ΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

4ο Μάθημα – 8 Νοεμβρίου 2007

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- Ανίχνευση: MAP και ML
- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
- Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN
- Κατηγορίες Αστερισμών

Ανίχνευση Μέγιστης εκ των Υστέρων Πιθανότητας (**Maximum a posteriori probability (MAP) detection**)

- Έστω ότι ο πομπός εκπέμπει το μήνυμα m_i και ότι ο δέκτης λαμβάνει σήμα $\mathbf{y}$. $P_{c|\mathbf{y}} = Pr(\hat{m} = m_i | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = p_{M|\mathbf{Y}}(m_i|\mathbf{y}) = p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})$ (γιατί;)
- Ορισμός: Ο ανιχνευτής MAP επιλέγει το σήμα $\mathbf{x}_i$ που μεγιστοποιεί την εκ των υστέρων πιθανότητα $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})$ δεδομένου ότι ελήφθη το σήμα $\mathbf{y}$.
- Από το θεώρημα Bayes, $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y}) = \frac{p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}$.
- Δεδομένου ότι ο παρονομαστής $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ είναι κοινός για όλες τις $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})$, ο ανιχνευτής MAP μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής:

$$\boxed{\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j)\ \forall\ j \neq i.}$$

Ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας (**Maximum Likelihood (ML) detection**)

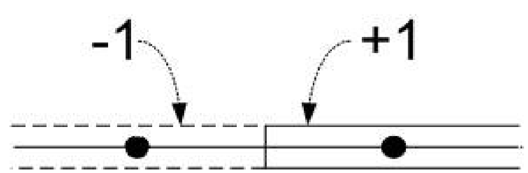
- Εάν όλα τα μεταδιδόμενα σύμβολα (και μηνύματα) είναι <u>ισοπίθανα</u>: $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{M}$, $i = 0, 1, \ldots, M-1$, ο κανόνας ανίχνευσης MAP απλοποιείται στον κανόνα ανίχνευσης ML

$$\boxed{\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j) \ \forall \ j \neq i.}$$

- Ο ανιχνευτής ML χρησιμοποιείται συχνά σε Ψηφιακά Συστήματα. Ωστόσο, μερικές φορές η εύρεση αναλυτικής έκφρασης για τις $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ ενδέχεται να είναι αδύνατη ή οι εκφράσεις μπορεί να είναι πολύπλοκες. Για το λόγο αυτό πολλοί δέκτες χρησιμοποιούν προσεγγιστικούς κανόνες (με αποτέλεσμα να αυξάνεται η πιθανότητα λάθους σε σχέση με την ανίχνευση ML).

Περιοχές Αποφάσεων (**Decision (Voronoi) Regions**)

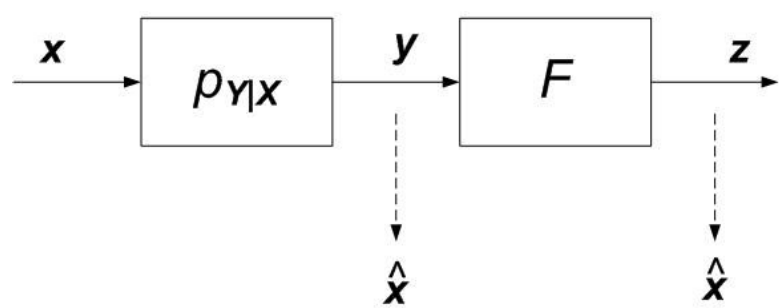
- Προκειμένου να μην υπολογίζεται η τιμή των συναρτήσεων $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ (ή του γινομένου τους με τις $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)$) στο δέκτη κάθε φορά που λαμβάνεται ένα σήμα $\mathbf{y}$, μπορεί να έχει προσδιοριστεί εκ των προτέρων το σήμα $\mathbf{x}_i$ που προκύπτει από τον κανόνα ML (ή MAP) για κάθε πιθανή τιμή του λαμβανόμενου σήματος $\mathbf{y}$.
- Ο δέκτης προσδιορίζει την περιοχή του Ευκλείδειου χώρου (περιοχή απόφασης) στην οποία ανήκει το $\mathbf{y}$ το οποίο λαμβάνει, και με βάση την περιοχή αποφασίζει για το μεταδοθέν σήμα.
- Οι περιοχές απόφασης για το δέκτη ML του καναλιού με δυαδική μετάδοση και γκαουσιανό θόρυβο που εξετάσαμε ενωρίτερα φαίνονται στο σχήμα. Μαθηματικά, εάν $y < 0 \rightarrow x = -1$, ενώ εάν $y \geq 0 \rightarrow x = +1$.



- Θα δούμε στη συνέχεια ότι, στην περίπτωση γκαουσιανού καναλιού, οι κανόνες MAP και ML απλοποιούνται σημαντικά σε σχέση με τη γενική τους μορφή.

Θεώρημα Αντιστρεψιμότητας (**Reversibility Theorem**)

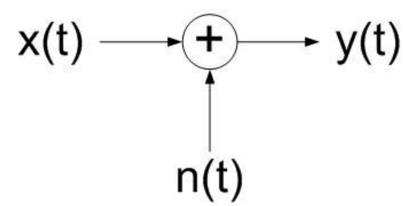
- Η εφαρμογή <u>αντιστρέψιμου</u> μετασχηματισμού στο διάνυσμα εξόδου $\mathbf{y}$ του καναλιού δεν επηρεάζει την επίδοση του ανιχνευτή MAP.
- Επομένως, στο σχήμα, εφόσον ο μετασχηματισμός F είναι αντιστρέψιμος, η εκτίμηση MAP που βασίζεται στο $\mathbf{y}$ θα είναι ίδια με την εκτίμηση MAP που βασίζεται στο $\mathbf{z}$.
- Φυσικά, οι περιοχές απόφασης των δύο ανιχνευτών MAP θα είναι, στη γενική περίπτωση, διαφορετικές.



Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (**AWGN**)

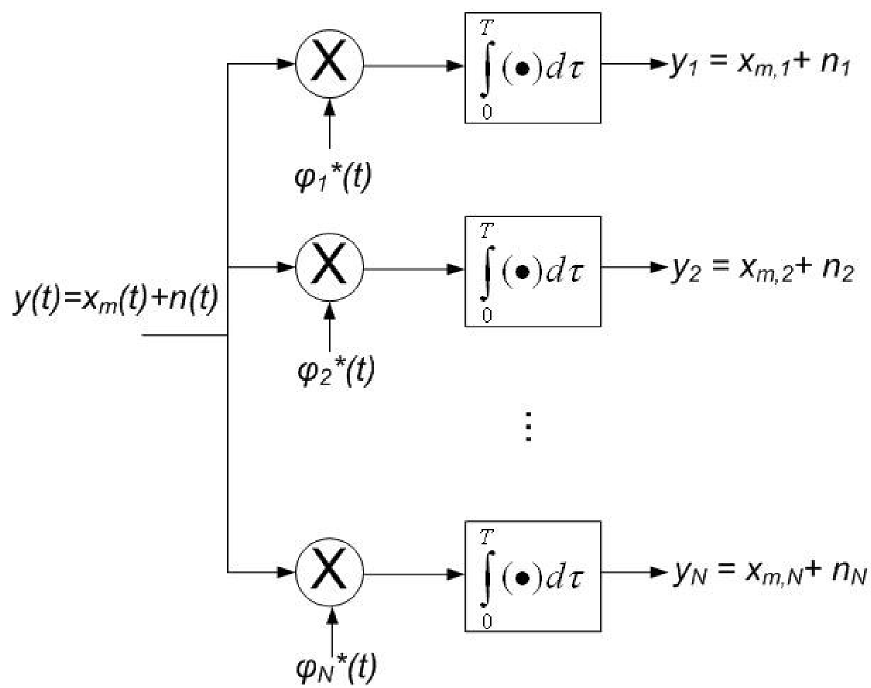
- Ανίχνευση: MAP και ML
- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
  - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5
- Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN
- Κατηγορίες Αστερισμών

Το κανάλι **AWGN**



- Ο $\{n(t)\}$ είναι Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος με $R_n(\tau) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(\tau)$ και $E[n(t)] = 0$. Τα δείγματά του ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0, \frac{\mathcal{N}_0}{2})$.
- Εάν υποθέσουμε ότι η μετάδοση διαρκεί T s, $y(t) = x(t) + n(t),\ t \in [0, T]$.
- Υποθέτουμε, επίσης, ότι το μεταδιδόμενο σήμα $x(t)$ ανήκει σε υπόχωρο $\mathcal{V}$ του $\mathcal{L}_2[0, T]$ διάστασης N. Άρα, μπορεί να εκφραστεί με χρήση των συναρτήσεων βάσης του $\mathcal{V}$: $x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i \phi_i(t)$.
- Ο θόρυβος $n(t)$ είναι, στη γενική περίπτωση, άπειρης διάστασης, και, επομένως, οι N συναρτήσεις βάσης $\phi_i(t)$ δεν αρκούν για την περιγραφή του: $n(t) = \sum_{i=1}^{N} n_i \phi_i(t) + n'(t)$, όπου $n'(t) \in \mathcal{V}^{\perp}$.

Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή



$$y_i = \int_0^T y(\tau)\phi_i^*(\tau)d\tau = \int_0^T (x_m(\tau) + n(\tau))\phi_i^*(\tau)d\tau = x_{m,i} + n_i.$$

Το ίδιο αποτέλεσμα, προφανώς, προκύπτει εάν χρησιμοποιήσουμε προσαρμοσμένα φίλτρα.

Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή (2)

- $n_i = \int_0^T n(\tau)\phi_i^*(\tau)d\tau$. Η τ.μ. n_i είναι γκαουσιανή με μέση τιμή 0. Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι $E[n_i n_j] = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta_{ij} = \sigma^2\delta_{ij}$.
- Επομένως, τα στοιχεία n_i του διανύσματος θορύβου $\mathbf{n}$ το οποίο υπερτίθεται στο διάνυσμα $\mathbf{x}_m$ είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστα και, επομένως, ανεξάρτητα (γιατί;).

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) = \prod_{i=1}^{N} p(y_i|x_{m,i}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_i - x_{m,i})^2}{2\sigma^2}}$$

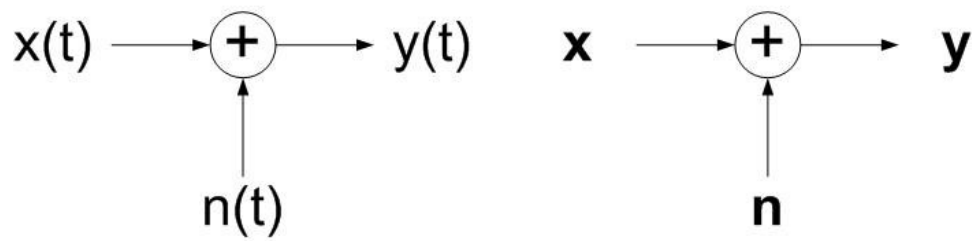
$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_{m,i})^2}{2\sigma^2}\right\}}.$$

- Υπολογίσαμε, λοιπόν, την $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ για το διανυσματικό μοντέλο του καναλιού AWGN!

Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή (3)

- Επομένως, αντί για το γκαουσιανό κανάλι αριστερά μπορούμε ισοδύναμα να χρησιμοποιούμε το διανυσματικό γκαουσιανό κανάλι δεξιά, όπου το $\mathbf{n}$ είναι ένα τυχαίο γκαουσιανό διάνυσμα N διαστάσεων με μηδενική μέση τιμή, ασυσχέτιστα μεταξύ τους στοιχεία n_i και κατανομή

$$p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\pi\mathcal{N}_0)^{N/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{N}|n_i|^2}{\mathcal{N}_0}} = \frac{1}{(\pi\mathcal{N}_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{\mathcal{N}_0}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma^2}}.$$



Irrelevance του $n'(t)$.

- Δεν έχουμε, ακόμα, απαντήσει στο εξής ερώτημα: Η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου και, στη συνέχεια, του διανυσματικού μοντέλου καναλιού για να εκτιμήσουμε το μεταδοθέν μήνυμα στο κανάλι AWGN, είναι ισοδύναμη με την εκτίμηση του m απευθείας από την $y(t)$ ή κατά τη μετατροπή έχει χαθεί κάποια πληροφορία;
- Μπορεί να αποδειχθεί ότι $E[n'(t)y_i] = 0$ (π.χ. Proakis Ch.5). Επομένως, το $n'(t)$ είναι ανεξάρτητο (γιατί;) των στοιχείων του $\mathbf{y}$ και, συνεπώς, δεν προσφέρει καμια πληροφορία για την εκτίμηση του $\mathbf{x}$.
- Θυμηθείτε και το θεώρημα προβολής: Δεδομένου ότι το σήμα $\mathbf{x}_m$ ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ διάστασης N, για να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης πρέπει να βρούμε την προβολή του $\mathbf{y}$ στον $\mathcal{V}$. Αυτό ακριβώς κάνουν ο αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων και ο συνελικτικός αποδιαμορφωτής.
- Άρα, η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου (ή συσχετιστικού αποδιαμορφωτή) διατηρεί όλη την πληροφορία που σχετίζεται με την ανίχνευση των $x_{m,i}$.
- Για την ολοκληρωμένη απόδειξη, με χρήση του ότι το $n'(t)$ είναι irrelevant βλ. Cioffi Ch. 1.

Ανίχνευση **MAP/ML** στο γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

- Είδαμε ότι, για το γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι,

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}}.$$

- Επομένως, ο κανόνας ανίχνευσης MAP για το γκαουσιανό κανάλι μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \ \forall\ j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \ \forall\ j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \ \forall\ j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)\} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j)\} \ \forall\ j \neq i$$

Ανίχνευση **MAP/ML** στο γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι (2)

- Κανόνας MAP:

$$\boxed{\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)\} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j)\} \ \forall \ j \neq i}$$

- Κανόνας ML (γιατί;):

$$\boxed{\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 \ \forall \ j \neq i}$$

- Άρα, ο ανιχνευτής ML επιλέγει το διάνυσμα $\mathbf{x}_i$ με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το διάνυσμα $\mathbf{y}$ στην έξοδο του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένου φίλτρου. Ο ανιχνευτής MAP χρησιμοποιεί την απόσταση σε συνδυασμό με μια σταθερά που εξαρτάται από την κατανομή των $\mathbf{x}_i$.

Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι **AWGN**

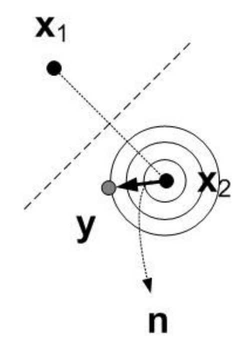
- Ανίχνευση: MAP και ML
- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
- Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN
  - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5
- Κατηγορίες Αστερισμών

Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι **AWGN**

- Διανυσματικό γκαουσιανό κανάλι: $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$.
- Πιθανότητα σφάλματος $P_e = \sum_{m=0}^{M-1} P_{e|m} p_m$, όπου $P_{e|m}$ η πιθανότητα σφάλματος δεδομένου ότι μεταδόθηκε το σημείο m του αστερισμού και p_m η πιθανότητα μετάδοσης του σημείου m.
- $P_e = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} P_{e|m}$ όταν όλα τα σύμβολα μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα.
- <u>Περιστροφή αστερισμού:</u> Εάν ο αστερισμός περιστραφεί στον Ευκλείδειο χώρο (<u>σε κανάλια AWGN</u>) η P_e δεν αλλάζει, επειδή η κατανομή του θορύβου παραμένει η ίδια και οι ευκλείδειες αποστάσεις τις οποίες χρησιμοποιεί ο ανιχνευτής MAP (και ML) διατηρούνται.
- <u>Μετατόπιση αστερισμού:</u> Η P_e παραμένει αμετάβλητη όταν ο αστερισμός μετατοπίζεται <u>στον Ευκλείδειο χώρο.</u>
- Για ένα δεδομένο αστερισμό, για να ελαχιστοποιήσουμε την ισχύ του, εάν $E[\mathbf{x}] \neq 0$ τον μετατοπίζουμε ώστε $E[\mathbf{x}] = 0$.
- Για λεπτομέρειες / αποδείξεις, βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1.

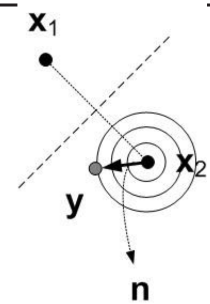
P_e για δυαδική μετάδοση

- Έστω ένας αστερισμός στο $N-$διάστατο χώρο με δύο σύμβολα και κανάλι AWGN. Ο ανιχνευτής ML θα επιλέξει το $\mathbf{x}_i$ με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το $\mathbf{y}$. Ισοδύναμα, μπορεί να χρησιμοποιήσει την προβολή του $\mathbf{y}$ στην κατεύθυνση $\mathbf{x_2} - \mathbf{x}_1$ (γιατί;)



- Εάν προβάλουμε το γκαουσιανό θόρυβο επάνω στην κατεύθυνση $\mathbf{x_1} - \mathbf{x}_2$ παραμένει γκαουσιανός.
- Επομένως, δεδομένου ότι μεταδόθηκε το $\mathbf{x}_2$, σφάλμα θα συμβεί όταν $\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\phi} \rangle > \frac{\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x}_2\|}{2}$, όπου $\boldsymbol{\phi}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

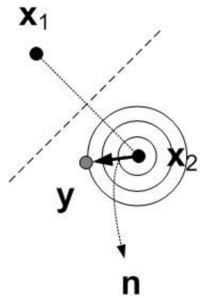
P_e για δυαδική μετάδοση (2)

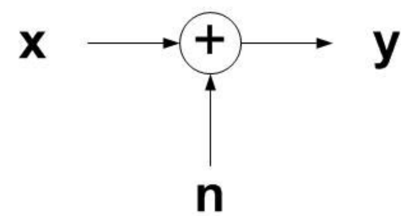


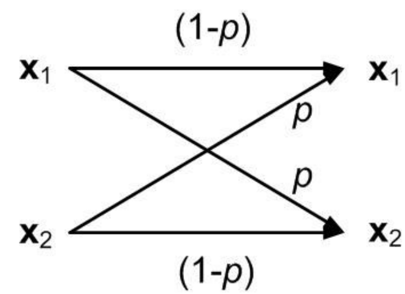
- Επομένως, εάν $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x}_1\| = d$, $P_e = Pr\left\{\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\phi} \rangle = \tilde{n} > \frac{d}{2}\right\}$.
- $P_{e|\mathbf{x}_1} = P_{e|\mathbf{x}_2} = P_e = \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} f_{\tilde{N}}(n)dn = \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn = \int_{\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \Rightarrow$

  $\boxed{P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right),}$ όπου $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ η συνάρτηση Q.
- Η Q δεν έχει αναλυτική έκφραση, αλλά μπορεί να προσεγγιστεί με φράγματα (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1 Appendix B, Lee & Messerschmitt Ch. 1).
- $Q(x) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ (χρήσιμο στη Matlab).

P_e για δυαδική μετάδοση (3)







- Για τον υπολογισμό της P_e χρησιμοποιήσαμε γκαουσιανό κανάλι με 2 μεταδιδόμενα σήματα: $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$.
- Διανυσματικό γκαουσιανό κανάλι: $f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}}$, $i = 1$ και 2.
- Εάν εκτιμήσουμε το κανάλι με κανόνα ML: $p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i|\mathbf{x}_i) = 1 - P_e = 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$. $p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2) = P_e \Rightarrow$ Το κανάλι από το $\mathbf{x}$ στο $\hat{\mathbf{x}}$ όταν χρησιμοποιείται δέκτης ML είναι το δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με $p = P_e$!
- Επομένως, ένα σύστημα μπορεί να περιγράφεται από διαφορετικά μοντέλα αναλόγως με την υλοποίηση και τα σήματα που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή του.

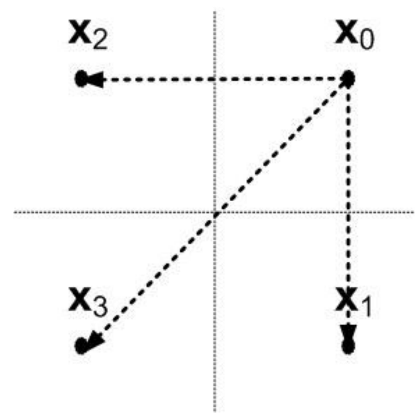
Ελάχιστη απόσταση αστερισμού

Η ελάχιστη απόσταση αστερισμού ορίζεται ως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συμβόλων του αστερισμού.

$$\boldsymbol{d}_{\min} \triangleq \min_{i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|.$$

Όπως θα δούμε σύντομα, η πιθανότητα λάθους στο δέκτη εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη $\boldsymbol{d}_{\min}$ του αστερισμού.

Union Bound



- Υποθέτουμε ότι έχει μεταδοθεί το $\mathbf{x}_0$. Επομένως, η πιθανότητα σφάλματος ισούται με

$$P_{e|0} \overset{\text{γιατί;}}{=} \sum_{i=1}^{3} Pr\{\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i | \mathbf{x} = \mathbf{x}_0\} \overset{\text{γιατί;}}{<} \sum_{i=1}^{3} Q\left(\frac{d_{0,i}}{2\sigma}\right)$$

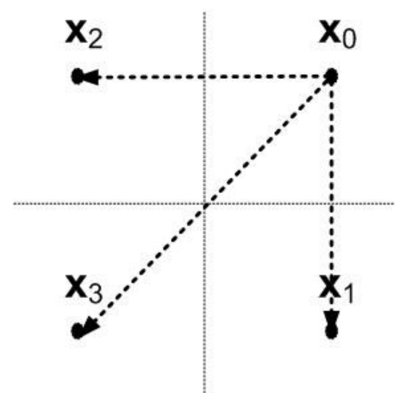
$$\overset{\text{γιατί;}}{<} \sum_{i=1}^{3} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) = 3Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right).$$

Union Bound (2)

- Ομοίως, για τα υπόλοιπα $\mathbf{x}_i$, $P_{e|i} < 3Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$.
- Union bound: $\boxed{P_e < (N-1)Q\left(\dfrac{d_{\min}}{2\sigma}\right),}$ όπου N ο αριθμός των σημάτων του αστερισμού.
- Άνω φράγμα, αλλά σπανίως ακριβές. Πολλές φορές απέχει πολύ από την πραγματική P_e.
- Καλύτερο φράγμα: Nearest Neighbor Union Bound (NNUB).

Nearest Neighbor Union Bound (NNUB)

- $\boxed{P_e \leq N_e Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right),}$ όπου $N_e = \sum_{m=0}^{M-1} N_m p_{\mathbf{x}_m}$, N_m ο αριθμός των συμβόλων του αστερισμού των οποίων οι περιοχές απόφασης εφάπτονται με αυτή του $\mathbf{x}_m$.



- Στο προηγούμενο παράδειγμα, εάν ο θόρυβος διασχίσει την οριζόντια ή την κάθετη γραμμή θα έχουμε σφάλμα μετάδοσης. Επομένως, $P_e \overset{\text{γιατί;}}{<} 2Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$. Παρατηρήστε ότι $N_e = 2$ (έχουμε υποθέσει ότι τα μεταδιδόμενα σήματα είναι ισοπίθανα).

Nearest Neighbor Union Bound (NNUB) (2)

- Συχνά, για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού γειτόνων $N_e = \sum_{m=0}^{M-1} N_m p_{\mathbf{x}_m}$ χρησιμοποιούνται μόνο οι γείτονες κάθε συμβόλου $\mathbf{x}_m$ οι οποίοι απέχουν την ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση $d_{\min}$.
- Στην περίπτωση αυτή το προσεγγιστικό NNUB που προκύπτει ενδέχεται να μην είναι άνω φράγμα της P_e.
- Ωστόσο, στην πράξη, αποτελεί συνήθως καλή προσέγγιση της P_e με αποτέλεσμα πολλές φορές όταν σχεδιαστές αναφέρονται στο NNUB να εννοούν το προσεγγιστικό NNUB.

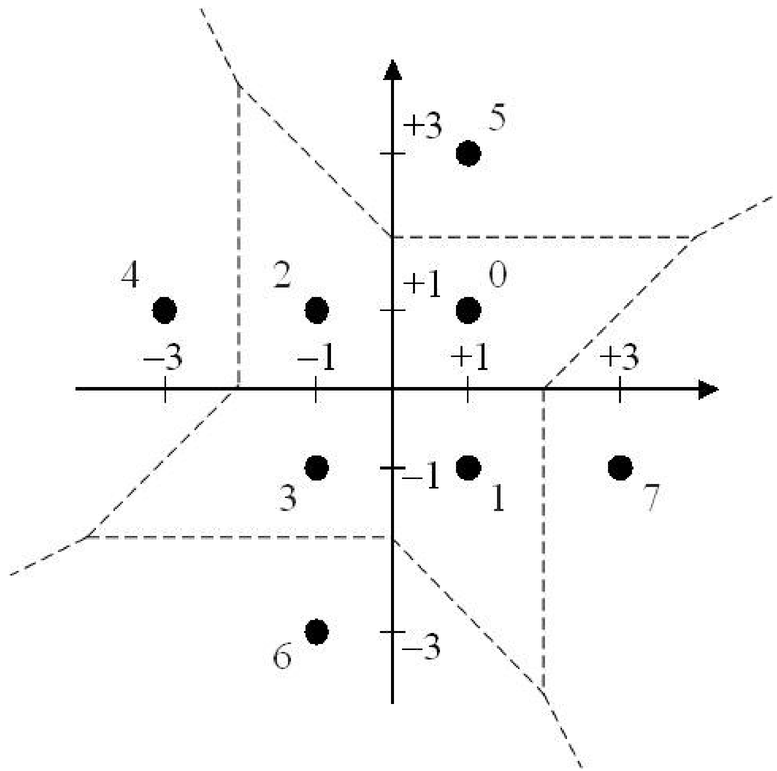
$\bar{P}_e$: Πιθανότητα σφάλματος ανά διάσταση

- Η σύγκριση συστημάτων με βάση την P_e δεν είναι πάντα δίκαιη. Για παράδειγμα, σε ένα κανάλι AWGN ένα σύστημα QPSK υπόκειται σε θόρυβο σε δύο διαστάσεις, ενώ ένα σύστημα BPSK σε θόρυβο σε μία διάσταση.
- Επιπλέον, το σύστημα BPSK μεταδίδει 1 ψηφίο ανά χρήση του καναλιού, ενώ το σύστημα QPSK 2 ψηφία ανά χρήση του καναλιού (άρα 1 ψηφίο ανά διάσταση).
- Επομένως, ένα πιο δίκαιο μέτρο σύγκρισης είναι η πιθανότητα σφάλματος ανά διάσταση: $\bar{P}_e = \frac{P_e}{N}$.
- Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την πιθανότητα σφάλματος ανά αριθμό μεταδιδόμενων ψηφίων: $\frac{P_e}{b} = \frac{P_e}{\log_2 M}$.

Ρυθμός Σφάλματος Ψηφίων (**Bit Error Rate – BER**)

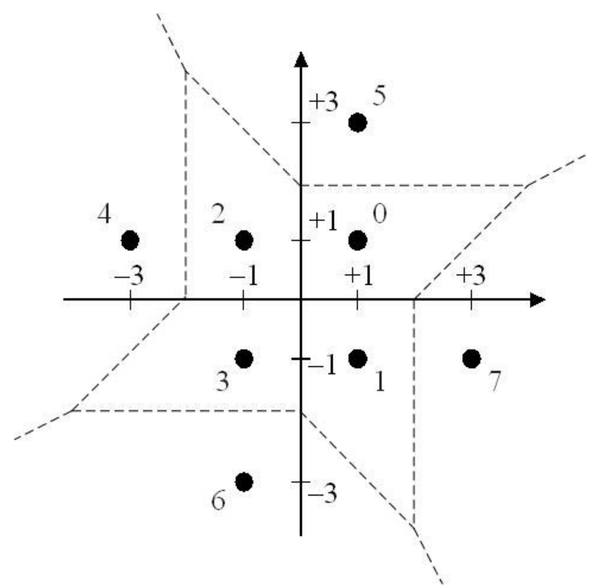
- Όταν μας ενδιαφέρει η πιθανότητα λανθασμένης μετάδοσης ψηψίων (bits) η P_e δεν αρκεί πάντα από μόνη της για την περιγραφή της απόδοσης ενός συστήματος.
- Έστω, για παράδειγμα, ένα σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί μόνο 2 σήματα (π.χ. BPSK) και ένα άλλο το οποίο χρησιμοποιεί 64 πιθανά σήματα (π.χ. 64-QAM όπως θα δούμε αργότερα). Σε ένα σύστημα BPSK όταν γίνει λάθος στο σήμα που αποκωδικοποιείται γίνεται αυτόματα και λάθος στο ψηφίο. Ωστόσο, σε ένα καλά σχεδιασμένο σύστημα 64-QAM ακόμα και αν γίνει λάθος στην ανίχνευση του σήματος στο δέκτη, κάποια από τα ψηφία ενδέχεται να αποκωδικοποιηθούν σωστά.
- Υπάρχουν διάφοροι παρόμοιοι ορισμοί για το BER. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε BER $=$ $Pr\{$αντιστροφή ψηφίου στο δέκτη$\}$ (το οποίο από κάποιους ονομάζεται πιθανότητα σφάλματος ψηφίου $\bar{P}_b$).

Παράδειγμα: **VDSL2 "8-QAM"**



Στο σχήμα, $d_{\min} = 2$. Ο αριθμός σε κάθε σήμα δηλώνει το αντίστοιχο μήνυμα. Για παράδειγμα, το σήμα $(+1, +3)$ αντιστοιχεί στο m_5 ή στην ακολουθία ψηφίων 101.

Παράδειγμα: **VDSL2 "8-QAM"** (2)



- Μέση ενέργεια του αστερισμού: $\mathcal{E}_x = \sum_m \|\mathbf{x}_m\|^2 p_m = \frac{1}{8}\left(4\frac{d_{\min}^2}{2} + 4\frac{5d_{\min}^2}{2}\right) = \frac{3}{2}d_{\min}^2 = 6$. $\bar{\mathcal{E}}_x = 3$.
- Εάν ο δέκτης χρησιμοποιεί προσαρμοσμένο φίλτρο: $\mathsf{SNR} = \frac{\mathcal{E}_x}{\sigma^2} = \frac{3d_{\min}^2}{2\sigma^2}$.

Παράδειγμα: **VDSL2 "8-QAM"** (3)

- Union bound: $P_e < 7Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e = \frac{P_e}{2} = 3.5Q(d_{\min}/2\sigma)$.
- Nearest neighbors: Όλα τα σήματα έχουν 4 γείτονες.
  - Τα $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και $\mathbf{x}_3$ έχουν 3 γείτονες σε απόσταση $d_{\min} = 2$ και 1 γείτονα σε απόσταση $2\sqrt{2}$.
  - Τα $\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$ και $\mathbf{x}_7$ έχουν 1 γείτονα σε απόσταση $d_{\min} = 2$, 1 γείτονα σε απόσταση $2\sqrt{2}$ και 2 γείτονες σε απόσταση $2\sqrt{5}$.
  - NNUB: $P_e < 4Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e < 2Q(d_{\min}/2\sigma)$.
  - Εάν κρατήσουμε μόνο τους πιο κοντινούς γείτονες κάθε σήματος: $P_e \approx \sum_{m=0}^{3} \frac{1}{8} 3Q(d_{\min}/2\sigma) + \sum_{m=4}^{7} \frac{1}{8} Q(d_{\min}/2\sigma) = 2Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e \approx Q(d_{\min}/2\sigma)$.
- Παρατηρούμε ότι τα εξωτερικά σήματα του αστερισμού είναι λιγότερο επιρρεπή σε σφάλμα μετάδοσης από ότι τα εσωτερικά.

Παράδειγμα: **VDSL2 "8-QAM"** (4)

- Έστω ότι μεταδόθηκε το $\mathbf{x}_0$. Θεωρούμε μόνο τους γείτονές του σε απόσταση $d_{\min}$. Εάν αντί για $\mathbf{x}_0$ ο δέκτης αποφασίσει $\mathbf{x}_1$ ή $\mathbf{x}_2$ θα εμφανιστεί σφάλμα (αναστροφή) σε 1 από τα 3 ψηφία. Εάν αποφασίσει $\mathbf{x}_5$ θα εμφανιστεί σφάλμα σε 2 ψηφία. Επομένως, ο μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων όταν συμβεί σφάλμα κατά την αποκωδικοποίηση του $\mathbf{x}_0$ ισούται <u>προσεγγιστικά</u> με $n_b(0) \approx \frac{4}{3}$. Παρομοίως, $n_b(1) = n_b(2) = n_b(3) \approx \frac{4}{3}$.
- Έστω, τώρα, ότι μεταδίδεται το $\mathbf{x}_5$. Εάν αντί για $\mathbf{x}_5$ ο δέκτης αποφασίσει $\mathbf{x}_0$ θα εμφανιστεί σφάλμα (αναστροφή) σε 2 από τα 3 ψηφία. Συνεπώς, $n_b(5) = n_b(6) = n_b(7) = n_b(8) \approx 2$.
- Μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων δεδομένου ότι συνέβη σφάλμα: $N_b \approx \frac{5}{3}$.
- Μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων: $P_b \approx N_b Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) \approx \frac{5}{3} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$. (δεν είναι πιθανότητα – ενδέχεται να υπερβαίνει το 1).
- BER $= \bar{P}_b = \frac{P_b}{b} \approx \frac{5}{9} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$.
- Συνήθως, η ποσότητα που καθορίζει την P_e και το BER είναι το όρισμα της $Q()$ η οποία ελαττώνεται (σχεδόν) εκθετικά. Ο αριθμός των γειτόνων ή το N_b επιδρά σημαντικά μόνο όταν έχει μεγάλη τιμή ή σε χαμηλούς SNR.

Πώς συγκρίνουμε διαφορετικές διαμορφώσεις μεταξύ τους;

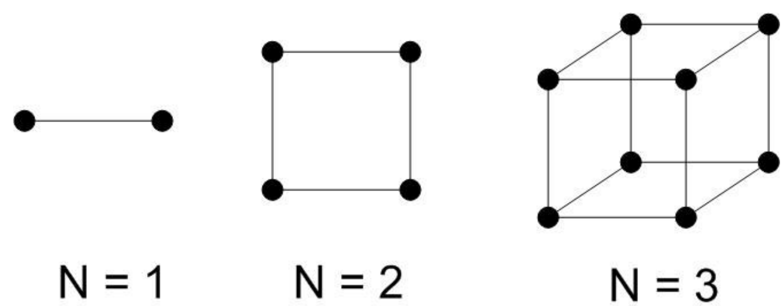
- Για να υλοποιήσουμε τις συναρτήσεις βάσης οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση χρησιμοποιούμε τους πόρους του καναλιού: χρόνο, συχνότητα και χώρο. Κάθε μία από τις N διαστάσεις έχει κόστος γιατί απαιτεί χρήση κάποιων από τους πόρους του συστήματος.
- Για παράδειγμα, ένα σύστημα 2 διαστάσεων μπορεί να υλοποιείται με εναλλάξ μετάδοση στο χρόνο κάθε διάστασης ή με χρήση δύο περιοχών συχνοτήτων.
- Για δίκαιη σύγκριση συστημάτων, πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όλες οι παρακάτω ποσότητες:
  1. Ο ρυθμός μετάδοσης R.
  2. Η χρησιμοποιούμενη ισχύς P_x.
  3. Το συνολικό εύρος ζώνης W που χρησιμοποιεί το σύστημα.
  4. Η περίοδος T_s που διαρκεί η μετάδοση κάθε συμβόλου.
  5. Το BER ή η P_e.
- Αν οι παραπάνω ποσότητες κανονικοποιηθούν κατάλληλα, 3 ποσότητες αρκούν για σύγκριση συστημάτων: **1**. Ο αριθμός ψηφίων ανά διάσταση $\bar{b} = \frac{b}{N}$, **2**. Η ενέργεια ανά διάσταση $\bar{\mathcal{E}}_x = \frac{\mathcal{E}_x}{N}$ και **3**. Η κανονικοποιημένη πιθανότητα σφάλματος $\bar{P}_e = \frac{P_e}{N}$.

Κατηγορίες Αστερισμών

- Ανίχνευση: MAP και ML
- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
- Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN
- Κατηγορίες Αστερισμών
  - Cioffi Ch. 1

Κυβικοί Αστερισμοί (**Cubic Constellations**)

- Αριθμός διαστάσεων $N =$ αριθμός bits b.
- Αντιστοιχία μίας συνάρτησης βάσης ϕ_m σε κάθε bit.
- Γραμμική διαμόρφωση.
- Χρησιμοποιούνται συχνά σε απλά κανάλια.



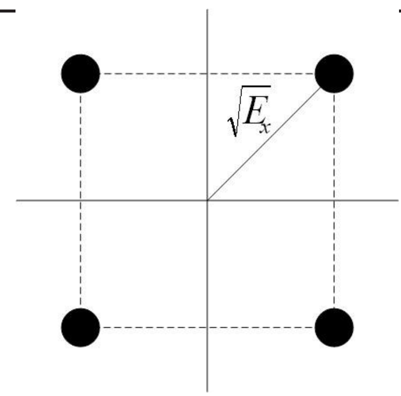
Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα

- Binary Antipodal: 2 σήματα (N=1), $x_0(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x}\phi(t) = -x_1(t)$.
  - Binary Phase Shift Keying (BPSK): $\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}, \;\; t \in [0, T]$, 0 αλλού.
  - Bipolar (NRZ): $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \;\; t \in [0, T]$, 0 αλλού.
  - Κωδικοποίηση Manchester (Bi-phase level): $\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [\frac{T}{2}, T] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$
  - Τι εύρος ζώνης απαιτεί κάθε μία από τις παραπάνω $\phi(t)$;
- On-Off Keying (OOK): 2 σήματα (N=1), $x_0(t) = \sqrt{2\mathcal{E}_x}\phi(t)$. $x_1(t) = 0$.
  - $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \;\; t \in [0, T]$, 0 αλλού.
  - Υποδεέστερη κατά 3 dB σε σχέση με binary antipodal αστερισμούς (γιατί;)
  - Χρησιμοποιείται σε οπτικά συστήματα.

Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα – **QPSK**

- Quadrature Phase Shift Keying (QPSK): 4 σήματα (2 bits $\rightarrow N = 2$).
- $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού. $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού.
- $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2] = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[-1 \ \ -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[-1 \ \ +1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[+1 \ \ -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[+1 \ \ +1] \end{cases}$
- Ίδιο εύρος ζώνης με τη BPSK. $d^2_{\min,\text{BPSK}} = 2d^2_{\min,\text{QPSK}}$. Ωστόσο, εάν η ενέργεια ανά διάσταση της QPSK ισούται με την ενέργεια της BPSK η $\bar{P}_e$ της QPSK ισούται με την P_e της BPSK.

QPSK: Υπολογισμός P_e



- Θεωρούμε ότι όλα τα σήματα μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα.
- Πιθανότητα σωστής λήψης: $P_c = \sum_{i=0}^{3} P_{c|i} p_{\mathbf{x}_i} = P_{c|i} \overset{\text{γιατί;}}{=} \left(1 - Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right)\left(1 - Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right) = 1 - 2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] + \left(Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right)^2.$
- Πιθανότητα σφάλματος: $P_e = 1 - P_c = 2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] - \left(Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right)^2 < 2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]$ (NNUB) $\Rightarrow \bar{P}_e \approx Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] = Q\left[\frac{\sqrt{2\mathcal{E}_x}}{2\sigma}\right] = Q\left[\frac{2\sqrt{\bar{\mathcal{E}}_x}}{2\sigma}\right] = Q\left[\frac{d_{\min,\text{BPSK}}}{2\sigma}\right].$

Ορθογώνιοι Αστερισμοί (**Orthogonal Constellations**)

- Για τους κυβικούς αστερισμούς είδαμε ότι $N = b$.
- Στους ορθογώνιους αστερισμούς, ο αριθμός σημάτων M είναι ανάλογος της διάστασης. Επομένως, $M = \alpha N \Rightarrow b = \log_2 M = \log_2 \alpha N \Rightarrow \bar{b} = \frac{b}{N} = \frac{\log_2 \alpha N}{N}$.
- Ο αριθμός των **bits** ανά διάσταση ελαττώνεται όσο αυξάνεται το N!

Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών

- Block orthogonal: $M = N \Rightarrow$ Μία συνάρτηση βάσης για <u>κάθε</u> σήμα.
  - $\mathbf{x}_i = [0 \ \ldots \ 0 \ \sqrt{\mathcal{E}_x} \ 0 \ldots \ 0]$. $x_i(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x}\phi_i(t)$.
  - Frequency Shift Keying (FSK): $\phi_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{m\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού.
  - Ποιά είναι η $d_{\min}$ των block orthogonal;
  - P_e του block orthogonal αστερισμού (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1):
    $P_e = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\sqrt{\mathcal{E}_x})^2} [1 - Q(u/\sigma)]^{N-1} du.$
  - Η $E[\mathbf{x}]$ του αστερισμού block orthogonal είναι μη μηδενική (και ίση με $(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1 \ 1 \ \ldots \ 1]$).
- Αστερισμός simplex: Block orthogonal μετατοπισμένος κατά $-(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1 \ 1 \ \ldots \ 1]$ ώστε η $E[\mathbf{x}]$ να ισούται με 0 (και να ελαχιστοποιηθεί, έτσι, η μέση ενέργεια). <u>Τα σήματα δεν είναι, πλέον, ορθογώνια μεταξύ τους.</u>

Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών (2)

- Biorthogonal αστερισμοί: Προκύπτουν από τους ορθογώνιους αστερισμούς με προσθήκη του αντίθετου σήματος $-\mathbf{x}$ για κάθε σήμα $\mathbf{x}$.
  - $P_{e,\text{biorthogonal}} = 1 - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\sqrt{\mathcal{E}_x})^2} [1 - 2Q(u/\sigma)]^{N-1} du.$
- Pulse Position Modulation (PPM): Παλμοί σε διαφορετική θέση στο χρόνο.
- Pulse Duration Modulation (PDM): Παλμοί διαφορετικής διάρκειας. Τα σήματα δεν είναι ορθογώνια. Χρήση σε οπτική αποθήκευση δεδομένων (π.χ. CD).

Κυκλικοί Αστερισμοί (**Circular Constellations**) – **MPSK**

- Τα σήματα του αστερισμού τοποθετούνται επάνω σε κύκλο ακτίνας $\sqrt{\mathcal{E}_x}$, και σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις. $N = 2$.
- Μόνο η φάση των σημάτων διαφέρει $\Rightarrow$ MPSK κατάλληλη για διαμόρφωση σε κανάλια με μη γραμμική παραμόρφωση πλάτους (π.χ. κανάλια διαλείψεων).
- NNUB: $P_e < 2Q\left[\frac{\sqrt{\mathcal{E}_x}\sin\frac{\pi}{M}}{\sigma}\right]$.