Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Διάλεξη 14

Πάτρα 2008

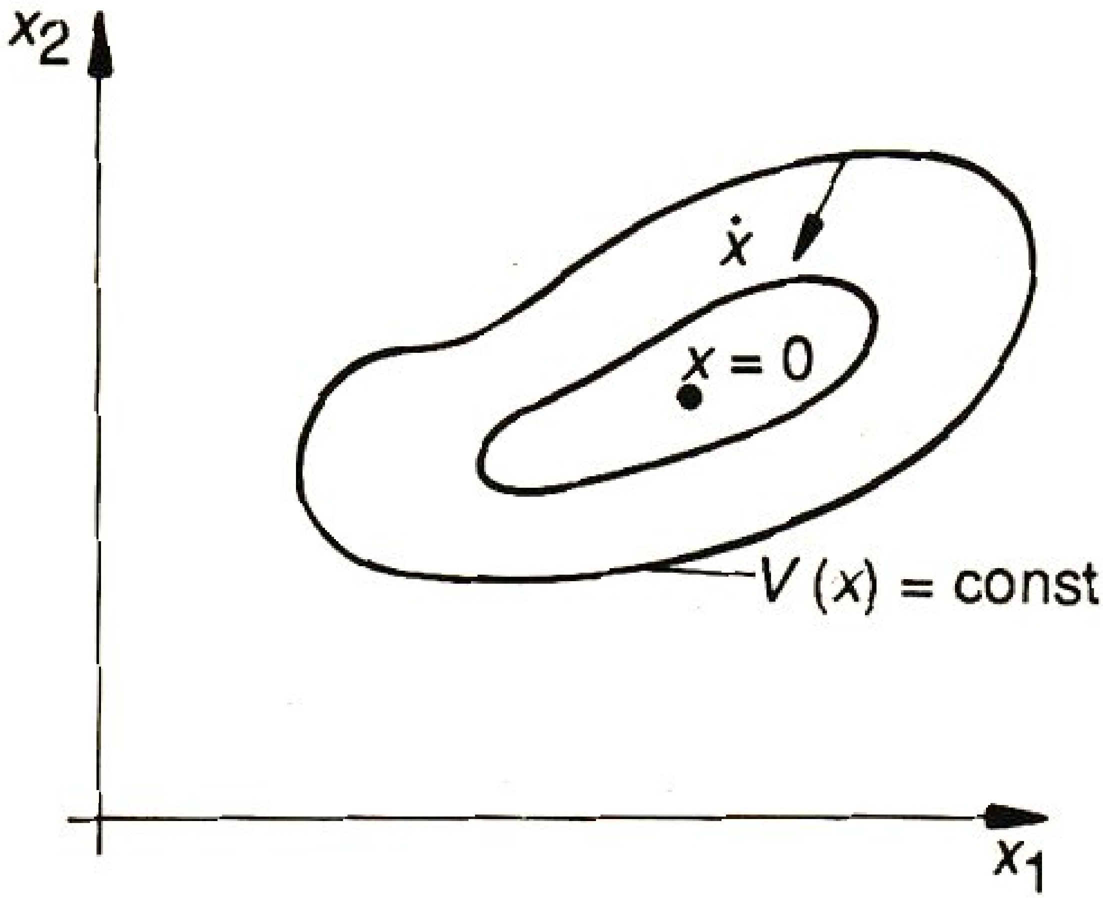
Θεωρία ευστάθειας

Ουσιαστικά θέλουμε να βρούμε έναν τέτοιο νόμο ελέγχου που να μας εξασφαλίζει ότι:

$$e = y - y_m \to 0$$

Δεύτερη Μέθοδος Lyapunov

Ο Lyapunov εισήγαγε μία απευθείας μέθοδο για να ερευνούμε την ευστάθεια μιας λύσης σε μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση. Η βασική ιδέα απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



x_2
$\dot{x}$
$x = 0$
$V(x) = \text{const}$
x_1

Δεύτερη Μέθοδος Lyapunov

Έχουμε την διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = f(x,t)$$

με

$$f(0,t) = 0$$

και x ένα διάνυσμα καταστάσεων διάστασης n.

Υποτίθεται ότι η f είναι τέτοια ώστε να υπάρχουν λύσεις $\forall t \geq t_0$.

Θεωρουμε ότι το σημείο ισορροπίας βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, χωρίς αυτό να επηρεάζει την γενικότητα καθώς αυτό μπορεί να γίνει απλά με έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων.

Θεώρημα ευστάθειας Lyapunov

Υποθέτουμε ότι τη συνάρτηση V: $R^{n+1} \rightarrow R$ ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $V\left(0,t\right)=0$, $\forall t \in R$
2. Η *V* διαφορίσιμη ως προς *x* και *t*
3. Η V είναι θετικώς ορισμένη, δηλαδή $V\left(x,t\right) \geq y\left(\|x\|\right) > 0$ όπου $g : R \rightarrow R$ είναι συνεχής και αυξανόμενη με $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

Μία επαρκής συνθήκη για ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος είναι επομένως:

$$\dot{V}(x,t) = f^{T}(x,t)\nabla_{x} \cdot V + \frac{\partial V}{\partial t} < 0, \quad \forall \mathrm{x} \neq 0$$

Δηλαδή πρέπει η $\dot{V}(x,t)$ να είναι αρνητικώς ορισμένη.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το (Σ) που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu$$

Και το οποίο μέσω του ελέγχου: $u = t_0 u_c - S_0 y$ μπορεί να πάρει την επιθυμητή μορφή:

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c$$

Ορίζουμε το σφάλμα:

$$e = y - y_m$$

Προκύπτει ότι:

$$\frac{de}{dt} = -a_m e + \left(a_m - a - bS_0\right) y + \left(bt_0 - b_m\right) u_c$$

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα μηδενίζεται αν οι παράμετροι είναι ίσες με τις επιθυμητές. Επιχειρούμε τώρα να υλοποιήσουμε έναν μηχανισμό προσαρμογής των παραμέτρων που θα οδηγεί τις παραμέτρους t_0 και s_0 στις επιθυμητές τους τιμές. Γι' αυτόν το λόγο εισάγουμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V\left(e,t_0,S_0\right)=\frac{1}{2}\left(e^2+\frac{1}{b\gamma}\left(bS_0+a-a_m\right)^2+\frac{1}{b\gamma}\left(bt_0-b_m\right)^2\right)$$

Αυτή η συνάρτηση είναι μηδενική όταν το e είναι μηδενικό και οι παράμετροι του ελεγκτή είναι ίσες με τις βέλτιστες τιμές. Έχουμε:

$$\frac{dV}{dt}=e\frac{de}{dt}+\frac{1}{\gamma}\left(bS_0+a-a_m\right)\frac{dS_0}{dt}+\frac{1}{\gamma}\left(bt_0-b_m\right)\frac{dt_0}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt}=-a_me^2+\frac{1}{\gamma}\left(bS_0+a-a_m\right)\left(\frac{dS_0}{dt}-\gamma ye\right)+\frac{1}{\gamma}\left(bt_0-b_m\right)\left(\frac{dt_0}{dt}+\gamma u_ce\right)$$

Αν

$$\frac{dt_0}{dt} = -\gamma u_c e$$

$$\frac{dS_0}{dt} = \gamma y e$$

Τότε έχουμε:

$$\frac{dV}{dt} = -a_m e^2$$

Παράδειγμα:

Έστω ότι θέλουμε να προσαρμόσουμε ένα μόνο κέρδος θ.

Το σφάλμα δίνεται από τη σχέση:

$$e = G(p)\left(\theta - \theta^0\right)u_c$$

Ισχύει:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\left(\theta - \theta^0\right)u_c$$

$$e = Cx$$

Αν το ομογενές (Σ) $\dot{x} = Ax$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές τότε $\exists P, Q$ θετικά ορισμένοι πίνακες τέτοιοι ώστε:

$$A^T P + PA = -Q$$

Επιλέγουμε την ακόλουθη συνάρτηση ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}\left(\gamma x^T P x + \left(\theta - \theta^0\right)^2\right)$$

Έχουμε:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{dx}{dt}^T Px + x^T P \frac{dx}{dt}\right) + \left(\theta - \theta^0\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{\gamma}{2} x^T Q x + \left(\theta - \theta^0\right)\left(\frac{d\theta}{dt} + \gamma u_c B^T P x\right)$$

Αν επιλέξουμε $\frac{d\theta}{dt} = -\gamma u_c B^T P x$ τότε

$x \to 0, \;\; e = Cx \to 0$ αλλά όχι απαραίτητα και $\left(\theta - \theta^0\right) \to 0$.

Αν η συνάρτηση Lyapunov επιλεχθεί έτσι ώστε:

$$B^T P = C$$

Τότε παίρνουμε:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma u_c C x$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma u_c e$$

Θεώρημα

Ας υποθέσουμε ότι το ΓΧΑ σύστημα:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Είναι πλήρως ελέγξιμο και παρατηρήσιμο. Η συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

είναι αυστηρώς θετική πραγματική και $G^{-1}(s)$ είναι ευσταθής BIBO.

Τότε ο παραμετρικός κανόνας προσαρμογής:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma u_c e$$

όπου γ είναι μια θετική σταθερά,

μηδενίζει το σφάλμα εξόδου e ($e \to 0$).

Επίσης, η παράμετρος θ συγκλίνει στο θ^0 ($\theta \to \theta^0$) για σήμα εισόδου 1ης τάξης.