Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών
Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Διάλεξη 12

Πάτρα 2008

Γενικευμένος προβλεπτικός έλεγχος

Μέχρι τώρα καμμία από τις μεθόδους ελέγχου που αναλύσαμε δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί έναν «γενικού σκοπού» αλγόριθμο για ευσταθή έλεγχο της πλειοψηφίας των πραγματικών συστημάτων.

Για να θεωρηθεί ως τέτοια μια μέθοδος πρέπει να εφαρμόζεται με επιτυχία σε:

- μη ελάχιστης φάσης συστήματα
- ανοικτού βρόγχου ασταθή συστήματα

- σύστημα με μεταβλητό ή αγνωστο νεκρό χρόνο.
- σύστημα με άγνωστη τάξη

Ο Γενικευμένος προβλεπτικός έλεγχος φαίνεται πως μπορεί να ανταπεξέλθει στα παραπάνω προβλήματα με έναν μόνο αλγόριθμο.

Θεωρούμε το μοντέλο:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \xi(t)/\Delta \qquad (1)$$

όπου

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_{n_b} q^{-n_b}$$

$$\Delta = 1 - q^{-1}$$

Βασει της (1), παράγουμε έναν j-βημάτων μπροστά εκτιμητή $y(t+j)$,

θεωρώντας την εξίσωση:

$$1 = E_j(q^{-1})A\Delta + q^{-j}F_j(q^{-1}) \qquad (2)$$

Όπου E_j, F_j είναι πολυώυμα μοναδικώς ορισμένα δεδομένου του $A(q^{-1})$

και διαστήματος πρόβλεψης *j*.

Αν πολλαπλασιάσουμε την (1) με $E_j\Delta q^j$ και αντικαταστήσουμε

για $E_jA\Delta$ από την (2) παίρνουμε:

$$y(t+j) = E_jB\Delta u(t+j-1) + F_jy(t) + E_j\xi(t+j)$$

Καθώς το $E_j(q^{-1})$ είναι τάξης *j-1*, τα στοιχεία θορύβου είναι όλα στο μέλλον έτσι ώστε ο βέλτιστος προβλεπτής, βάσει των μετρήσιμων δεδομένων εξόδου μέχρι τον χρόνο t και βάσει οποιουδήποτε u(t+i) για i>1, είναι προφανώς:

$$\hat{y}(t+j\,|\,t) = G_j \Delta u(t+j-1) + F_j y(t)$$

όπου

$$G_j(q^{-1}) = E_j B$$

ή

$$G_j(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})\left[1 - q^{-j} F_j(q^{-1})\right]}{A(q^{-1})\Delta}$$

Στην ανάπτυξη του γενικευμένου ελάχιστης διασποράς αλγορίθμου χρησιμοποιήθηκε μόνο μία πρόβλεψη $\hat{y}(t+\kappa \mid t)$ όπου κ θεωρήθηκε η τιμή νεκρού χρόνου του συστήματος. Σε αυτόν τον αλγόριθμο, θεωρήσαμε ολόκληρη ομάδα προβλέψεων όπου το j παίρνει τιμές από μια ελάχιστη ως μια μέγιστη τιμή: αυτές καλούνται ο ελάχιστος και ο μέγιστος ορίζοντας πρόβλεψης.

Diophantine Recursion

Χρησιμοποιώντας επαναληπτικά την Διοφαντική εξίσωση και δεδομένων των πολυωνύμων E_j, F_j βρίσκουμε τα E_{j+1}, F_{j+1}.

Θεωρούμε:

$$E = E_j$$

$$R = E_{j+1}$$

$$F = F_j$$

$$S = F_{j+1}$$

$$\tilde{A} = A\Delta$$

$$1 = E\tilde{A} + q^{-j}F$$

$$1 = R\tilde{A} + q^{-(j+1)}S$$

Αφαιρώντας την τελευταία από την προτελευταία σχέση παίρνουμε:

$$0 = \tilde{A}(R - E) + q^{-j}\left(q^{-1}S - F\right)$$

Το πολυώνυμο *R-E* είναι πολυώνυμο βαθμού j και μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη:

$$R - E = \tilde{R} + r_j q^{-j}$$

Έτσι ώστε

$$\tilde{A}\tilde{R} + q^{-j}\left(q^{-1}S - F + \tilde{A}r_j\right) = 0$$

Τότε προφανώς $\tilde{R} = 0$ και επίσης το *S* δίνεται από: $Sq\left(F - \tilde{A}r_j\right)$

Επίσης ισχύει:

$$\begin{aligned} r_j &= f_0 \\ S_i &= f_{i+1} - \tilde{a}_{i+1}r_j \end{aligned} \qquad (1)$$

για $i = 0$ μέχρι τον βαθμό του $S(q^{-1})$

και

$$R(q^{-1}) = E(q^{-1}) + q^{-j}r_j$$

$$G_{j+1} = B(q^{-1})R(q^{-1})$$

Δεδομένων των $A(q^{-1})$ και $B(q^{-1})$ και μίας λύσης $E_j(q^{-1})$ και $F_j(q^{-1})$ τότε οι εξισώσεις (1) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να πάρουμε το $F_{j+1}(q^{-1})$ και η (2) για να δώσει το $E_{j+1}(q^{-1})$ κτλ, με μικρή υπολογιστική προσπάθεια. Για την αρχικοποίηση των επαναλήψεων, σημειώνουμε ότι για $j=1$:

$$1 \approx E_1\tilde{A} + q^{-1}F_1$$

Και καθώς το στοιχείο οδήγησης του $\tilde{A}$ είναι 1 τότε:

$$E_1 = 1,\;\; F_1 = q\left(1-\tilde{A}\right)$$

Νόμος προβλεπτικού ελέγχου

Υποθέτουμε ότι έχουμε διαθέσιμο ένα μελλοντικό σημείο ρύθμισης ή μια ακολουθία αναφοράς $\left[w(t+j);\, j=1,2,\ldots \right]$

Θεωρούμε την συνάρτηση κόστους της μορφής:

$$J\left(N_1, N_2\right) = E\left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} \left[y(t+j) - w(t+j) \right]^2 + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda(j) \left[\Delta u(t+j-1) \right]^2 \right\}$$

Όπου

N_1 : ελάχιστος ορίζοντας κόστους

N_2 : μέγιστος ορίζοντας κόστους

$\lambda(j)$: control weighting sequence

Στην προηγούμενη συνάρτηση κόστους, δεδομένα είναι διαθέσιμα μέχρι τον χρόνο t ενώ δεν είναι διαθέσιμες μελλοντικές μετρήσεις.

Επίσης πρέπει:

$$N_2 \geq \deg\left(B\left(q^{-1}\right)\right)$$

$N_2 \approx$ χρόνος ανύψωσης του συστήματος

$N_1 \geq 1, \quad N_1 \geq \kappa$ (για ελαχιστοποίηση υπολογισμών)

Οι μελλοντικές έξοδοι μοντελοποιούνται ως εξής:

$$y(t+1) = G_1 \Delta u(t) + F_1 y(t) + E_1 \xi(t+1)$$

$$y(t+2) = G_2 \Delta u(t+1) + F_2 y(t) + E_2 \xi(t+2)$$

$$\vdots$$

$$y(t+N) = G_N \Delta u(t+N-1) + F_N y(t) + E_N \xi(t+N)$$

Υποθέτουμε ότι το $f(t+j)$ είναι το στοιχείο του $y(t+j)$ που αποτελείται από γνωστά σήματα στον χρόνο t, έτσι ώστε για π.χ.:

$$f(t+1) = \left[G_1(q^{-1}) - g_{10} \right] \Delta u(t) + F_1 y(t)$$

$$f(t+2) = q\left[G_2(q^{-1}) - q^{-1} g_{21} - g_{20} \right] \Delta u(t) + F_2 y(t)$$

$$\vdots$$

όπου

$$G_i(q^{-1}) = g_{i0} + g_n q^{-1} + \dots$$

Τότε οι προηγούμενες εξισώσεις μπορούν να γραφούν στην μορφή:

$$\hat{y} = G\tilde{u} + f$$

όπου τα διανύσματα είναι όλα Nx1:

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+N) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} f(t+1) \\ \vdots \\ f(t+N) \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας G είναι ένας κάτω-τριγωνικός πίνακας NxN:

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & & & \\ g_1 & g_0 & \bigcirc & \\ \vdots & & \ddots & \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_0 \end{bmatrix}, \quad g_{ij} = g_j, \;\; j = 0,1,2,\ldots < i$$

Αν ο νεκρός χρόνος του συστήματος είναι κ>1 οι πρώτες κ-1 γραμμές του G θα είναι 0.

Με

$$W = \begin{bmatrix} w(t+1) \\ \vdots \\ w(t+N) \end{bmatrix}$$

Έχουμε:

$$J_1 = E\left\{J(1,N)\right\} = E\left\{\left(y-W\right)^2 (y-W) + \lambda \tilde{u}^T \tilde{u}\right\}$$

$$J_1 = \left\{\left(G\tilde{u} + f - W\right)^T \left(G\tilde{u} + f - W\right) + \lambda \tilde{u}^T \tilde{u}\right\}$$

Η ελαχιστοποίηση του J_1 οδηγεί στο διάνυσμα:

$$\tilde{u} = \left(G^T G + \lambda I\right)^{-1} G^T \left(W - f\right)$$

Το πρώτο στοιχείο του $\tilde{u}$ είναι το Δu(t) έτσι ώστε ο έλεγχος u(t) δίνεται από:

$$u(t) = u(t-1) + \tilde{g}^T (W - f)$$

όπου $\tilde{g}^T$ είναι η πρώτη γραμμή του $\left(G^T G + \lambda I\right)^{-1} G^T$.

Μετά από ένα διάστημα $NU < N_2$ οι προβλεπόμενες αυξήσεις του ελέγχου θεωρούνται μηδενικές:

$$\Delta u(t+j-1) = 0, \quad j > NU$$

Το NU καλείται ορίζοντας ελέγχου (ισοδυναμεί με άπειρο κόστος στις δράσεις αύξησης του ελέγχου μετά από το NU)

Οι εξισώσεις πρόβλεψης μειώνονται σε:

$$\hat{y} = G_1 \tilde{u} + f$$

Όπου

$$
G_1 = \begin{bmatrix} g_0 & & & \\ g_1 & g_0 & \bigcirc & \\ & & \ddots & \\ & & & g_0 \\ g_{N-1} & g_{N-2} & & g_{N-NU} \end{bmatrix}_{NxNU}
$$

Ο αντίστοιχος νόμος ελέγχου δίνεται από:

$$
\tilde{u} = \left[G_1^T G_1 + \lambda I \right]_{NUxNU}^{-1} G_1^T \left(w - f \right)
$$

Επιλογή των οριζόντων

- $N_1 \geq 1$, συνήθως $N_1 = \kappa$
- N_2 : συνήθως $N_2 \geq \deg\left(B(q^{-1})\right)$
- NU, τουλάχιστον ίσος με τον αριθμό των ασταθών ή με άσχημη συμπεριφορά πόλων ($NU \simeq 1$, βιομηχανικές διαδικασίες)