αναλογικά κανάλια χρησιμοποιείται κανάλι 24 MHz. Επομένως, με την ψηφιακή μετάδοση έχουμε εξοικονόμηση φάσματος. Αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη συμπίεση του video.
- Παρατηρήστε ότι ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων εξαρτάται από το εύρος ζώνης, αλλά δεν ισούται με αυτό. Η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που στέλνεται 1 bit/μετάδοση.