Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Διάλεξη 10

Πάτρα 2008

<u>MIMO αυτορυθμιζόμενος ελεγκτής για τοποθέτηση των πόλων ενός κλειστού (Σ) σε συγκεκριμένες θέσεις</u>

Θεωρούμε το ακόλουθο ελέγξιμο και παρατηρήσιμο (Σ) που περιγράφεται από την Δ.Ε.:

$$[I + A(z^{-1})]y_t = z^{-k}B(z^{-1})u_t + [I + C(z^{-1})]e_t \qquad (1)$$

όπου $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ και $C(z^{-1})$ είναι της μορφής:

$$X(z^{-1}) = X_1 z^{-1} + \ldots + X_{n_x} z^{-n_x}$$

Εισάγουμε τον παρακάτω νόμο ελέγχου:

$$u_t = G(z^{-1})(I + F(z^{-1}))^{-1} y_t \qquad (2)$$

όπου η $F(z^{-1})$ είναι της ίδιας μορφής με την $X(z^{-1})$ και

$$G(z^{-1}) = G_0 + G_1 z^{-1} + \ldots + G_{n_g} z^{-n_g}$$

Οπότε αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε:

$$y_t = [I + F(z^{-1})][I + P(z^{-1})]^{-1}[I + C(z^{-1})]e_t$$

όπου

$$I + P(z^{-1}) = [I + A(z^{-1})][I + F(z^{-1})] - z^{-k} B(z^{-1}) G(z^{-1}) \qquad (3)$$

Αν οι συντελεστές των πολυωνύμων $F(z^{-1})$ και $G(z^{-1})$ επιλέγονταν έτσι ώστε:

$$I + P(z^{-1}) = [I + C(z^{-1})][I + T(z^{-1})] \quad (4)$$

όπου $n_t \leq n_a + n_b + k - 1 - n_c$

τότε το κλειστό σύστημα γίνεται:

$$y_t = [I + F(z^{-1})][I + T(z^{-1})]^{-1} e_t$$

Η λύση των (3) και (4) απαιτούν τη λύση των παρακάτω γραμμικών εξισώσεων:

$$
(n_a+n_b+k-1)\,p\left\{
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
I & & 0 & \\
A_1 & & . & \\
. & & . & \\
. & & . & \\
. & & 0 & \\
. & I & -B_1 & \\
. & . & . & \\
A_{n_a} & . & . & -B_1 \\
 & . & . & . \\
 & . & -B_{n_a} & . \\
 & . & & . \\
 & A_{n_a} & & -B_{n_b}
\end{bmatrix} \\
\underbrace{\hspace{3cm}}_{(n_b+k-1)\,p}\;\underbrace{\hspace{3cm}}_{n_a p}
\end{array}\right.
\times
\begin{bmatrix}
F_1 \\ . \\ . \\ . \\ F_{n_f} \\ G_0 \\ . \\ . \\ . \\ G_{n_g}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
P_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ P_{n_p}
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
A_1 \\ . \\ . \\ . \\ A_{n_a} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0
\end{bmatrix}
$$

Η υλοποίηση του ελέγχου της (2) μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

1. Έχουμε:

$$[I + F(z^{-1})]^{-1} = [\det(I + F(z^{-1}))]^{-1} adj(I + F(z^{-1}))$$

κι επομένως:

$$\{[\det(I + F(z^{-1})]\} I u_t = G(z^{-1}) \{adj[I + F(z^{-1})]\} y_t$$

απ' όπου η είσοδος ελέγχου u_t μπορεί να υπολογιστεί.

2. Ας υποθέσουμε ότι:

$$F^*(z) = z^{n_f}(I + F(z^{-1})), \quad G^*(z) = z^{n_g} G(z^{-1}) \qquad (5)$$

και ότι ο ρυθμιστής έχει τα $F^*(z), G^*(z)$ relatively right prime με όλους τους δείκτες ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας ίσους με n_f και $n_a = n_b = n$.

Έπεται ότι η σχέση (2) μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$u_t = (I + \tilde{F}(z^{-1}))^{-1} \tilde{G}(z^{-1}) y_t \qquad (6)$$

όπου $n_{\tilde{f}} = n_f$ και $n_{\tilde{g}} = n_g$ (7)

$$
n_f + n_g \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}
G_0^T & & & -I & \\
G_1^T & G_0^T & & -F_1^T & -I \\
. & . & G_0^T & . & . \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
G_{n_g}^T & . & . & -F_{n_f}^T & . \\
 & G_{n_g}^T & . & & . \\
 & & G_{n_g}^T & & -F_{n_f}^T
\end{bmatrix}}_{n_f} \right.
$$

Αυτή η υπόθεση είναι απαραίτητη ώστε να διασφαλιστεί ότι ο προηγούμενος πίνακας (που χρειάζεται στον μετασχηματισμό από $[I + F(z^{-1}), G(z^{-1})]$ σε $[I + \tilde{F}(z^{-1}), \tilde{G}(z^{-1})]$) είναι πλήρης τάξης και ισχύουν οι σχέσεις (6) και (7).

Από την εξίσωση (2) ο νόμος ελέγχου μπορεί να γραφτεί ως:

$$
u_t = -\tilde{F}(z^{-1})u_t + \tilde{G}(z^{-1})y_t
$$

και επομένως είναι εύκολα υλοποιήσιμος.

Ο σχεδιασμός αυτού του MIMO ελεγκτή προϋποθέτει ότι γνωρίζουμε τις $A(z^{-1}), B(z^{-1})$ και $C(z^{-1})$.

Αυτές οι παράμετροι μπορούν να εκτιμηθούν online ως ακολούθως:

Ισχύει ότι το online μοντέλο του (Σ) δίδεται από:

$$y_t = -\alpha(z^{-1})y_t + \beta(z^{-1})u_t + \varepsilon_t \quad (8)$$

όπου

$$\alpha(z^{-1}) = \alpha_1 z^{-1} + \ldots + \alpha_{n_a} z^{-n_a}$$

$$\beta(z^{-1}) = \beta_1 z^{-1} + \ldots + \beta_{n_b+k} z^{-n_b-k}$$

Ο νόμος ελέγχου δίδεται από την (2) αλλά αντίθετα με τον offline σχεδιασμό οι $F(z^{-1})$ και $G(z^{-1})$ υπολογίζονται επιλύοντας την παρακάτω ισότητα:

$$[I+\alpha(z^{-1})][I+F(z^{-1})]-\beta(z^{-1})G(z^{-1})=I+T(z^{-1}) \quad (9)$$

όπου για την τάξη του $T(z^{-1})$ ισχύει:

$$nt \le n_a + n_b + k - 1 - n_c$$

Η ορίζουσα $\det(I+T(z^{-1}))$ δίδει τους πόλους του κλειστού (Σ).

Επομένως η αυτορυθμιζόμενη διαδικασία έχει ως εξής:

(i) Υπολογισμός των $\alpha(z^{-1})$ και $\beta(z^{-1})$ στην (8) χρησιμοποιώντας RLS.

(ii) Επίλυση της (9)

(iii) Επίλυση για $\tilde{F}(z^{-1})$ και $\tilde{G}(z^{-1})$ όπου

$[I+\tilde{F}(z^{-1})]G(z^{-1}) = \tilde{G}(z^{-1})[I+F(z^{-1})]$ και $n_{\tilde{f}} = n_f$, $n_{\tilde{g}} = n_g$

έτσι ώστε ο νόμος ελέγχου να είναι της μορφής της σχέσεως (2)

(iv) Εφαρμογή του ελέγχου u_t . Επιστροφή στο βήμα (i) και επανάληψη της διαδικασίας

Αν το (Σ) συγκλίνει τότε: $y_t = [I+F(z^{-1})][I+T(z^{-1})]^{-1} e_t$

Παράδειγμα

Θεωρούμε το πολυμεταβλητό (Σ):

$$[I + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}]y_t = [B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}]u_t + [I + C_1 z^{-1}]e_t \qquad (10)$$

με

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.4 & -0.2 \\ -0.1 & -0.9 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

και e_t : λευκός θόρυβος με μηδενική μέση τιμή

και διασπορά:

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Οι πόλοι του κλειστού (Σ) πρόκειται να τοποθετηθούν στο z=0.5 και z=0.4 έτσι ώστε η κατάλληλη επιλογή για το $I+T(z^{-1})$ είναι:

$$I+\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} z^{-1}$$

Ο offline σχεδιασμός του ρυθμιστή γι’ αυτό το (Σ) επιτυγχάνεται επιλύοντας την εξίσωση (4) και επικαλούμενοι τον μετασχηματισμό:

$$(I+\tilde{F}_1 z^{-1})^{-1}[\tilde{G}_0+\tilde{G}_1 z^{-1}]=[G_0+G_1 z^{-1}]\times[I+F_1 z^{-1}]^{-1} \qquad (11)$$

Ο προκύπτον νόμος ελέγχου:

$$u_t = -\tilde{F}_1 u_t + \tilde{G}_0 y_t + \tilde{G}_1 y_{t-1}$$

όπου

$$\tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} 0.213 & 0.203 \\ 0.155 & 0.286 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_0 = \begin{bmatrix} -0.10 & -0.048 \\ -0.16 & -0.115 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_1 = \begin{bmatrix} 0.0682 & 0.0265 \\ 0.0495 & 0.0469 \end{bmatrix}$$

Η αυτορυθμιζόμενη (online) έκδοση του ελεγκτή βρίσκεται ως εξής:

Φέρνουμε την σχέση (10) στην μορφή:

$$y_t = -\alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

όπου οι μήτρες συντελεστών εκτιμώνται χρησιμοποιώντας την RLS μέθοδο.

Ο νόμος ελέγχου βρίσκεται online από τις εξισώσεις (9) και (11).

Η σύγκλιση των παραμέτρων ελέγχου είναι αισθητή μετά από 3000 επαναλήψεις όπου οι μήτρες ελέγχου παίρνουν τις τιμές:

$$\tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} 0.275 & 0.213 \\ 0.139 & 0.292 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_0 = \begin{bmatrix} -0.102 & -0.058 \\ -0.153 & -0.106 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_1 = \begin{bmatrix} 0.0707 & 0.0382 \\ 0.0459 & 0.0332 \end{bmatrix}$$