ΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

6ο Μάθημα – 30 Μαρτίου 2009

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- Κατηγορίες Αστερισμών (συνέχεια)
- PAM και QAM

Ορθογώνιοι Αστερισμοί (**Orthogonal Constellations**)

- Για τους κυβικούς αστερισμούς είδαμε ότι $N = b$.
- Στους ορθογώνιους αστερισμούς, ο αριθμός σημάτων, M, είναι ανάλογος της διάστασης. Επομένως, $M = \alpha N \Rightarrow b = \log_2 M = \log_2 \alpha N \Rightarrow \bar{b} = \frac{b}{N} = \frac{\log_2 \alpha N}{N}$.
- Ο αριθμός των **bits** ανά διάσταση ελαττώνεται όσο αυξάνει το N!

Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών

- Block orthogonal: $M = N \Rightarrow$ Μία συνάρτηση βάσης για <u>κάθε</u> σήμα (μήνυμα).
  - $\mathbf{x}_i = [0\ \ldots\ 0\ \sqrt{\mathcal{E}_x}\ 0 \ldots\ 0]$. $x_i(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x}\phi_i(t)$.
  - Frequency Shift Keying (FSK): $\phi_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{m\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού.
  - Ποιά είναι η $d_{\min}$ των block orthogonal;
  - P_e του αστερισμού block orthogonal (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1):
    $P_e = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\sqrt{\mathcal{E}_x})^2} [1 - Q(u/\sigma)]^{N-1} du.$
  - Η $E[\mathbf{x}]$ του αστερισμού block orthogonal είναι μη μηδενική (και ίση με $(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1\ 1\ \ldots\ 1]$).
- Αστερισμός simplex: Block orthogonal μετατοπισμένος κατά $-(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1\ 1\ \ldots\ 1]$) ώστε η $E[\mathbf{x}]$ να ισούται με 0 (και να ελαχιστοποιηθεί, έτσι, η μέση ενέργεια). <u>Τα σήματα δεν είναι, πλέον, ορθογώνια μεταξύ τους.</u>

Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών (2)

- **Biorthogonal** αστερισμοί: Προκύπτουν από τους ορθογώνιους αστερισμούς με προσθήκη του αντίθετου σήματος $-\mathbf{x}$ για κάθε σήμα $\mathbf{x}$.
  - $P_{e,\text{biorthogonal}} = 1 - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\sqrt{\mathcal{E}_x})^2} [1 - 2Q(u/\sigma)]^{N-1} du.$

- **Pulse Position Modulation (PPM)**: Παλμοί σε διαφορετική θέση στο χρόνο.

- **Pulse Duration Modulation (PDM)**: Παλμοί διαφορετικής διάρκειας. Τα σήματα δεν είναι ορθογώνια. Χρήση σε οπτική αποθήκευση δεδομένων (π.χ. CD).

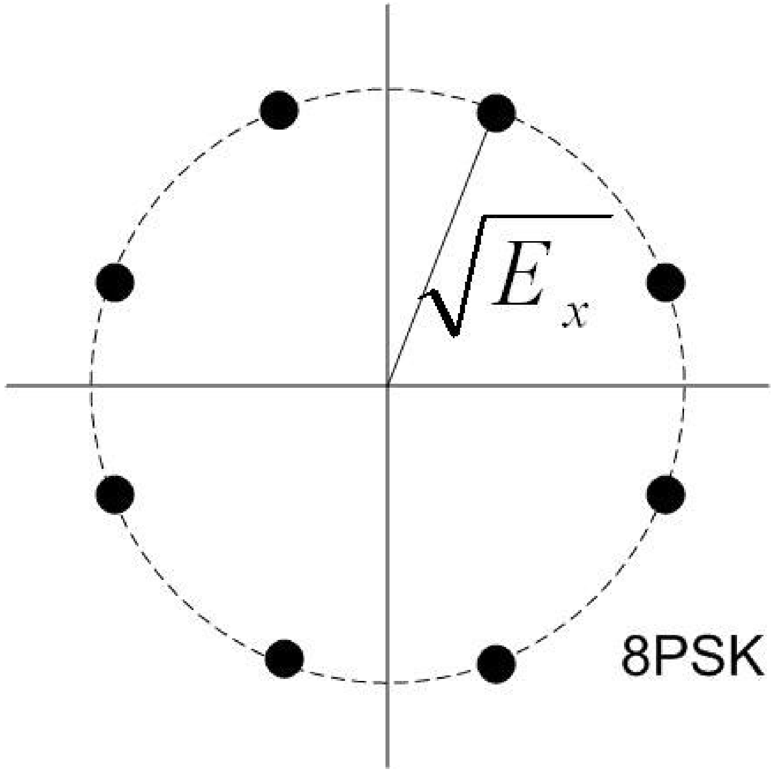
Κυκλικοί Αστερισμοί (**Circular Constellations**) – **MPSK**

- Τα σήματα του αστερισμού τοποθετούνται επάνω σε κύκλο ακτίνας $\sqrt{\mathcal{E}_x}$, και σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις. $N = 2$.

- Μόνο η φάση των σημάτων διαφέρει $\Rightarrow$ MPSK κατάλληλη για διαμόρφωση σε κανάλια με μη γραμμική παραμόρφωση πλάτους (π.χ. κανάλια διαλείψεων).

- NNUB: $P_e < 2Q\left[\frac{\sqrt{\mathcal{E}_x}\sin\frac{\pi}{M}}{\sigma}\right]$.

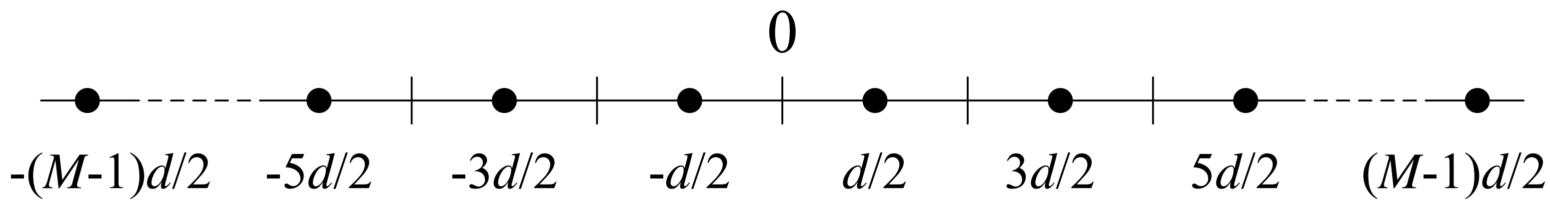
Παράδειγμα: **8-PSK**



PAM και QAM

- Κατηγορίες Αστερισμών
- PAM και QAM
  - Cioffi Ch. 1

Διαμόρφωση Πλάτους Παλμού
Pulse Amplitude Modulation – PAM



- $N = 1$ διάσταση. M σύμβολα $\Rightarrow$ $\log_2 M$ bits /μετάδοση.
- Θεωρητικά $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$. Στην πράξη, συνήθως raised cosine.
- $d_{\min} = d$.
- Με πράξεις (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1): $\boxed{\mathcal{E}_x = \bar{\mathcal{E}}_x = \frac{d^2}{12}[M^2 - 1]}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{12\mathcal{E}_x}{M^2 - 1}}} \Rightarrow M = \sqrt{\frac{12\mathcal{E}_x}{d^2} + 1} \Rightarrow \boxed{b = \log_2 M = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{12\mathcal{E}_x}{d^2} + 1\right)}$$

Pulse Amplitude Modulation – PAM (2)

- $\mathcal{E}_x(b+1) = 4\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{4}$. Για αρκούντως μεγάλες τιμές του b απαιτείται 4πλάσια ενέργεια ($\sim$6 dB επιπλέον) για τη μετάδοση ενός επιπλέον bit.
- Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος:
  - Για τα $M-2$ εσωτερικά σημεία: $P_{c|i} = 1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$.
  - Για τα 2 εξωτερικά σημεία: $P_{c|i} = 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$.
  - Επομένως, $P_c = \frac{M-2}{M}\left(1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) + \frac{2}{M}\left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) = 1 - 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \Rightarrow$ $$\boxed{P_e = \bar{P}_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) < 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)}$$
  - Η προσέγγιση (NNUB) γίνεται πιο ακριβής καθώς $M \to \infty$.
  - Με χρήση σχέσεων της προηγούμενης διαφάνειας, $$\boxed{P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\mathsf{SNR}}\right)}$$

Pulse Amplitude Modulation – PAM (3)

Στον πίνακα (βλ. επίσης Cioffi Ch. 1) έχει υπολογιστεί ο απαιτούμενος SNR για <u>σταθερή</u> $P_e = 10^{-6}$ και διαφορετικό αριθμό bits/μετάδοση. Επίσης, έχει υπολογιστεί η τιμή του SNR η οποία απαιτείται ώστε η χωρητικότητα του καναλιού AWGN να ισούται με b bits/μετάδοση. Παρατηρούμε ότι η διαμόρφωση PAM για $P_e = 10^{-6}$ έχει απώλειες περίπου 9 dB σε σχέση με τη βέλτιστη διαμόρφωση με την οποία επιτυγχάνεται ρυθμός μετάδοσης ίσος με τη χωρητικότητα του καναλιού.

b	M	$\frac{d}{2\sigma}$ για $P_e = 10^{-6}$ [dB]	SNR [dB]	αύξηση του SNR [dB]	$2^{2b} - 1$ [dB]
1	2	13.53	13.53	–	4.77
2	4	13.69	20.68	7.15	11.76
3	8	13.75	26.97	6.29	17.99
4	16	13.77	33.06	6.09	24.07
5	32	13.78	39.10	6.04	30.10
6	64	13.79	45.14	6.04	36.12

Η προσέγγιση **Gap**

- Είδαμε ότι $P_e = 2\left(1-\frac{1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\mathsf{SNR}}\right)$.
- Επομένως,

$$\frac{MP_e}{2(M-1)} = Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\mathsf{SNR}}\right) \Rightarrow$$

$$\left[Q^{-1}\left(\frac{MP_e}{2(M-1)}\right)\right]^2 = \frac{3}{M^2-1}\mathsf{SNR} \Rightarrow$$

$$M^2 = \left(2^b\right)^2 = 1 + \frac{3\mathsf{SNR}}{\left[Q^{-1}\left(\frac{MP_e}{2(M-1)}\right)\right]^2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{\mathsf{SNR}}{\Gamma(P_e,M)}\right),$$

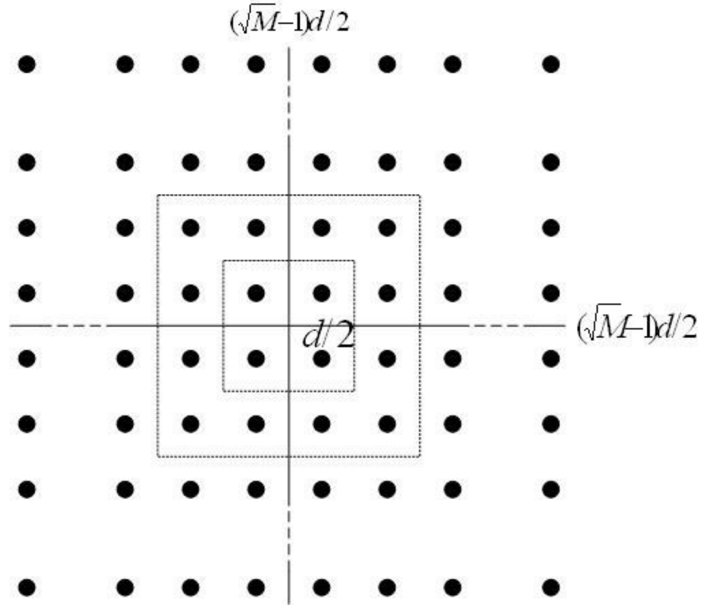
όπου $\Gamma(P_e, M) = \frac{3}{\left[Q^{-1}\left(\frac{MP_e}{2(M-1)}\right)\right]^2}$ είναι το Gap.

Η προσέγγιση **Gap** (2)

$$b = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\mathsf{SNR}}{\Gamma(P_e, M)}\right), \quad \Gamma(P_e, M) = \frac{3}{\left[Q^{-1}\left(\frac{MPe}{2(M-1)}\right)\right]^2}.$$

- Η προσέγγιση Gap προτάθηκε από τον D. Forney.
- Το Gap ισούται με το "πρόστιμο" που πρέπει να καταβάλουμε σε ενέργεια επειδή χρησιμοποιούμε υποβέλτιστο τρόπο μετάδοσης στο κανάλι AWGN.
- Η προσέγγιση είναι ακριβής για $b \geq 1$ και, επομένως, για PAM και QAM.
- Παρατηρήστε ότι εξαρτάται από την P_e και, επίσης, ότι $\Gamma(P_e) \rightarrow \frac{3}{\left[Q^{-1}(Pe/2)\right]^2}$ για $M \rightarrow \infty$. Για $P_e = 10^{-6}$, $\Gamma \rightarrow 9$ dB.
- Η προσέγγιση Gap απλοποιεί το σχεδιασμό και την ανάλυση συστημάτων, αφού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Shannon για τη χωρητικότητα.
- Επεκτείνεται και σε περιπτώσεις όπου χρησιμοποιείται κωδικοποίηση. Στην περίπτωση αυτή $\Gamma = \Gamma_{\mathsf{PAM}}/\gamma_{\mathsf{code}} < \Gamma_{\mathsf{PAM}}$.

Διαμόρφωση Πλάτους με Ορθογωνισμό Φάσης
Quadrature Amplitude Modulation – QAM



- Γενίκευση της PAM σε $N = 2$ διαστάσεις.
- Στο σχήμα απεικονίζεται ο αστερισμός Square QAM (SQ-QAM) ο οποίος αντιστοιχεί σε ζυγό αριθμό bits b.

Quadrature Amplitude Modulation – QAM (2)

- Ως συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιούνται (θεωρητικά) οι $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$ και $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\sin(2\pi f_c t) \rightarrow$ <u>ζωνοπερατή (bandpass) μετάδοση</u>.
- Μέση ενέργεια αστερισμού SQ-QAM: Με πράξεις (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1), $\mathcal{E}_{M-\text{QAM}} = 2\mathcal{E}_{\sqrt{M}-\text{PAM}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{M-\text{QAM}} = d^2\frac{M-1}{6}} \Rightarrow \bar{\mathcal{E}}_{M-\text{QAM}} = d^2\frac{M-1}{12} \Rightarrow$

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{6\mathcal{E}_x}{M-1}}} \Rightarrow M = \frac{6\mathcal{E}_x}{d^2}+1 \Rightarrow \boxed{\bar{b} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{6\mathcal{E}_x}{d^2}+1\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{12\bar{\mathcal{E}}_x}{d^2}+1\right)},$$

ίσο με την PAM (λογικό – γιατί;)

Quadrature Amplitude Modulation – QAM (3)

- $\mathcal{E}_x(b+1) = 2\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{6}$. Για αρκούντως μεγάλες τιμές του b απαιτείται διπλάσια ενέργεια ($\sim$3 dB επιπλέον) για τη μετάδοση ενός επιπλέον bit (ανά διδιάστατο σύμβολο).
- Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος:
  - Για τα 4 γωνιακά σημεία: $P_{c|i} = \left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^2$
  - Για τα $(\sqrt{M}-2)^2$ εσωτερικά σημεία: $P_{c|i} = \left(1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^2$
  - Για τα $4(\sqrt{M}-2)$ πλευρικά σημεία: $P_{c|i} = \left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)\left(1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)$
  - Με πράξεις, $\boxed{P_e = 2\bar{P}_e = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 \left(Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^2} \Rightarrow$

$$\boxed{\bar{P}_e < 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\text{SNR}}\right)}$$

  - Το SNR είναι ανά διάσταση ($= \bar{\mathcal{E}}_x/\sigma^2$).
  - Η προσέγγιση (NNUB) γίνεται πιο ακριβής καθώς $M \to \infty$.

Quadrature Amplitude Modulation – QAM (4)

Στον πίνακα (βλ. επίσης Cioffi Ch. 1) έχει υπολογιστεί ο απαιτούμενος SNR για σταθερή $\bar{P}_e = 10^{-6}$ και διαφορετικό αριθμό bits/μετάδοση. Επίσης, έχει υπολογιστεί η τιμή του SNR η οποία απαιτείται ώστε η χωρητικότητα του καναλιού AWGN να ισούται με b bits/μετάδοση. Παρατηρούμε ότι η διαμόρφωση QAM για $P_e = 10^{-6}$ έχει απώλειες περίπου 9 dB (το Gap) σε σχέση με τη βέλτιστη διαμόρφωση με την οποία επιτυγχάνεται ρυθμός μετάδοσης ίσος με τη χωρητικότητα του καναλιού.

$b = 2\bar{b}$	M	$\frac{d}{2\sigma}$ για $\bar{P}_e = 10^{-6}$ [dB]	SNR [dB]	αύξηση του SNR ανά bit [dB]	$2^{2\bar{b}} - 1$ [dB]
2	4	13.53	13.53	–	4.77
4	16	13.69	20.68	3.58	11.76
6	64	13.75	26.97	3.15	17.99
8	256	13.77	33.06	3.05	24.07
10	1024	13.78	39.10	3.02	30.10
12	2048	13.79	45.14	3.02	36.12

PAM ή QAM;

- Είδαμε ότι, για δεδομένη ενέργεια ανά διάσταση, η $d_{\min}$ της BPSK ισούται με τη $d_{\min}$ της QPSK. Επομένως, η QPSK απαιτεί διπλάσια συνολική ενέργεια για να μεταδώσει διπλάσια bits από ό,τι η BPSK.

- Τι θα συνέβαινε, όμως, εάν χρησιμοποιούσαμε μία διάσταση (δηλαδή 4-PAM) για να μεταδώσουμε 2 ψηφία;

- Από τις σχέσεις για την PAM (ή χρησιμοποιώντας το Gap) προκύπτει ότι χρειαζόμαστε $\mathcal{E}_{\text{4-PAM}} = \frac{5}{4}d_{\min}^2$.

- Αντίθετα, $\mathcal{E}_{\text{QPSK}} = \frac{1}{2}d_{\min}^2$.

- Συνεπώς, $\mathcal{E}_{\text{4-PAM}}/\mathcal{E}_{\text{QPSK}} = 5/2 \approx 4$ dB!

PAM ή **QAM**; (2)

- Το αποτέλεσμα αυτό, ότι δηλαδή συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε QPSK αντί για 4-PAM για δεδομένη διαθέσιμη συνολική ισχύ στον πομπό, αποτελεί ειδική περίπτωση μιας πολύ σημαντικής ιδιότητας της γεωμετρίας που ονομάζεται sphere packing.
- Σύμφωνα με την ιδιότητα sphere packing, σφαίρες δεδομένης ακτίνας r "γεμίζουν" καλύτερα έναν υπόχωρο δεδομένης ακτίνας R όσο η διάσταση, N, του υποχώρου αυξάνει.
- Εδώ ο υπόχωρος περιλαμβάνει όλα τα πιθανά σήματα που λαμβάνονται στον πομπό. Το κέντρο κάθε σφαίρας είναι το σύμβολο που μεταδόθηκε, ενώ η ακτίνα της, r, ισούται με την τιμή του θορύβου που υπερτίθεται στο σήμα. Η ακτίνα, R του υποχώρου είναι της τάξης $\sqrt{\mathcal{E}_x} + \sigma$ (αλλά, θεωρητικά, άπειρη).
- Επομένως, για δεδομένη διαθέσιμη ισχύ στην είσοδο, ο αριθμός των μηνυμάτων που μπορούμε να μεταδώσουμε σε ένα κανάλι AWGN δεδομένης διασποράς θορύβου αυξάνει καθώς αυξάνει ο αριθμός των διαστάσεων, N.
- Η ιδιότητα αυτή αποτελεί τη βάση της απόδειξης του Θεωρήματος Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι.

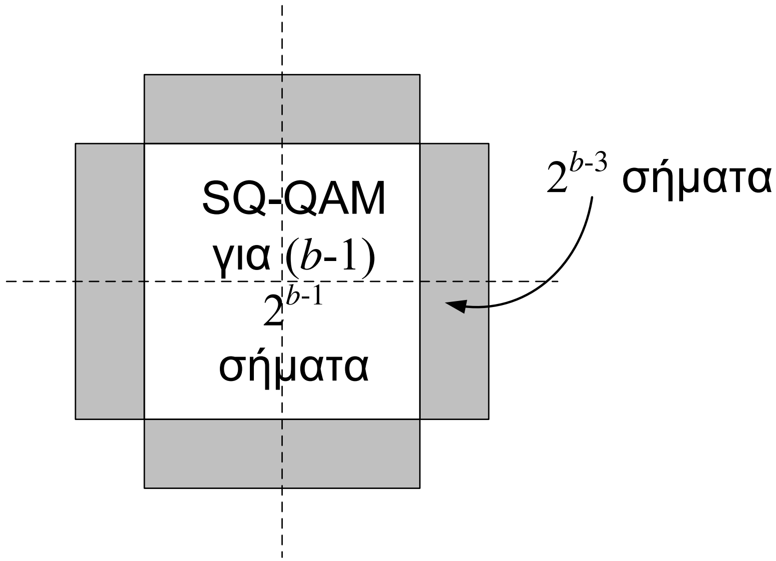
PAM ή **QAM**; (3)

- Επομένως, στις ψηφιακές επικοινωνίες ενδείκνυται να χρησιμοποιούμε όσο περισσότερες διαστάσεις μπορούμε.
  - Εάν έχουμε διαθέσιμες θυρίδες στο χρόνο (TDMA), είναι καλύτερα να μεταδώσουμε μικρούς αστερισμούς σε πολλές θυρίδες, παρά μεγάλους αστερισμούς σε λίγες.
  - Εάν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερες από μία περιοχή συχνοτήτων (FDMA), είναι καλύτερα να "σπάσουμε" τα δεδομένα μας σε περισσότερες από μία ροές μικρότερου ρυθμού.
- Διαισθητικά: Για χαμηλά SNR η χωρητικότητα του καναλιού αυξάνει (σχεδόν) γραμμικά, ενώ για μεγάλα SNR η αύξηση είναι λογαριθμική. Επομένως, σε χαμηλά SNR, δεδομένη αύξηση της ισχύος οδηγεί σε μεγαλύτερη αύξηση της χωρητικότητας (αναλογικά).
- Μια άλλη οπτική: Η πιθανότητα ο θόρυβος να είναι μακριά από τη μέση τιμή του και στις N διαστάσεις (με αποτέλεσμα να βρεθούμε πιο κοντά σε άλλη σφαίρα) είναι μικρότερη από την πιθανότητα ο θόρυβος να είναι μεγάλος σε $n < N$ διαστάσεις (από το νόμο των μεγάλων αριθμών).

Παράδειγμα: Ψηφιακή Δορυφορική Εκπομπή (**Cioffi 1.6.3**)

- Διαμόρφωση: 4-QAM.
- 20 φέρουσες, μεταξύ 12.2 και 12.7 GHz.
- Ρυθμός μετάδοσης συμβόλου (symbol rate): $\frac{1}{T} = 19.151$ MHz.
- Εύρος ζώνης: 24 MHz. Γιατί δεν είναι ίσο με $\frac{1}{T}$;
- Επομένως, ρυθμός μετάδοσης δεδομένων (data rate): $R = 38.302$ Mbps σε κάθε φέρουσα.
- Για τη μετάδοση video απαιτούνται περίπου 2-3 Mbps $\longrightarrow$ έως 16 κανάλια ανά φέρουσα.
- Για τα αναλογικά κανάλια χρησιμοποιείται κανάλι 24 MHz. Επομένως, με την ψηφιακή μετάδοση έχουμε εξοικονόμηση φάσματος. Αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη συμπίεση του video.
- Παρατηρήστε ότι ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων εξαρτάται από το εύρος ζώνης, αλλά δεν ισούται με αυτό. Η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που στέλνεται 1 bit/μετάδοση.

Μετάδοση περιττού b: **Cross QAM – CR-QAM**



- Για τους αστερισμούς CR-QAM ισχύουν τα παρακάτω:

  $\mathcal{E}_x = \frac{d^2}{6}\left(\frac{31}{32}M - 1\right)$, $d = \sqrt{\frac{6\mathcal{E}_x}{\frac{31}{32}M-1}}$, $\bar{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{32}{31}\frac{6\mathcal{E}_x}{d^2} + 1\right)$.

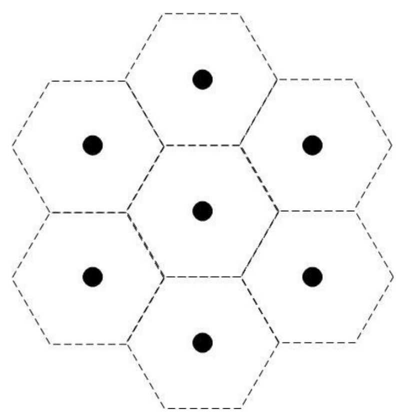
Cross QAM (2)

- $\mathcal{E}_x(b+1) = 2\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{6}$.

- Πιθανότητα Σφάλματος (προσέγγιση): $P_e < 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \Rightarrow$
  $\bar{P}_e \approx 2\left(1 - \frac{1}{2^{\bar{b}+0.5}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3SNR}{\frac{31}{32}M-1}}\right)$.

- Υπάρχουν και άλλοι τρόποι να κατασκευαστεί αστερισμός QAM για μονό b, αλλά ο CR-QAM υπερτερεί σε εξοικονόμηση ενέργειας.

Εξαγωνικοί Αστερισμοί



- Επιτυγχάνουν τη βέλτιστη εκμετάλλευση του χώρου στις 2 διαστάσεις. Μπορεί να αποδειχθεί ότι υπερτερούν κατά 0.625 dB σε σχέση με τους αστερισμούς QAM.
- Μειονέκτημα: Μεγαλύτερη πολυπλοκότητα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης.