Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Διάλεξη 11

Πάτρα 2008

Προσαρμοστικός LQ έλεγχος για μη-ελαχίστης φάσεως (Σ)

Προσαρμοστική παρακολούθηση ενός σήματος αναφοράς από την έξοδο ενός διακριτού ντετερμινιστικού SISO γραμμικού (Σ) με άγνωστες παραμέτρους. Σχήμα ελέγχου βασισμένο στον LQ έλεγχο.

Θεωρούμε λοιπόν το (Σ) με συνάρτηση μεταφοράς:

$$\left.\begin{aligned} y_t &= \frac{q^{-1}\overline{B}(q^{-1})}{1-q^{-1}\overline{A}(q^{-1})}u_t \\ \overline{A}(q^{-1}) &= a_1 + a_2 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n+1} \\ \overline{B}(q^{-1}) &= b_1 + b_2 q^{-1} + \ldots + b_n q^{-n+1} \\ q^{-1} y_t &= y_{t-1} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Οι εξισώσεις (1) μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} y_t &= \varphi_{t-1}{}^T \theta \\ \theta^T &= [a_1 \ldots a_n \;\; b_1 \ldots b_n] \\ \varphi_{t-1}{}^T &= [y_{t-1} \ldots y_{t-n} \;\; u_{t-1} \ldots u_{t-n}] \end{aligned}\right\}$$

Ή σε καταστατική μορφή:

$$\left.\begin{aligned} x_{t-1} &= Ax_t + Bu_t \\ y_t &= Cx_t \end{aligned}\right\}$$

Με

$$A = S + KC\ ,\ \ B^T = [b_1 \ldots b_n]\ ,\ \ K^T = [a_1 \ldots a_n]\ ,$$

$$C = [1\ 0\ \ldots\ 0] \quad \text{και} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ddots & \\ . & . & . & & 0 \\ . & & . & . & \\ . & & & . & 1 \\ . & & & & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

Θέλουμε η έξοδος τους (Σ) y_t να ακολουθεί το σήμα αναφοράς y_t^r .

Για να βρεθεί ο προσαρμοστικός νόμος ελέγχου εφαρμόζουμε της εξής διαδικασία:

(i) Επιλέγουμε ένα κριτήριο ελέγχου του οποίου η βελτιστοποίηση εγγυάται την σταθερότητα του (Σ) (τοποθέτηση πόλων, τετραγωνικό κριτήριο, …).

(ii) Καθορίζουμε την έκφραση του ελέγχου που βελτιστοποιεί το κριτήριο ελέγχου όταν οι παράμετροι του (Σ) είναι γνωστές.

(iii) Εάν οι παράμετροι του (Σ) είναι άγνωστες τότε τις προσδιορίζουμε με την βοήθεια επαναληπτικών αλγορίθμων αναγνώρισης.

(iv) Αντικαθιστούμε στην έκφραση του βέλτιστου ελέγχου τους άγνωστους όρους με εκτιμήσεις των.

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο τετραγωνικό κριτήριο για t_f βήματα:

$$J_{t_f} = \frac{1}{t_f}\left\{\sum_{t=0}^{t_f-1}[(y_t - y_t{}^r)^2 + \lambda u_t{}^2] + [y_{t_f} - y_{t_f}{}^r]^2\right\}$$, με λ > 0

Αυτό το κόστος ελαχιστοποιείται από τον ακόλουθο έλεγχο:

$$u_t{*}^{t_f} = -L_t^{t_f} x_t + r_t^{t_f}$$

Με

$$L_t^{t_f} = \frac{B^T R_t^{t_f} A}{B^T R_t^{t_f} B + \lambda}$$

$$r_t^{t_f} = -\frac{B^T V_t^{t_f}}{B^T R_t^{t_f} B + \lambda}$$

$$R_{t-1}^{t_f} = C^T C + A^T R_t^{t_f} A - \frac{A^T R_t^{t_f} B B^T R_t^{t_f} A}{B^T R_t^{t_f} B + \lambda}$$

και τις τελικές συνθήκες:

$$V_{t-1}^{t_f} = (A - BL_t^{t_f})^T V_t^{t_f} - C^T y_t^r \qquad (2)$$

$$R_{t_f-1}^{t_f} = C^T C$$

$$V_{t_f-1}^{t_f} = -C^T y_{t_f}^r$$

Για έλεγχο στο διάστημα $[0,+\infty)$ έχουμε $t \in \mathbb{N}, \quad \lim_{t_f \to +\infty} R_t^{t_f} = R^*$ όπου R^* είναι η μοναδική θετικώς ορισμένη μήτρα-λύση της αλγεβρικής Riccati εξίσωσης:

$$R = C^T C + A^T R_t A - \frac{A^T RBB^T RA}{B^T RB + \lambda}$$

Όμως η σχέση (2) δείχνει ότι δεν είναι δυνατόν (εκτός από κάποιες εξαιρέσεις) να υπολογίσουμε $\forall t$ το $\lim_{t_f \to +\infty} V_t^{t_f}$. Επομένως το $\lim_{t_f \to +\infty} J_{t_f}$ δεν υπάρχει πάντα και γι' αυτόν τον λόγο δεν είναι εφικτός και ο υπολογισμός του ελέγχου $u_t^* = \lim_{t_f \to +\infty} u_t^{*t_f}$.

Έτσι καταλήγουμε να προτείνουμε έναν <u>υπο-βέλτιστο έλεγχο</u> του $u_t^{t_f}$ που να μπορεί να υπολογιστεί στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Υποθέτουμε ότι το σήμα αναφοράς y_t^r είναι φραγμένο. Επομένως το διάνυσμα $V_t^{t_f}$ μπορεί να προσεγγιστεί από ένα διάνυσμα $V_{t,N}$ υπολογισμένο από N σήματα αναφοράς με τον εξής τρόπο:

$$\left.\begin{array}{l} V_{t,1} = -C^T {y_{t+N}}^r \\ V_{t,2} = (A - BL^*)^T V_{t,1} - C^T {y_{t+N-1}}^r \\ \vdots \\ V_{t,N} = (A - BL^*)^T V_{t,N-1} - C^T {y_{t+1}}^r \end{array}\right\}$$

Ο υπο-βέλτιστος έλεγχος είναι της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} u_{t,N} &= -L^* x_t + r_{t,N} \\ L^* &= \frac{B^T R^* A}{B^T R^* B + \lambda} \;, \quad r_{t,N} = -\frac{B^T V_{t,N}}{B^T R^* B + \lambda} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

με $N \in \mathbb{Z}^+$

Για να υπολογίσουμε τον προσαρμοστικό έλεγχο, πρέπει να αναγνωρίσουμε τις παραμέτρους του (Σ).

Υποθέτουμε ότι το αναγνωρισθέν διάνυσμα θ στον χρόνο *t* είναι το θ_t .

Για να αναγνωρίσουμε αυτό το διάνυσμα, θεωρούμε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο της μορφής:

$$\theta_t = \theta_{t-1} + P_t \varphi_{t-1} (y_t - \varphi_{t-1}{}^{\mathrm{T}} \theta_{t-1})$$

όπου ο πίνακας κέρδους P_t είναι έτσι επιλεγμένος ώστε να ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$$\left|\tilde{\theta}_t^T \varphi_t\right| \le \alpha_t \left\|\varphi_t\right\| + \beta_t \quad \text{με} \quad \lim_{t\to+\infty} \alpha_t = \lim_{t\to+\infty} \beta_t = 0 \quad (\alpha_t \ge 0,\ \beta_t \ge 0)$$

$$\left\|\theta_t\right\| < \mathrm{M}, \quad \forall t$$

$$\lim_{t\to+\infty} \left\|\theta_t - \theta_{t-1}\right\| = 0$$

Καθώς η κατάσταση x_t είναι επίσης άγνωστη παίρνουμε την εκτίμηση αυτής με τη βοήθεια ενός παρατηρητή της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}_{t+1} &= A_{t+1}\hat{x}_t + B_{t+1}u_t + K_{t+1}(y_t - \hat{y}_t) \\ \hat{y}_t &= C\hat{x}_t \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

με

$$\begin{aligned} \theta_t^T &= [K_t^T \mid B_t^T] \\ A_t &= K_t C + S \end{aligned}$$

Ορίζουμε: $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3) κάθε άγνωστο όρο με την εκτίμησή του έχουμε τελικά:

$$u_t = -L_t \hat{x}_t + s_t \qquad (5)$$

με

$$L_t = \frac{B_t^{\,T} R_t A_t}{B_t^{\,T} R_t B_t + \lambda}$$

$$s_t = -\frac{B_t^{\,T} W_{t,N}}{B_t^{\,T} R_t B_t + \lambda}$$

$$A_t = A(\theta_t)$$

$$B_t = B(\theta_t)$$

Η μήτρα R_t υπολογίζεται ως εξής:

$$R_{t+1} = C^T C + A_t^T R_t A_t - \frac{A_t^T R_t B_t B_t^T R_t A_t}{B_t^T R_t B_t + \lambda}$$

όπου R_0 οποιοσδήποτε θετικά ορισμένος πίνακας.

Ο υπολογισμός του $W_{t,N}$ μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

1)

$$\left.\begin{aligned}
W_{t,1} &= -C^T y_{t+N}{}^r \\
W_{t,2} &= (A_t - B_t L_t)^T W_{t,1} - C^T y_{t+N-1}{}^r \\
&\vdots \\
W_{t,N} &= (A_t - B_t L_t)^T W_{t,N-1} - C^T y_{t+1}{}^r
\end{aligned}\right\}$$

2) Ας υποθέσουμε ότι το σήμα αναφοράς είναι σταθερό:

$$y_t^r = y_t \ , \ \forall t \ .$$

Σε αυτήν την περίπτωση το $\lim_{t_f \to +\infty} J_{t_f}$ υπάρχει. Επομένως βάσει της (2) το $\lim_{t_f \to +\infty} V_t^{t_f}$ υπάρχει και είναι λύση της:

$$V = (A - BL^*)^T V - C^T y^r \quad (6)$$

Στην (5) αντικαθιστούμε το $W_{t,N}$ με το W_t που υπολογίζεται από την (6) ως ακολούθως:

$$W_t = (A_t - B_t L_t)^T W_{t-1} - C^T y_{t+1}{}^r \qquad (7)$$

Αν και ο τρόπος αυτός αφορά σταθερό σήμα αναφοράς, το διάνυσμα W_t που υπολογίζεται από την (7) μπορεί να χρησιμοποιηθεί έναντι του $W_{t,N}$ κάθε φορά που το σήμα αναφοράς y_t^r μεταβάλλεται ελάχιστα. Έτσι ο υπολογισμός του προσαρμοστικού ελέγχου της (5) είναι πιο απλός.

Λήμμα: Δεδομένου του συστήματος (1), του προσαρμοστικού παρατηρητή (4) και ενός αλγορίθμου αναγνώρισης που ικανοποιεί τις ιδιότητες (Α):

Ό έλεγχος:

$$u_t = -L_t \hat{x}_t + s_t$$

(όπου $\{L_t\}$ μια ακολουθία από ομοιόμορφα φραγμένους πίνακες (1xn) και

$\{s_t\}$ μια οποιαδήποτε ακολουθία φραγμένων βαθμωτών)

εξασφαλίζει ότι το σφάλμα $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$ συγκλίνει στο μηδέν και πως όλα τα σήματα είναι φραγμένα, αν το (Σ):

$$z_{t+1} = (A_t - B_t L_t) z_t$$

είναι εκθετικά ευσταθές.

Επίσης αν $\lim_{t \to +\infty} s_t = 0$, τότε $\lim_{t \to +\infty} u_t = 0$ και $\lim_{t \to +\infty} y_t = 0$