

ΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών  
Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάκης

4ο Μάθημα – 16 Μαρτίου 2009

## Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

---

- Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση: Αναπαράσταση με διανύσματα (συνέχεια)
- Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)
- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)

## Μέση ενέργεια/μέση ισχύς αστερισμού

---

- Μέση ενέργεια αστερισμού  $\xi_x \triangleq E[\|x\|^2] = \sum_{m=0}^{M-1} \|x_m\|^2 p_x(m)$ , όπου  $\|x_m\|$  είναι το μέτρο του συμβόλου  $m$  του αστερισμού.
- Εάν ο ρυθμός μετάδοσης ισούται με  $\frac{1}{T}$  symbols/s, η μέση ισχύς του αστερισμού ισούται με  $P_x \triangleq \frac{\xi_x}{T}$ .
- Δύο αντικρουόμενοι στόχοι: Για να ελαχιστοποιήσουμε την απαιτούμενη μέση ενέργεια/ισχύ μετάδοσης επιθυμούμε μικρή απόσταση μεταξύ των συμβόλων ενός αστερισμού. Από την άλλη, όπως θα δούμε, όσο μικραίνει η απόσταση αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος στο δέκτη λόγω θορύβου.

## Άλλα χρήσιμα αποτελέσματα

---

- Έστω  $u(t) = \sum_{n=1}^N u_n \phi_n(t) \leftrightarrow \mathbf{u} \triangleq [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$  και  $v(t) = \sum_{n=1}^N v_n \phi_n(t) \leftrightarrow \mathbf{v} \triangleq [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T$ . Μπορεί να αποδειχθεί ότι  $\langle u, v \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .

Επομένως, για να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των  $u(t)$  και  $v(t)$  του  $\mathcal{L}_2$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράστασή τους ως διανύσματα στον Ευκλείδειο χώρο. (Προσοχή: το εσωτερικό γινόμενο αριστερά είναι εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων του  $\mathcal{L}_2$ , ενώ το εσωτερικό γινόμενο δεξιά είναι διανυσμάτων στον Ευκλείδειο χώρο)

- (Θεώρημα Parseval) Συνεπώς, εάν  $u(t) = v(t)$ , μπορούμε να γράψουμε

$$E \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau) d\tau \right] = E[\langle u, u \rangle] = E[\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle] = \mathcal{E}_x.$$

- Άρα, η μέση ενέργεια ενός αστερισμού δεν εξαρτάται από την επιλογή των συναρτήσεων βάσης, αρκεί αυτές να είναι ορθοκανονικές.

## Αποδιαμόρφωση

---

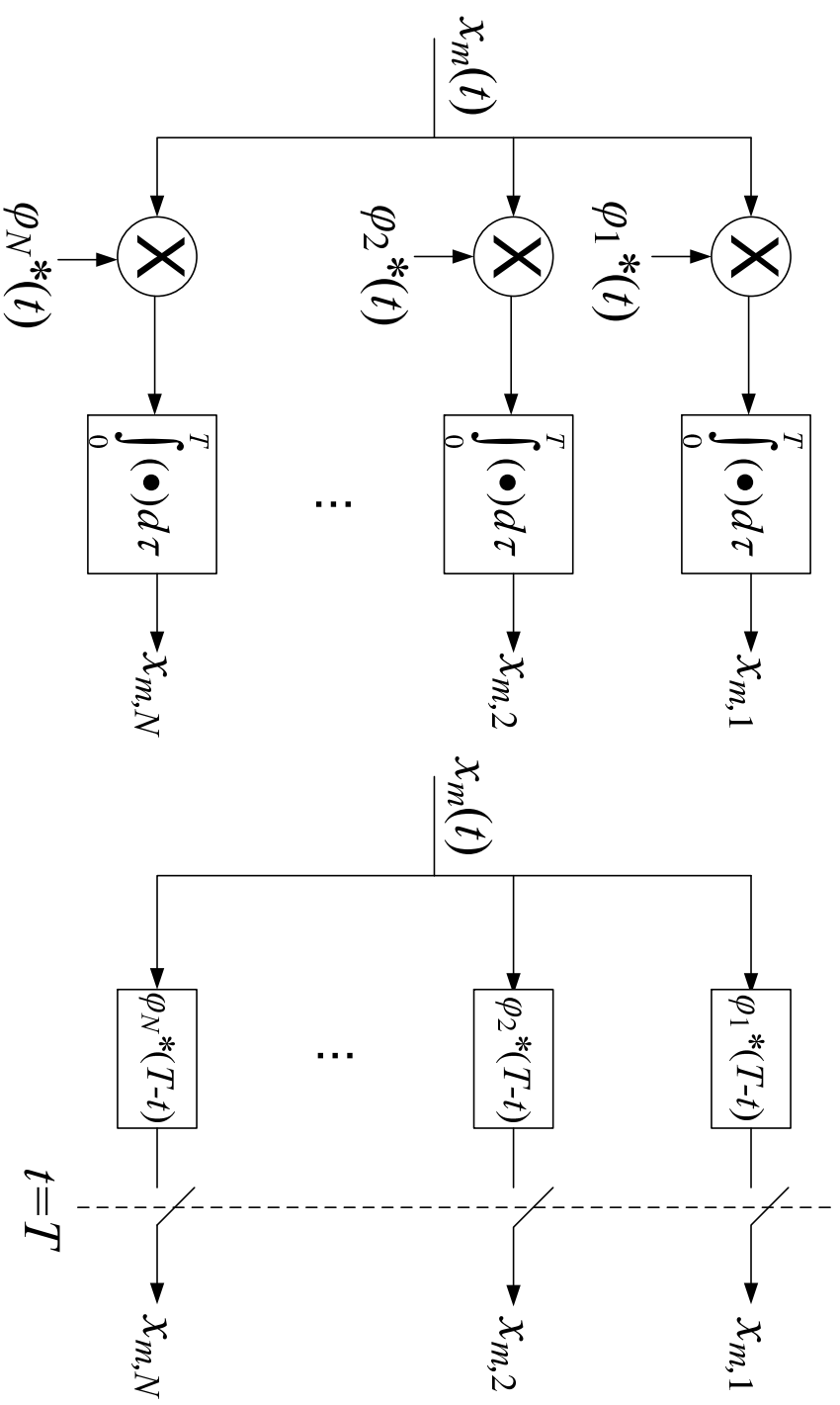
- Έστω ότι ο πομπός μεταδίδει μια κυματομορφή  $x_m(t)$  η οποία ανήκει σε υπόχωρο του  $\mathcal{L}_2[0, T]$  διάστασης  $N$ . Οι συνιστώσες  $x_{m,n}$  του συμβόλου (διανύσματος)  $\mathbf{x}_m$  μπορούν να βρεθούν με χρήση της σχέσης

$$\begin{aligned}x_{m,n} &= \langle x_m, \phi_n \rangle = \int_0^T x_m(\tau) \phi_n^*(\tau) d\tau = \int_0^T x_m(\tau) \phi_n^*(t + \tau - T) d\tau \Big|_{t=T} \\ &= x_m(t) * \phi_n^*(T - t) \Big|_{t=T}.\end{aligned}$$

- Επομένως, (αγνοώντας, προς το παρόν, το θόρυβο) ο δέκτης μπορεί να μετατρέψει τη ληφθείσα κυματομορφή σε διάνυσμα είτε με χρήση πολλαπλασιασμού και ολοκλήρωσης (**correlative demodulation**), είτε με χρήση προσαρμοσμένων φίλτρων (**matched filters**)  $\phi_m^*(T - t)$  και δειγματοληψία ανά  $T$  s.
- Τα φίλτρα είναι προσαρμοσμένα στις συναρτήσεις βάσης στις οποίες μπορούν να αναλυθούν τα εκπαιπόμενα σήματα (και τις οποίες χρησιμοποιεί ο διαμορφωτής).

## Αποδιαμόρφωση (2)

---



συσχετιστικός αποδιαμορφωτής

αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων

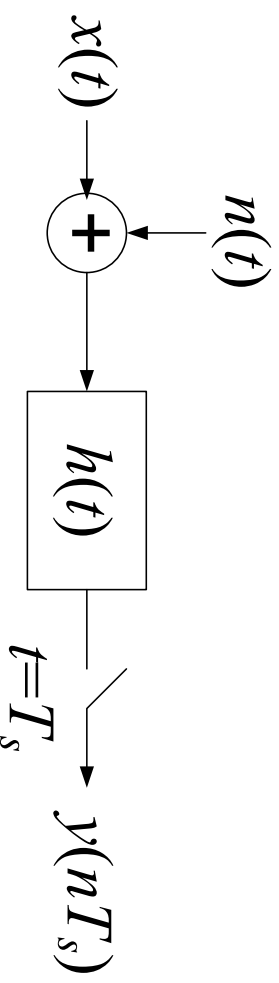
## Λόγος Σήματος προς Θόρυβο στο Δέκτη (Receiver SNR)

---

- SNR στην έξοδο του δέκτη (τόσο για διακριτές όσο και για συνεχείς στο-χαστικές ανελίξεις):

$$\text{SNR} = \frac{\text{ενέργεια χρήσιμου σήματος}}{\text{μέση τετραγωνική τιμή θορύβου}}.$$

- Στο δέκτη του σήματος θέλουμε να βρούμε το φίλτρο  $h(t)$  που μεγιστοποιεί τον SNR στην έξοδο. Ο θόρυβος είναι AWGN.



## Μεγιστοποίηση **SNR** του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο

---

- Ενέργεια χρήσιμου σήματος τη χρονική στιγμή  $T_s$ :  $|\tilde{x}(T_s)|^2 = |x(t) * h(t)|_{t=T_s}|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right|_{t=T_s}^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(T_s-\tau)d\tau \right|^2 = |\langle x(t), h(T_s-t) \rangle|^2$

- Μέση ισχύς θορύβου στην έξοδο του  $h(t)$ :

$$\begin{aligned} E[|\tilde{n}(T_s)|^2] &= E \left[ \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(T_s-\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} n^*(\tau')h^*(T_s-\tau')d\tau' \right] = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[n(\tau)n^*(\tau')]h(T_s-\tau)h^*(T_s-\tau')d\tau d\tau' = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\delta(\tau-\tau')h(T_s-\tau)h^*(T_s-\tau')d\tau d\tau' = \\ & \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(T_s-\tau)|^2 d\tau = \frac{N_0}{2} \langle h(t), h(t) \rangle = \frac{N_0}{2} \|\mathbf{h}\|^2. \end{aligned}$$



Μεγιστοποίηση **SNR** του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο  
(2)

---

- Επομένως,  $\text{SNR} = \frac{2}{N_0} \frac{|\langle x(t), h(T_s - t) \rangle|^2}{\|\mathbf{h}\|^2}$ .
- Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,  $|\langle x(t), h(T_s - t) \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{h}\|^2$ , με  $\equiv$  όταν  $x(t) = kh^*(T_s - t)$  ή, ισοδύναμα,  $h(t) = Kx^*(t - T_s)$ . (γιατί  $\langle h(T_s - t), h(T_s - t) \rangle = \langle h(t), h(t) \rangle$ ;) )
- Συνεπώς,  $\text{SNR}_{\max} = \frac{2}{N_0} \frac{K^2 \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2}{K^2 \|\mathbf{x}\|^2} = \frac{2}{N_0} \|\mathbf{x}\|^2$ , όταν το φίλτρο  $h(t)$  είναι προσαρμοσμένο στο σήμα  $x(t)$ .

## Μεγιστοποίηση **SNR** του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο (3)

---

- Όπως θα δούμε αργότερα, η πιθανότητα σφάλματος  $P_e$  στο δέκτη εξαρτάται από τον **SNR**. Με χρήση δέκτη προσαρμοσμένων φίλτρων βελτιστοποιούμε την απόδοση του συστήματος για δεδομένο **SNR**.
- Το προσαρμοσμένο φίλτρο μας λέει, στην ουσία, αυτό που είδαμε και στην εκτίμηση: Όταν ξέρουμε ότι κάποιιο διάνυσμα βρίσκεται πάνω σε μια κατεύθυνση (στη συγκεκριμένη περίπτωση  $\mathbf{h}$ ) το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να ‘κοιτάξουμε’ σε εκείνη την κατεύθυνση.

## Ανίχνευση μηνυμάτων (**Discrete Data Detection**)

---

- Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση: Αναπαράσταση με διανύσματα (συνέχεια)
- Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)
  - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5, Lee & Messerschmitt 2nd ed. Ch. 9
- Το κανάλι Προσθετικού Γαουσιανού Θορύβου (AWGN)

## Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων

---

- Στην πράξη, η λαμβανόμενη κυματομορφή  $y(t)$  στο δέκτη δεν ισούται με την κυματομορφή  $x_i(t)$  που μεταδίδεται από τον πομπό (λόγω θορύβου και καναλιού).
- Σκοπός της ανίχνευσης είναι να βρεθεί ποια κυματομορφή  $x_i(t)$  (και άρα ποιο διάνυσμα  $\mathbf{x}_i$  ή, ισοδύναμα, ποιο μήνυμα  $m_i$ ) έστειλε ο πομπός.
- Για την ανάλυση της ανίχνευσης θα δουλέψουμε με διανύσματα. Θα θεωρήσουμε, δηλαδή, ότι με χρήση προσαρμωμένου φίλτρου  $N$  κλάδων, η κυματομορφή  $y(t)$  έχει αναλυθεί (αποδιαμορφωθεί) σε συνιστώσες  $y_1, y_2, \dots, y_N$ .
- Επομένως, το πρόβλημα είναι το εξής: Δεδομένου του ληφθέντος διανύσματος  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]$  να βρεθεί το μεταδοθέν διάνυσμα  $\mathbf{x}_i$ .

## Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων (2)

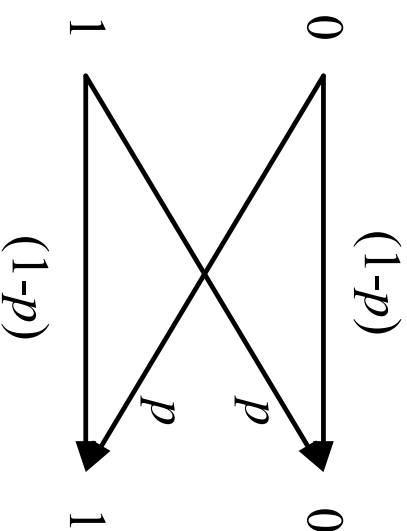
---



- Για την ανάλυση και τη σχεδίαση του ανιχνευτή χρησιμοποιούμε το διανυσματικό μοντέλο καναλιού του σχήματος.
- Η  $p_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  χαρακτηρίζει πλήρως το διακριτό κανάλι. Εξαρτάται από το κανάλι, από το θόρυβο, από τις κυματομορφές που χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση και από τη σχεδίαση του συστήματος.
- Θα θεωρήσουμε, προς το παρόν, ότι γνωρίζουμε την  $p_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ . Αργότερα θα δούμε παραδείγματα συστημάτων και υπολογισμού της  $p_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ .
- Ο ανιχνευτής/εκτιμητής έχει ως είσοδο το  $\mathbf{y}$  και ως έξοδο την εκτίμηση  $\hat{\mathbf{x}}$  του σήματος που μεταδόθηκε. Επειδή η σχέση μηνύματος  $m_i$  και διανύσματος  $\mathbf{x}_i$  είναι 1-προς-1, ο δέκτης μπορεί να εκτιμήσει από το  $\hat{\mathbf{x}}$  ποιο μήνυμα  $\hat{m}$  μεταδόθηκε.
- Σφάλμα μετάδοσης εμφανίζεται όταν  $\hat{m} = m_j, j \neq i$ , όπου  $m_i$  το μήνυμα που μεταδόθηκε (ισοδύναμα, όταν  $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}_i$ ).

## Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (Binary Symmetric Channel)

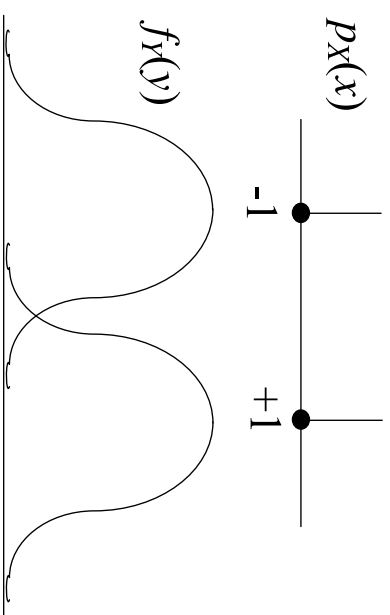
---



- $p_{Y|X}(0|1) = p_{Y|X}(1|0) = p$  (αναστροφή ψηφίου)
- $p_{Y|X}(0|0) = p_{Y|X}(1|1) = 1 - p$
- Ένα από τα πιο χρήσιμα μοντέλα στις Ψηφιακές Επικοινωνίες.

## Διαδική μετάδοση που υπόκειται σε Γκαουσιανό θόρυβο

---



- Προθέτουμε ότι  $y = x + n$ , όπου  $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Επομένως,  $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y - x)$ .
- $f_{Y|X}(y|x = -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}}$ ,  $f_{Y|X}(y|x = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}}$ .
- Θα το χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον.

## Κατανομή ληφθέντος σήματος, Πιθανότητα Σφάλματος

---

- Από τον κανόνα **Bayes**, εάν ο αστερισμός αποτελείται από  $M$  σύμβολα, το καθένα από τα οποία μεταδίδεται με πιθανότητα  $p_X(x_m)$ ,

$$p_Y(y) = \sum_{m=0}^{M-1} p_{Y|X}(y|x_m)p_X(x_m) \quad \text{ή} \quad f_Y(y) = \sum_{m=0}^{M-1} f_{Y|X}(y|x_m)p_X(x_m).$$

- Πιθανότητα Σφάλματος (**Probability of Error**):  $P_e \triangleq \Pr\{\hat{m} \neq m\}$ .
- Πιθανότητα σωστής λήψης:  $P_c = 1 - P_e = \Pr\{\hat{m} = m\}$ .



## Ανίχνευση Μέγιστης εκ των Υστέρων Πιθανότητας (Maximum a posteriori probability (MAP) detection)

---

- Έστω ότι ο πομπός εκπέμπει το μήνυμα  $m_i$  και ότι ο δέκτης λαμβάνει σήμα  $\mathbf{y}$ .  $P_{e|y} = \Pr(\hat{m} = m_i | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = p_{M|Y}(m_i | \mathbf{y}) = p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$  (γιατί;)
- Ορισμός: Ο ανιχνευτής MAP επιλέγει το σήμα  $\mathbf{x}_i$  που μεγιστοποιεί την εκ των υστέρων πιθανότητα  $p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$  δεδομένου ότι ελήφθη το σήμα  $\mathbf{y}$ .
- Από το θεώρημα Bayes,  $p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}) = \frac{p_{Y|\mathbf{X}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}_i) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{p_Y(\mathbf{y})}$ .
- Δεδομένου ότι ο παρανομοαστής  $p_Y(\mathbf{y})$  είναι κοινός για όλες τις  $p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$ , ο ανιχνευτής MAP μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής:

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{Y|\mathbf{X}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}_i) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{Y|\mathbf{X}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}_j) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i.$$

## Ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood (ML) detection)

---

- Εάν όλα τα μεταδιδόμενα σύμβολα (και μηνύματα) είναι ισοπίθανα:  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{M}$ ,  $i = 0, 1, \dots, M - 1$ , ο κανόνας ανίχνευσης MAP απλοποιείται στον κανόνα ανίχνευσης ML

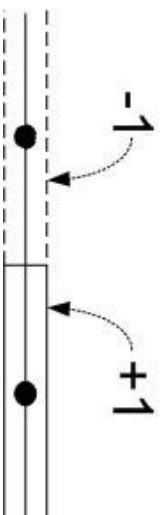
$$\hat{m}_i = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i.$$

- Ο ανιχνευτής ML χρησιμοποιείται συχνά σε Ψηφιακά Συστήματα. Ωστόσο, μερικές φορές η εύρεση αναλυτικής έκφρασης για τις  $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$  ενδέχεται να είναι αδύνατη ή οι εκφράσεις μπορεί να είναι πολύπλοκες. Για το λόγο αυτό πολλοί δέκτες χρησιμοποιούν προσεγγιστικούς κανόνες (με αποτέλεσμα να αυξάνει η πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με την ανίχνευση ML).

## Περιοχές Αποφάσεων (Decision (Voronoi) Regions)

---

- Προκειμένου να μην υπολογίζεται η τιμή των συναρτήσεων  $p_{Y|X}(y|x_i)$  (ή του γινομένου τους με τις  $p_X(x_i)$ ) στο δέκτη κάθε φορά που λαμβάνεται ένα σήμα  $y$ , μπορεί να έχει προσδιοριστεί εκ των προτέρων το σήμα  $x_i$  που προκύπτει από τον κανόνα ML (ή MAP) για κάθε πιθανή τιμή του λαμβανόμενου σήματος  $y$ .
- Ο δέκτης προσδιορίζει την περιοχή του Ευκλείδειου χώρου (περιοχή απόφασης) στην οποία ανήκει το  $y$  το οποίο λαμβάνει και αποφασίζει για το μεταδοθέν σήμα με βάση την περιοχή.
- Οι περιοχές απόφασης για το δέκτη ML του καναλιού με δυαδική μετάδοση και Γκαουσιανό θόρυβο που εξετάσαμε ενωρίτερα φαίνονται στο σχήμα. Μαθηματικά, εάν  $y < 0 \rightarrow x = -1$ , ενώ εάν  $y \geq 0 \rightarrow x = +1$ .

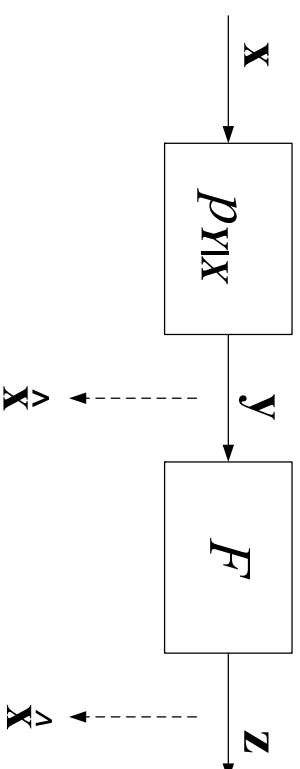


- Θα δούμε στη συνέχεια ότι, στην περίπτωση Γκαουσιανού καναλιού, οι κανόνες MAP και ML απλοποιούνται σημαντικά σε σχέση με τη γενική τους μορφή.

## Θεώρημα Αντιστρεψιμότητας (**Reversibility Theorem**)

---

- Η εφαρμογή αντιστρέψιμου μετασχηματισμού στο διάνυσμα εξόδου  $\mathbf{y}$  του καναλιού δεν επιτρέπει την απόδοση του ανιχνευτή MAP.
- Επομένως, στο σχήμα, εφόσον ο μετασχηματισμός  $F$  είναι αντιστρέψιμος, η εκτίμηση MAP που βασίζεται στο  $\mathbf{y}$  θα είναι ίδια με την εκτίμηση MAP που βασίζεται στο  $\mathbf{z}$ .
- Φυσικά, οι περιοχές απόφασης των δύο ανιχνευτών MAP θα είναι, στη γενική περίπτωση, διαφορετικές.



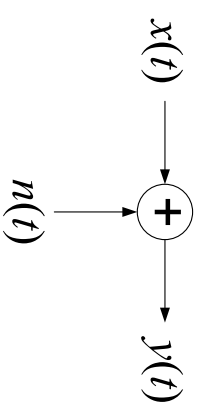
## Το κανάλι Προσθετικού Δευκού Γκαουσιανού Θορύβου (**AWGN**)

---

- Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση: Αναπαράσταση με διανύσματα (συνέχεια)
- Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)
- Το κανάλι Προσθετικού Δευκού Γκαουσιανού Θορύβου (**AWGN**)
  - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5

## Το κανάλι **AWGN**

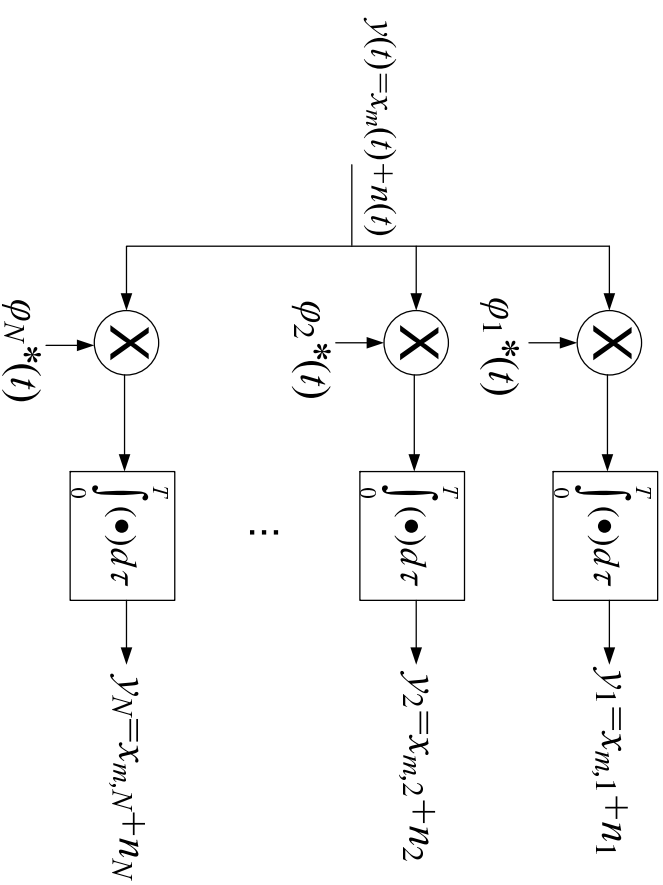
---



- Ο  $\{n(t)\}$  είναι Λευκός Γκαουσιανός Θόρυβος με  $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$  και  $E[n(t)] = 0$ . Τα δείγματά του ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή  $\mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$ .
- Εάν υποθέσουμε ότι η μετάδοση διαρκεί  $T$  s,  $y(t) = x(t) + n(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .
- Υποθέτουμε, επίσης, ότι το μεταδιδόμενο σήμα  $x(t)$  ανήκει σε υπόχωρο  $\mathcal{V}$  του  $\mathcal{L}_2[0, T]$  διάστασης  $N$ . Άρα, μπορεί να εκφραστεί με χρήση των συναρτήσεων βάσης του  $\mathcal{V}$ :  $x(t) = \sum_{i=1}^N x_i \phi_i(t)$ .
- Ο θόρυβος  $n(t)$  είναι, στη γενική περίπτωση, άπειρης διάστασης, και, επομένως, οι  $N$  συναρτήσεις βάσης  $\phi_i(t)$  δεν αρκούν για την περιγραφή του:  $n(t) = \sum_{i=1}^N n_i \phi_i(t) + n'(t)$ , όπου  $n'(t) \in \mathcal{V}^\perp$ .

## Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή

---



$$y_i = \int_0^T y(\tau) \phi_i^*(\tau) d\tau = \int_0^T (x_m(\tau) + n(\tau)) \phi_i^*(\tau) d\tau = x_{m,i} + n_i.$$

Το ίδιο αποτέλεσμα, προφανώς, προκύπτει εάν χρησιμοποιήσουμε προσαρμωμένα φίλτρα.

## Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή (2)

---

- $n_i = \int_0^T n(\tau) \phi_i^*(\tau) d\tau$ . Η τ.μ.  $n_i$  είναι Γκαουσιανή με μέση τιμή 0. Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι  $E[n_i n_j] = \frac{N_0}{2} \delta_{ij} = \sigma^2 \delta_{ij}$ .
- Επομένως, οι συνιστώσες  $n_i$  του διανύσματος θορύβου  $\mathbf{n}$  το οποίο υπερτίθεται στο διάνυμα  $\mathbf{x}_m$  είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστες και, επομένως, ανεξάρτητες (γιατί;).

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y} | \mathbf{x}_m) &= \prod_{i=1}^N p(y_i | x_{m,i}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y_i - x_{m,i})^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sigma^N} e^{\left\{ -\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - x_{m,i})^2}{2\sigma^2} \right\}}. \end{aligned}$$

- Υπολογίσαμε, λοιπόν, την  $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  για το διανυσματικό μοντέλο του καναλιού **AWGN**!

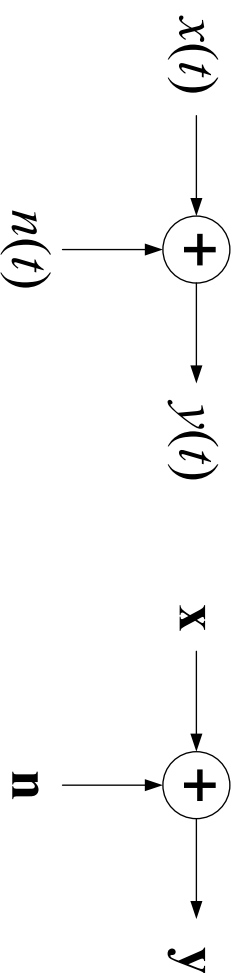


## Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή (3)

---

- Επομένως, αντί για το Γκαουσιανό κανάλι αριστερά μπορούμε ισοδύναμα να χρησιμοποιούμε το διανυσματικό Γκαουσιανό κανάλι δεξιά, όπου το  $\mathbf{n}$  είναι ένα τυχαίο Γκαουσιανό διάνυσμα  $N$  διαστάσεων με μηδενική μέση τιμή, ασυσχέτιστες μεταξύ τους συνιστώσες  $n_i$  και κατανομή

$$p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^N |n_i|^2}{N_0}} = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{N_0}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma^2}}.$$



## Irrelevance του $n'(t)$ .

---

- Δεν έχουμε, ακόμα, απαντήσει στο εξής ερώτημα: Η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου και, στη συνέχεια, του διανυσματικού μοντέλου καναλιού για να εκτιμήσουμε το μεταδεδειγμένο μήνυμα στο κανάλι **AWGN**, είναι ισοδύναμη με την εκτίμηση του  $m$  απευθείας από την  $y(t)$  ή κατ'ελάχιστον μετατροπή έχει χαθεί κάποια πληροφορία;
- Μπορεί να αποδειχθεί ότι  $E[n'(t)y_i] = 0$  (π.χ. Proakis Ch.5). Επομένως, το  $n'(t)$  είναι ανεξάρτητο (γιατί;) των συνιστωσών του  $y$  και, συνεπώς, δεν προσφέρει καμία πληροφορία για την εκτίμηση του  $x$ .
- Θυμηθείτε και το θεώρημα προβολής: Δεδομένου ότι το σήμα  $x_m$  ανήκει στον υπόχωρο  $\mathcal{V}$  διάστασης  $N$ , για να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης πρέπει να βρούμε την προβολή του  $y$  στον  $\mathcal{V}$ . Αυτό ακριβώς κάνουν ο αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων και ο αποδιαμορφωτής συσχέτισης.
- Άρα, η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου (ή αποδιαμορφωτή συσχέτισης) διατηρεί όλη την πληροφορία που σχετίζεται με την αντίληψη των  $x_{m,i}$ .
- Για την ολοκληρωμένη απόδειξη, με χρήση του ότι το  $n'(t)$  είναι irrelevant βλ. Cioffi Ch. 1.