



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Τεχνητή Νοημοσύνη I

Ενότητα 5: Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών

Μουστάκας Κωνσταντίνος

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας

Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών



Περιεχόμενα ενότητας

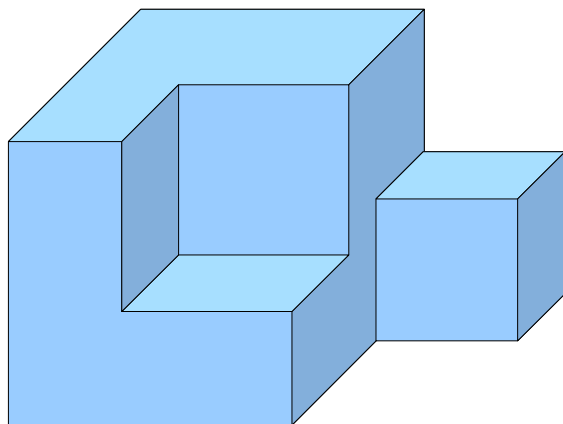
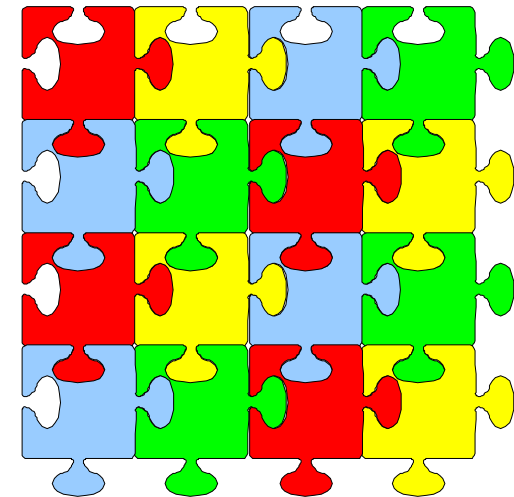
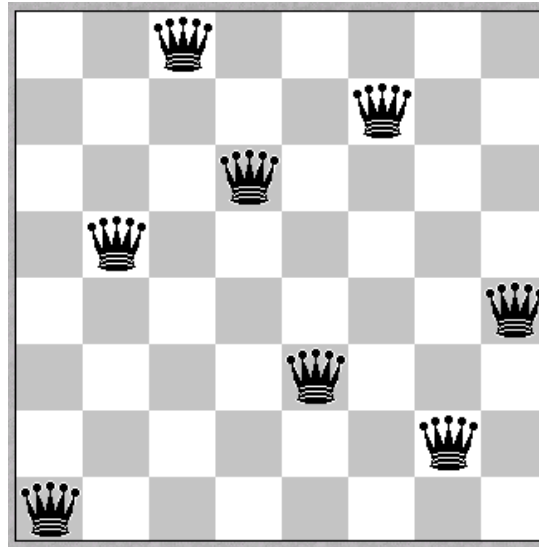
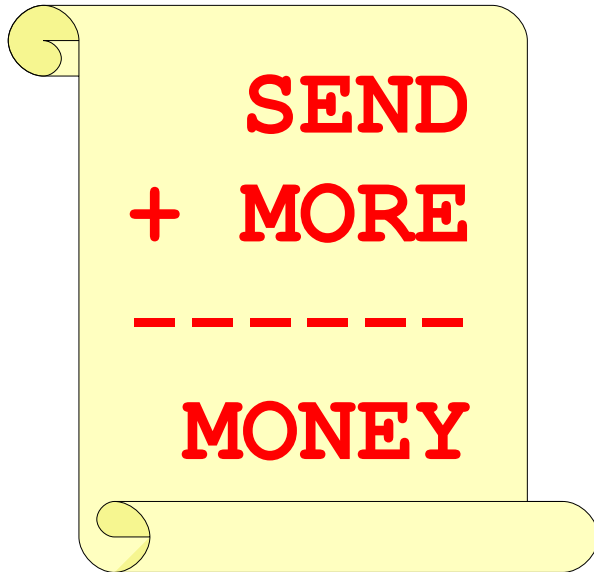
Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών



Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών



Παραδείγματα Προβλημάτων Ικανοποίησης Περιορισμών (Constraint Satisfaction Problems)



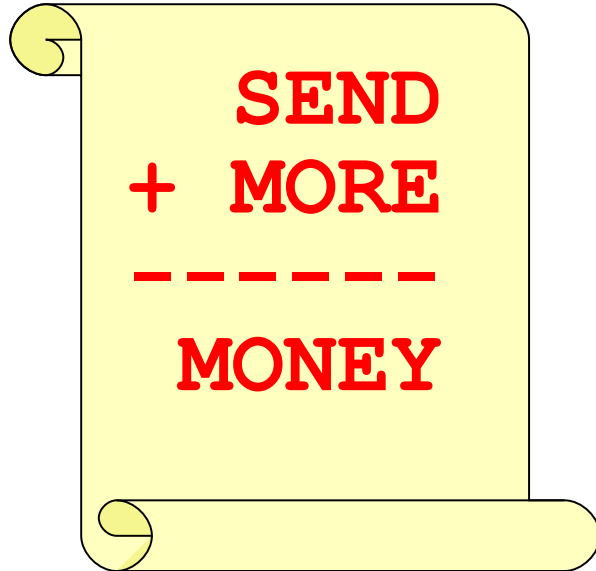
ΔΕΥΤΕΡΑ	ΤΡΙΤΗ	ΤΕΤΑΡΤΗ	ΠΕΜΠΤΗ	ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ



Γενικός Αλγόριθμος Ικανοποίησης Περιορισμών

1. Δώσε αρχικές τιμές στις μεταβλητές.
2. Αν ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί,
τύπωσε το αποτέλεσμα και σταμάτησε.
3. Αν υπάρχει τουλάχιστον μια μη δοκιμασμένη
τιμή για τουλάχιστον μια μεταβλητή,
δώσε την τιμή στη μεταβλητή και
πήγαινε στο βήμα 2.
4. Τέλος προγράμματος





ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ: S,E,N,D,M,O,R,Y
ΠΕΔΙΟ ΤΙΜΩΝ: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ:
 $S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y$
 $S \neq 0, M \neq 0$

$$(1000*S+100*E+10*N+D)+(1000*M+100*O+10*R+E) = (10000*M+1000*O+100*N+10*E+Y)$$

$$Y = (D+E) \bmod 10$$

$$E = (N+R) \bmod 10 \text{ or } (N+R+1) \bmod 10$$

$$N = (E+O) \bmod 10 \text{ or } (E+O+1) \bmod 10$$

$$O = (S+M) \bmod 10 \text{ or } (S+M+1) \bmod 10$$

$$M = 0 \text{ or } 1$$



στη FORTRAN

```
DO 10 S=1, 9
DO 10 E=0, 9
DO 10 N=0, 9
DO 10 D=0, 9
DO 10 M=1, 9
DO 10 O=0, 9
DO 10 R=0, 9
DO 10 Y=0, 9
IF (.....) GOTO 20
10 CONTINUE
20 PRINT * .....
```



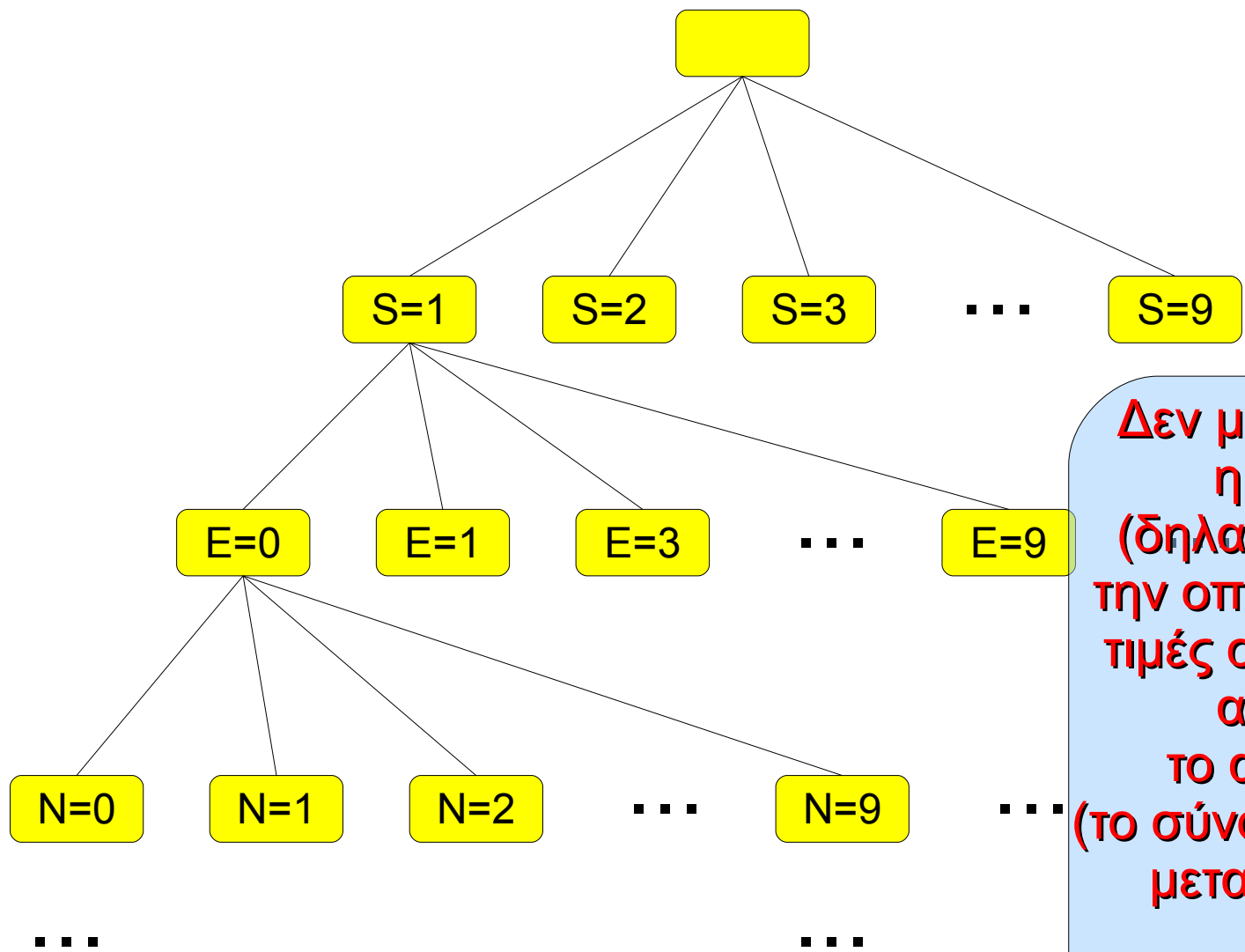
στην PROLOG

goal:-

```
member(S, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]),
member(E, [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]),
member(N, [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]),
member(D, [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]),
member(M, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]),
member(O, [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]),
member(R, [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]),
member(Y, [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]),
S/=E, E/=N, ...
(1000*S+100*E+10*N+D) +
  (1000*M+100*O+10*R+E) ::=
  (10000*M+1000*O+100*N+10*E+Y),
write(.....).
```



Επίλυση με Δέντρο Αναζήτησης



Δεν μας ενδιαφέρει η διαδρομή (δηλαδή η σειρά με την οποία θα πάρουν τιμές οι μεταβλητές), αλλά μόνο το αποτέλεσμα (το σύνολο των ζευγών μεταβλητή=τιμή)
⇒ αντιμεταθέσεις



```
SWI-Prolog-Editor - [D:\Q\teaching_material\mine\AI\money.pl]
File Edit Start Test Window Help
money.pl
1 % Author: K.Sgarbas
2 % Date: 27/10/2006
3
4 % SEND+MORE=MONEY
5
6 goal:- member(M,[1,2,3,4,5,6,7,8,9]),
7         member(S,[1,2,3,4,5,6,7,8,9]), S\=M,
8         member(E,[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]), E\=S, E\=M,
9         member(N,[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]), N\=E, N\=S, N\=M,
10        member(D,[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]), D\=N, D\=E, D\=S, D\=M,
11        member(O,[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]), O\=D, O\=N, O\=E, O\=S, O\=M,
12        member(R,[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]), R\=O, R\=D, R\=N, R\=E, R\=S, R\=M,
13        member(Y,[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]), Y\=R, Y\=O, Y\=D, Y\=N, Y\=E, Y\=S, Y\=M,
14 /*
15 Y is (D+E) mod 10,
16 (E is (N+R) mod 10; E is (N+R+1) mod 10),
17 (N is (E+O) mod 10; N is (E+O+1) mod 10),
18 (O is (S+M) mod 10; O is (S+M+1) mod 10),
19 */
20     N1 is S*1000+E*100+N*10+D,
21     N2 is M*1000+O*100+R*10+E,
22     N3 is M*10000+O*1000+N*100+E*10+Y,
23     N1+N2 == N3,
24     write(N1),write('+'),write(N2),write('='),write(N3),nl.
--
Yes
5 ?- time(goal).
9567+1085=10652
% 4,982,302 inferences, 4.48 CPU in 4.88 seconds (92% CPU, 1111036 Lips)
Yes
6 ?-
```



Πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών

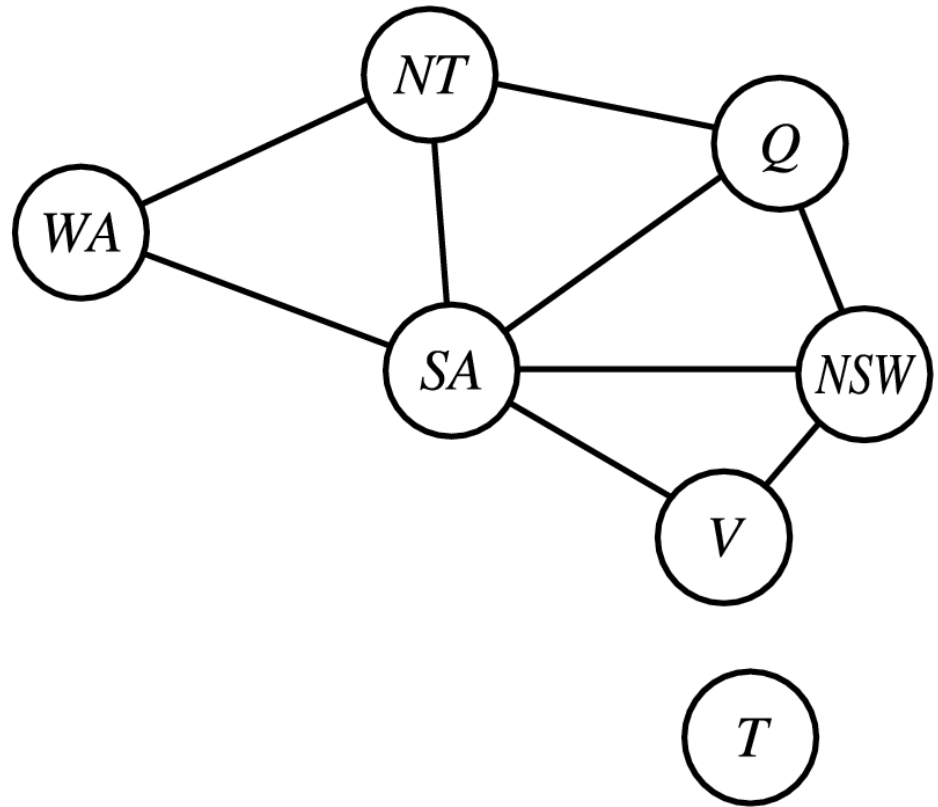
- Μεταβλητές: X_1, X_2, \dots, X_n ,
- Πεδία ορισμού: D_1, D_2, \dots, D_n
- Περιορισμοί: C_1, C_2, \dots, C_m
- Ανάθεση τιμών: $\{X_i = v_i, X_j = v_j, \dots\}$
 - Μερική ή πλήρης
- Συνεπής ανάθεση
- Λύση
- Προαιρετικά: Μεγιστοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης



Παράδειγμα (1/2)



(α)



(β)

Γράφημα περιορισμών



Παράδειγμα (2/2)

- Μεταβλητές: *WA, NT, Q, NSW, V, SA, T*
- Πεδία ορισμού: {κόκκινο, πράσινο, μπλε} για όλες τις μεταβλητές
- Περιορισμοί: Να μην έχουν οι γειτονικές περιοχές ίδιο χρώμα
- Εναλλακτικές αναπαραστάσεις:
 - Απαρίθμηση επιτρεπτών συνδυασμών
 - { (κόκκινο, πράσινο), (κόκκινο, μπλε), (πράσινο, κόκκινο), (πράσινο, μπλε), (μπλε, κόκκινο), (μπλε, πράσινο) }
 - Ειδική σημειογραφία
 - $WA \neq NT$



Χαρακτηριστικά

- Εναλλακτικές διατυπώσεις
 - Αυξητική (αναζήτηση πρώτα κατά βάθος)
 - Πλήρεις καταστάσεις (τοπική αναζήτηση)
- Διακριτές / Συνεχείς μεταβλητές
- Πεπερασμένα / άπειρα πεδία ορισμού
- Περιορισμοί: Μοναδιαίοι, δυαδικοί
- Περιορισμοί προτίμησης
 - Βελτιστοποίηση

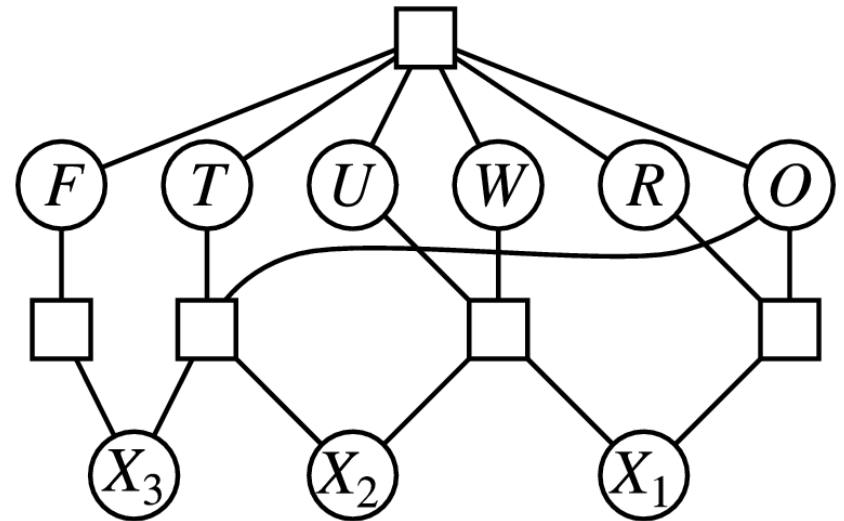


Ανώτερης τάξης περιορισμοί

Κρυπταριθμητικός γρίφος

$$\begin{array}{r} T W O \\ + T W O \\ \hline F O U R \end{array}$$

(α)



(β)

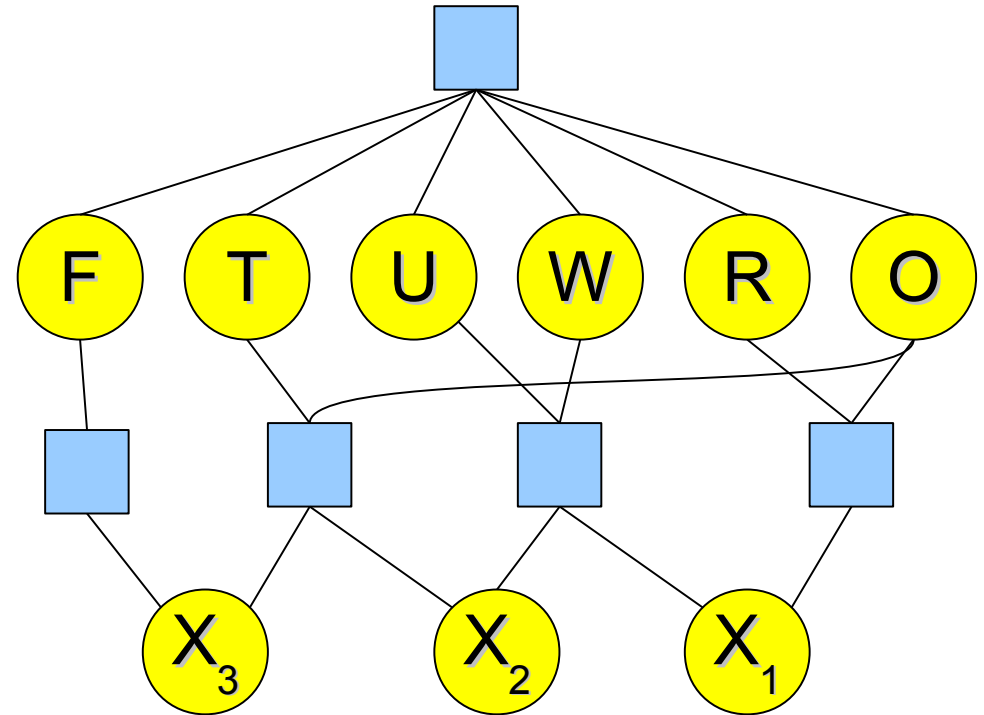
- $Alldiff(F, T, U, W, R, O)$
- $O + O = R + 10 \times X1$
- $X1 + W + W = U + 10 \times X2$
- $X2 + T + T = O + 10 \times X3$

(βοηθητικές μεταβλητές)



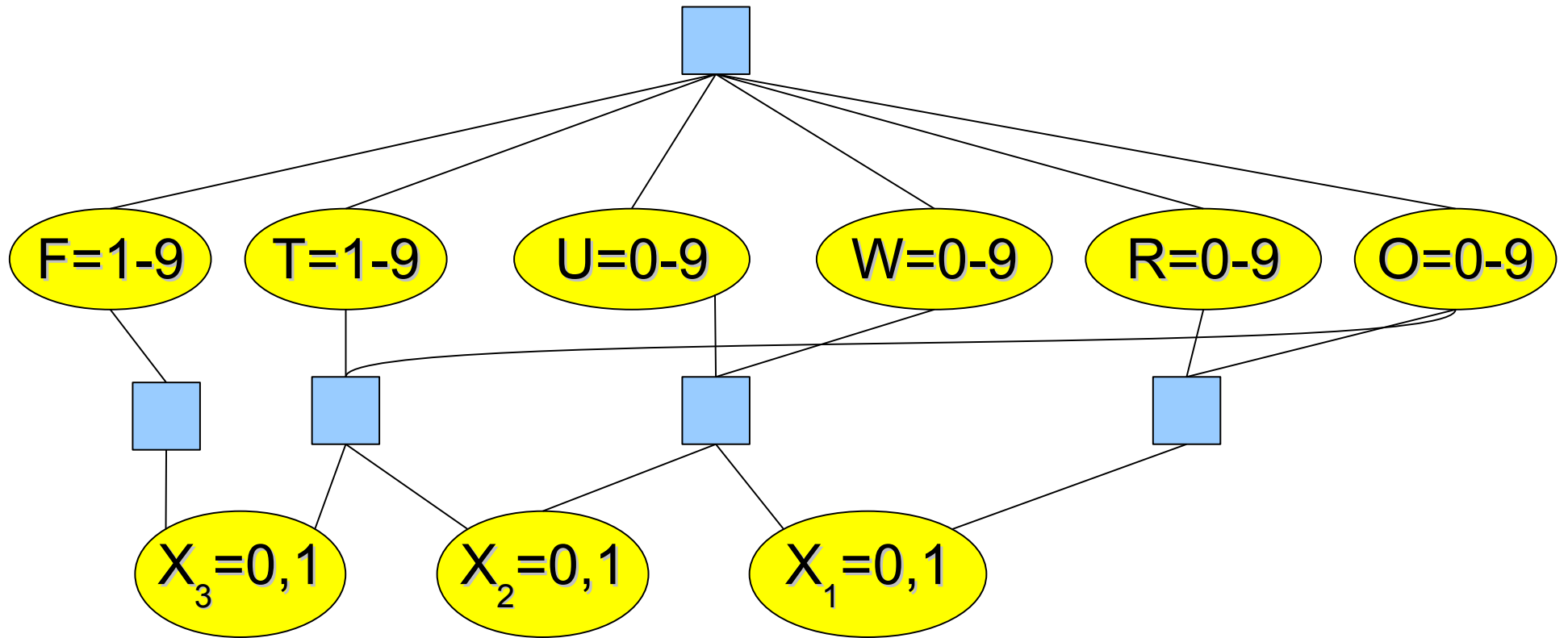
TWO
+ TWO

FOUR



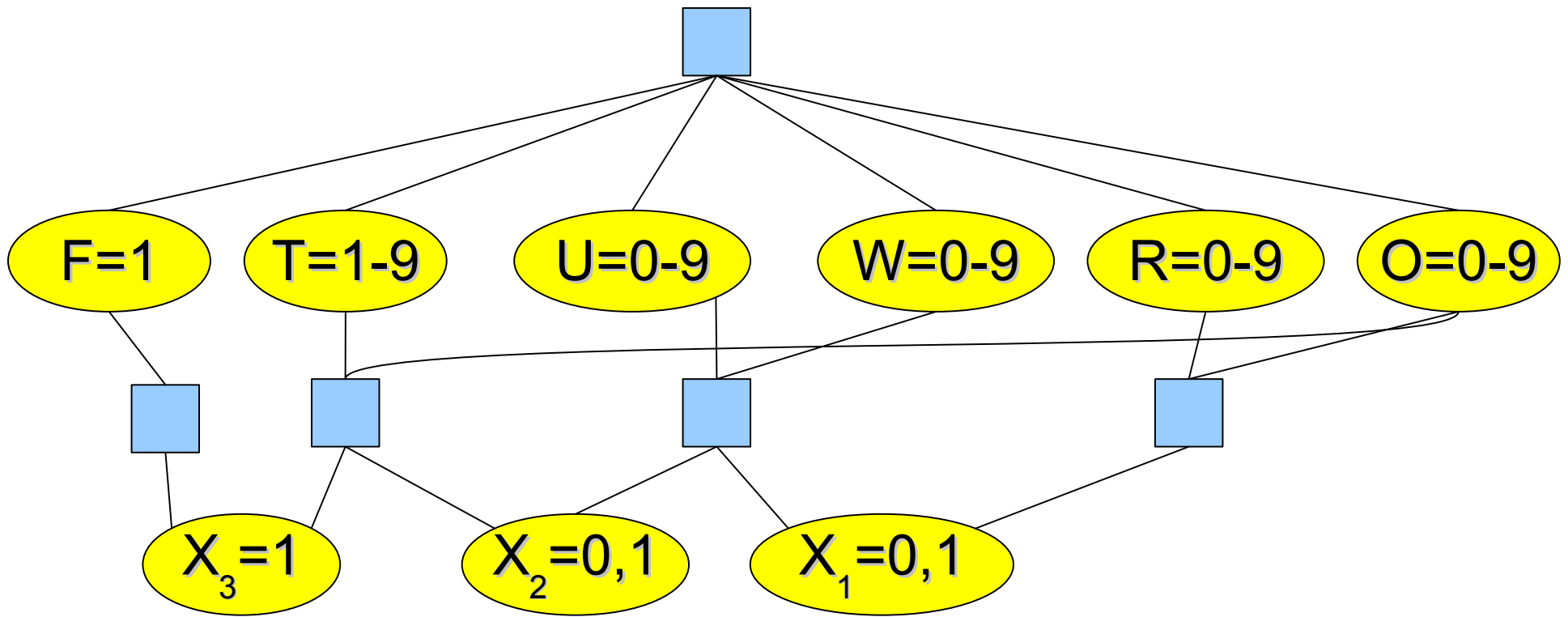
$$\begin{aligned}
 O + O &= R + 10 \cdot X_1 \\
 X_1 + W + W &= U + 10 \cdot X_2 \\
 X_2 + T + T &= O + 10 \cdot X_3 \\
 X_3 &= F
 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 O + O &= R + 10 * X_1 \\
 X_1 + W + W &= U + 10 * X_2 \\
 X_2 + T + T &= O + 10 * X_3 \\
 X_3 &= F
 \end{aligned}$$





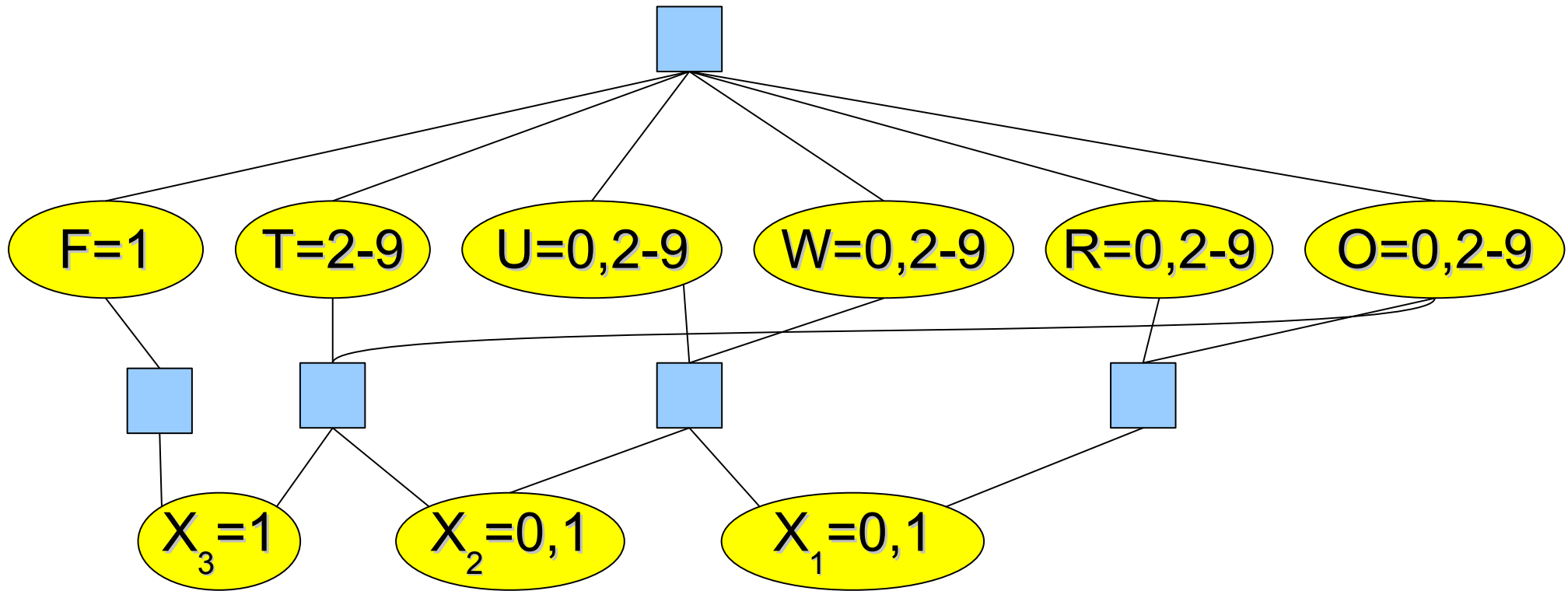
$$O + O = R + 10 \cdot X_1$$

$$X_1 + W + W = U + 10 \cdot X_2$$

$$X_2 + T + T = O + 10 \cdot X_3$$

$$X_3 = F$$





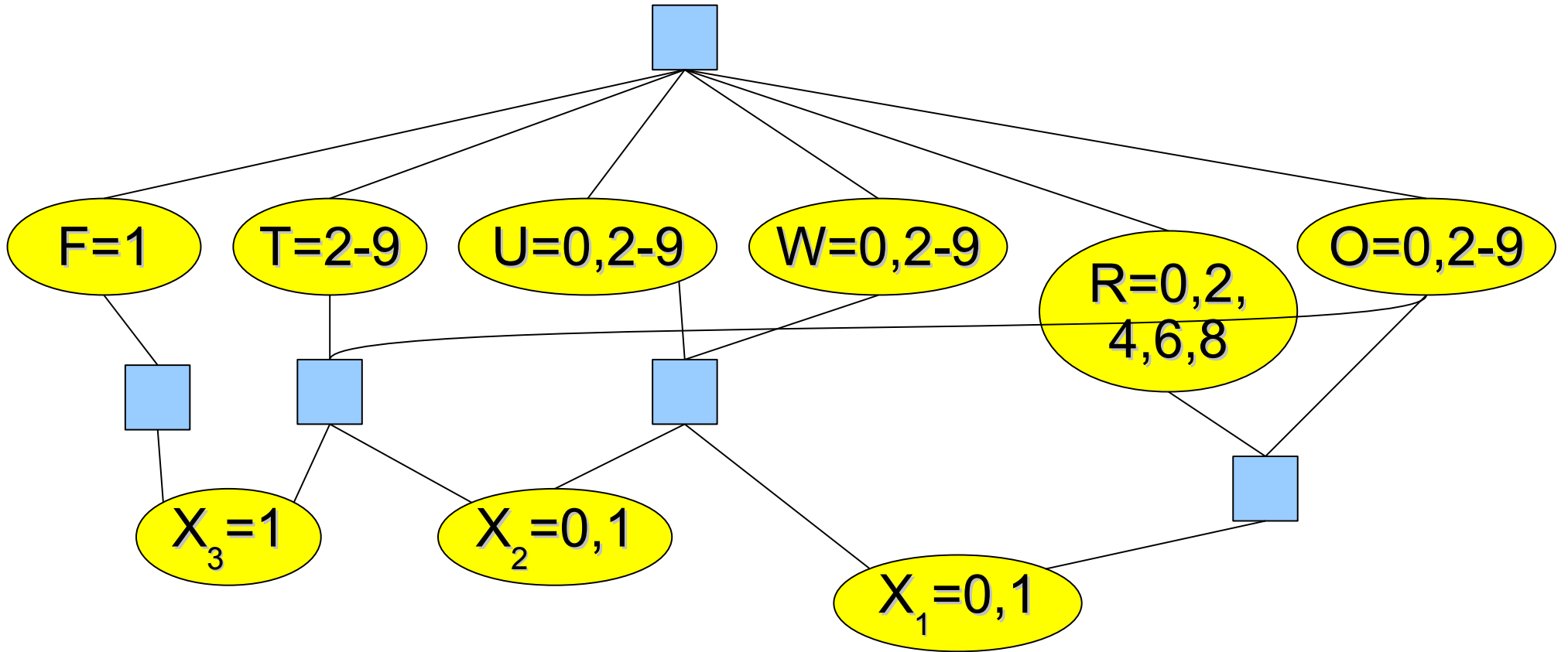
$$O + O = R + 10 * X_1$$

$$X_1 + W + W = U + 10 * X_2$$

$$X_2 + T + T = O + 10 * X_3$$

$$X_3 = F$$





$$\begin{aligned}
 O + O &= R + 10 \cdot X_1 \\
 X_1 + W + W &= U + 10 \cdot X_2 \\
 X_2 + T + T &= O + 10 \cdot X_3 \\
 X_3 &= F
 \end{aligned}$$

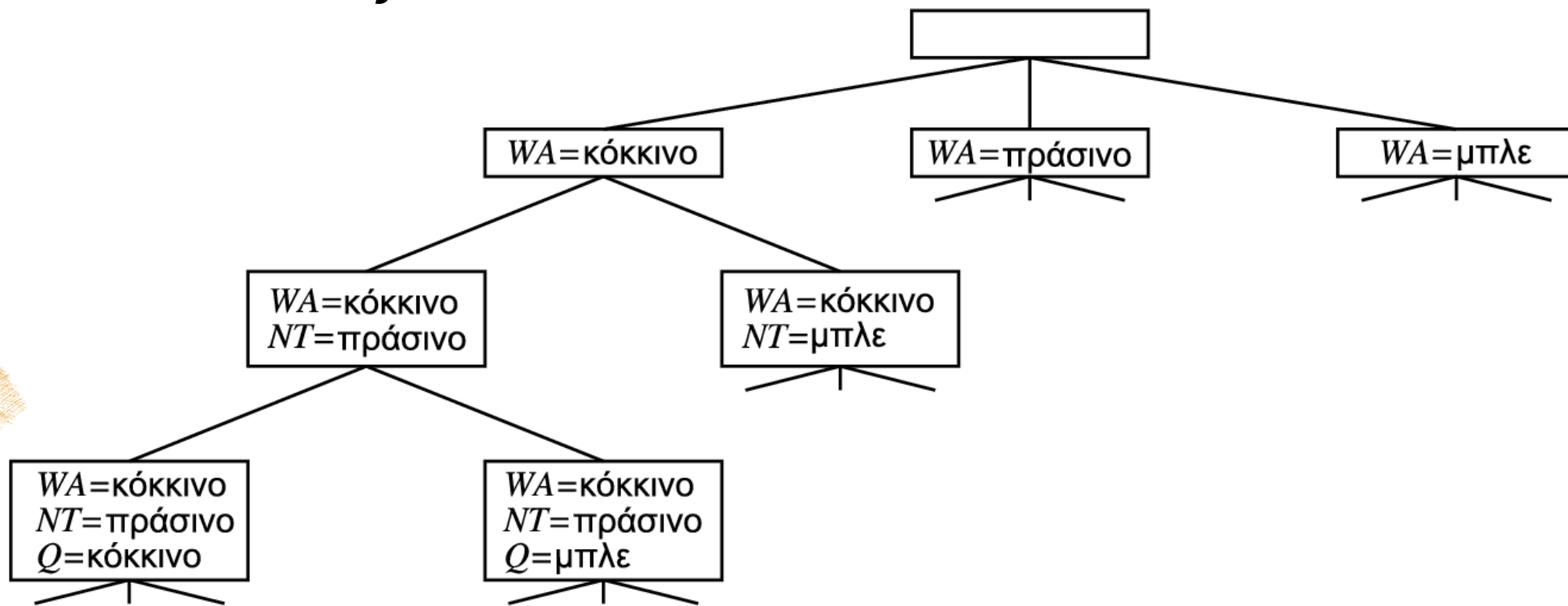


Αναζήτηση με υπαναχώρηση στα προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών



Αναζήτηση πρώτα κατά βάθος

- Αντιμεταθετικότητα
 - Όλοι οι αλγόριθμοι αναζήτησης των προβλημάτων ικανοποίησης περιορισμών παράγουν διαδόχους εξετάζοντας τις δυνατές αναθέσεις τιμών για μία μόνο μεταβλητή σε κάθε κόμβο του δένδρου αναζήτησης.
- Επιλογή από τις επιτρεπτές τιμές, με βάση τις τρέχουσες αναθέσεις.



Βελτιώσεις

1. Ποια είναι η επόμενη μεταβλητή στην οποία θα πρέπει να ανατεθεί τιμή και με ποια σειρά θα πρέπει να δοκιμαστούν οι τιμές της;
2. Τι συνέπειες έχουν οι τρέχουσες αναθέσεις τιμών μεταβλητών για τις άλλες μεταβλητές στις οποίες δεν έχουν ανατεθεί τιμές;
3. Όταν μια διαδρομή αποτύχει — δηλαδή, φτάσει σε μια κατάσταση στην οποία μια μεταβλητή δεν έχει νόμιμες τιμές — μπορεί η αναζήτηση να αποφύγει να επαναλάβει αυτή την αποτυχία στις επόμενες διαδρομές;



Προτεραιότητα μεταβλητών και τιμών

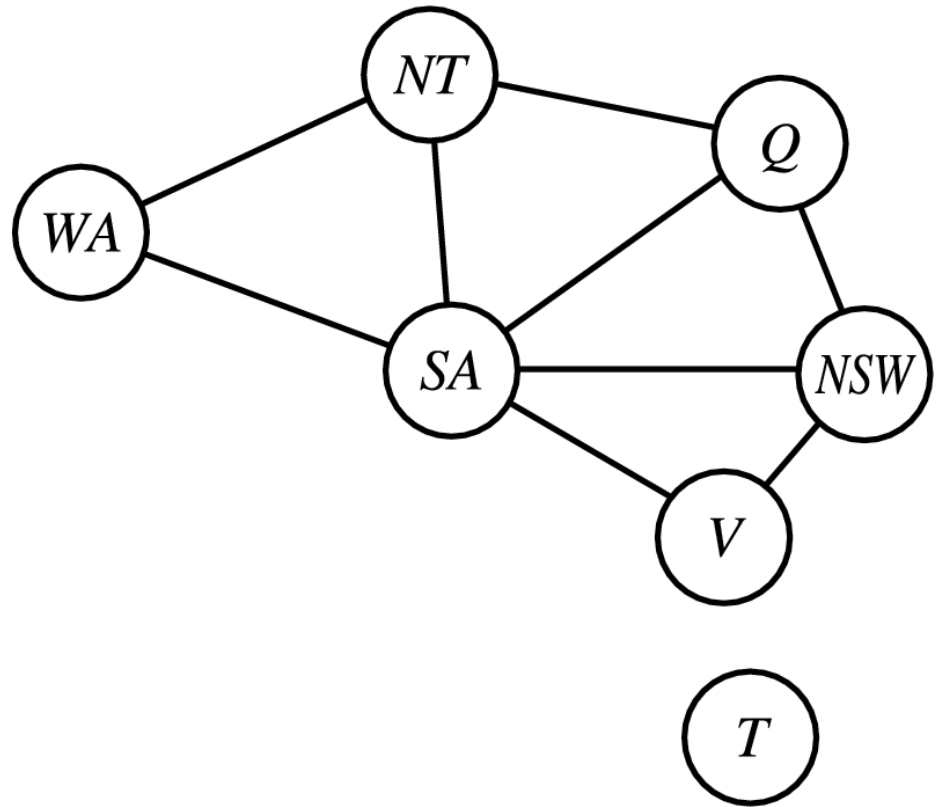
- Επιλογή μεταβλητής: Η πιο περιορισμένη
 - Ευρετικός μηχανισμός ελάχιστων απομεινουσών τιμών (minimum remaining values, MRV)
 - Ευρετικός μηχανισμός βαθμού (degree heuristic)
- Επιλογή τιμής: Η λιγότερο περιοριστική
 - Ευρετικός μηχανισμός της λιγότερο δεσμευτικής τιμής (least-constraining value, LCV)
- Παραδείγματα



Παράδειγμα



(α)



(β)

Γράφημα περιορισμών



Πρώιμος έλεγχος (forward checking)

- Κάθε φορά που ανατίθεται τιμή σε μια μεταβλητή X , ελέγχουμε τις μεταβλητές που συνδέονται με την X και αφαιρούμε τιμές από τα πεδία τους.

	<i>WA</i>	<i>NT</i>	<i>Q</i>	<i>NSW</i>	<i>V</i>	<i>SA</i>	<i>T</i>
Αρχικά πεδία ορισμού	R G B	R G B	R G B	R G B	R G B	R G B	R G B
Μετά από <i>WA=κόκκινο</i>	R	G B	R G B	R G B	R G B	G B	R G B
Μετά από <i>Q=πράσινο</i>	R	B	G	R B	R G B	B	R G B
Μετά από <i>V=μπλε</i>	R	B	G	R	B		R G B



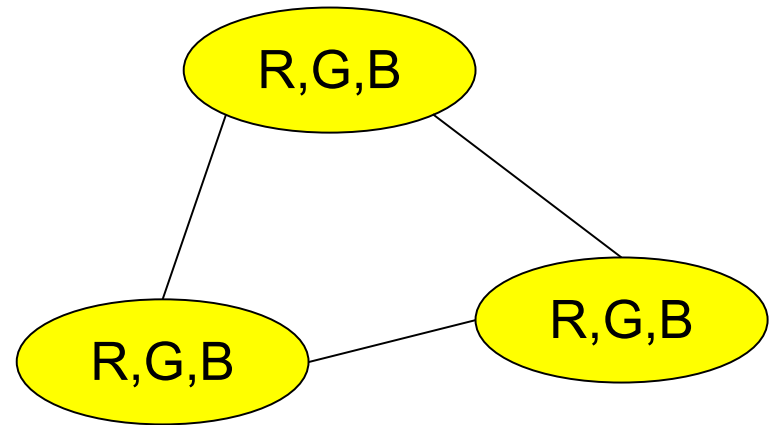
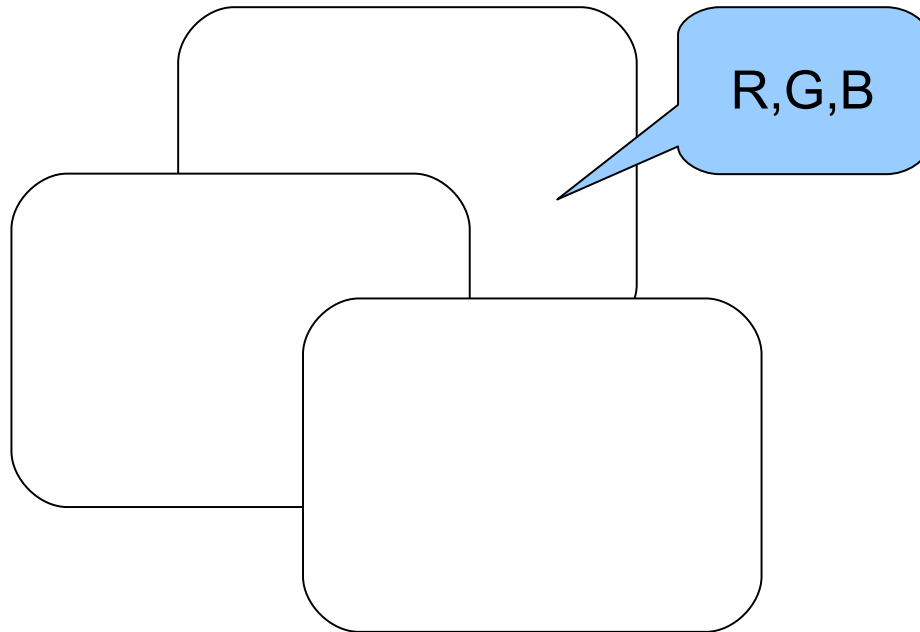
Διάδοση περιορισμών

(constraint propagation)

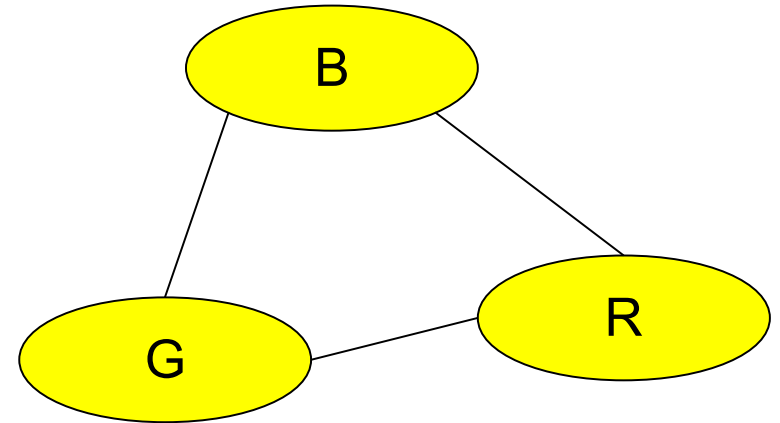
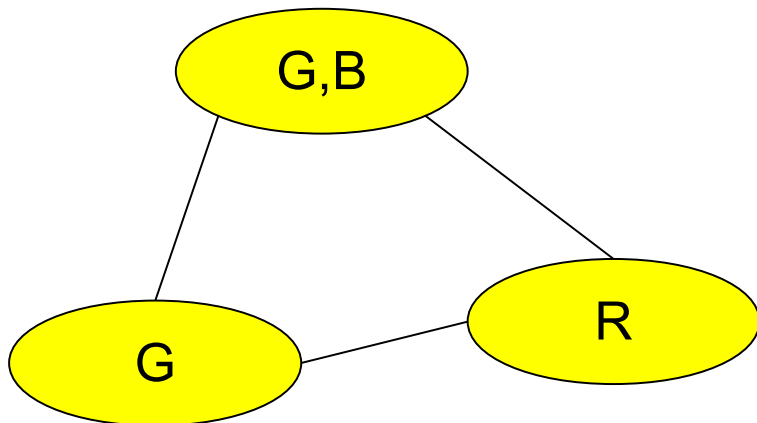
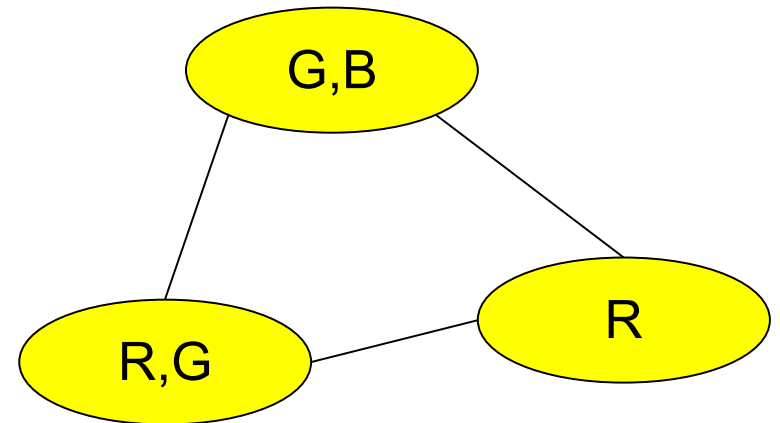
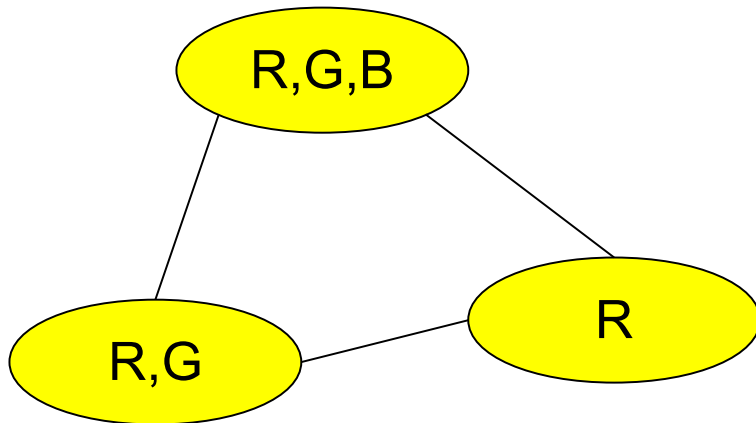
- Αναδρομική επέκταση του πρώιμου ελέγχου σε όλες τις μεταβλητές, για τις οποίες υπήρξε διαγραφή τιμής σε συνδεόμενη με αυτές μεταβλητή.
- Συνέπεια τόξου (arc consistency): Εφαρμόζεται τόσο πριν από την έναρξη της αναζήτησης, όσο και μετά από κάθε ανάθεση τιμής.
- Δεν αποκαλύπτει όλες τις δυνατές ασυνέπειες.
 - Ισχυρότεροι έλεγχοι: k-συνέπεια, υψηλό κόστος επιβολής.



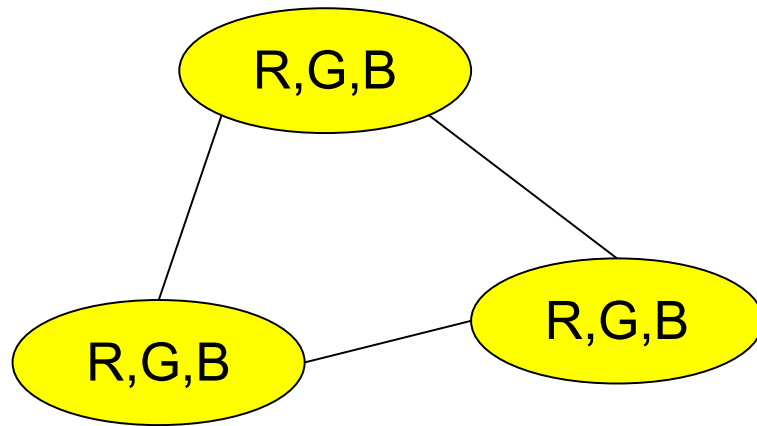
Διάδοση Περιορισμών με Arc Consistency



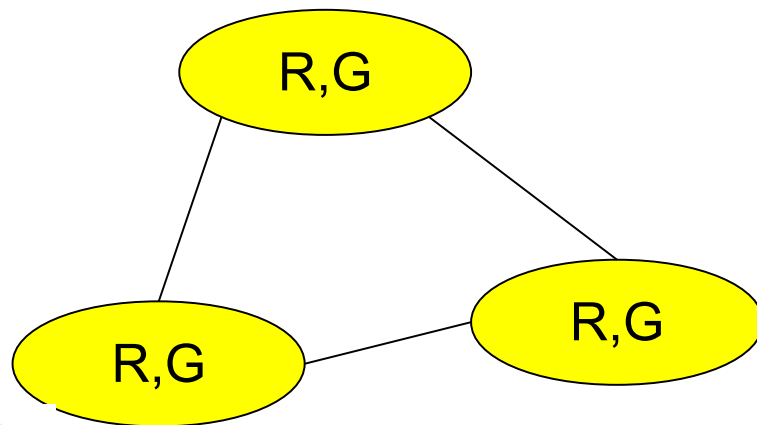
Έλεγχος Συνέπειας



Αδυναμίες Ελέγχου Συνέπειας



Συνεπές, αλλά δεν προσφέρει τίποτα

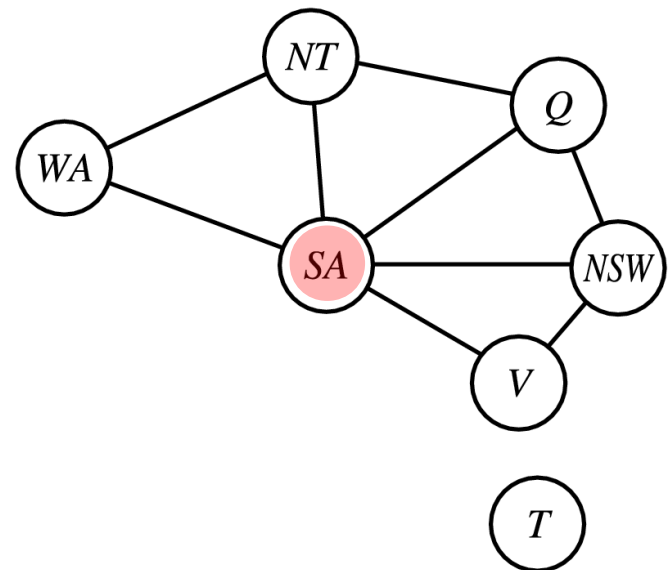


Συνεπές, αν και δεν έχει λύση



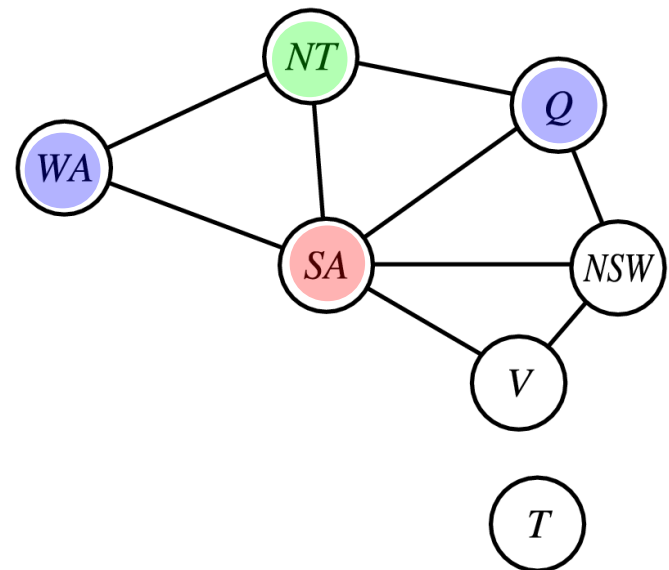
Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (1/4)

- Επιλέγουμε να αναθέσουμε τιμή στην SA , η οποία συμμετέχει σε 5 περιορισμούς. Έστω $SA=κόκκινο$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα πεδία τιμών των υπολοίπων μεταβλητών να τροποποιηθούν ως εξής:
 - $SA=κόκκινο$
 - $WA \in \{\text{πράσινο, μπλε}\}$
 - $NT \in \{\text{πράσινο, μπλε}\}$
 - $Q \in \{\text{πράσινο, μπλε}\}$
 - $NSW \in \{\text{πράσινο, μπλε}\}$
 - $V \in \{\text{πράσινο, μπλε}\}$
 - $T \in \{\text{κόκκινο, πράσινο, μπλε}\}$



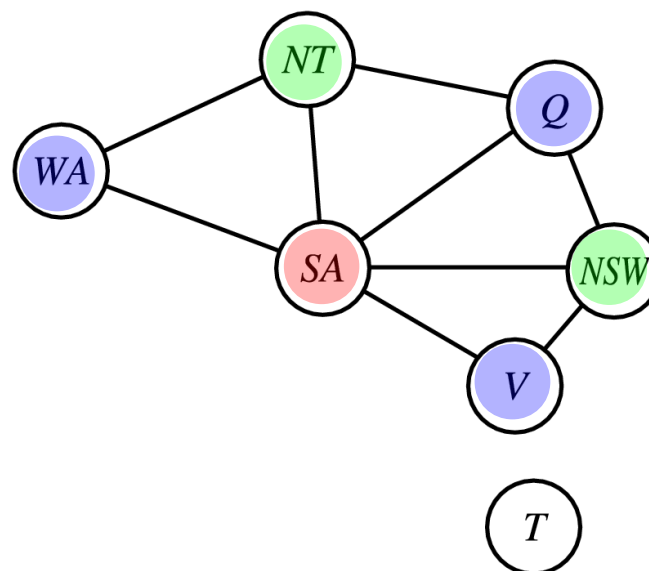
Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (2/4)

- Στη συνέχεια επιλέγουμε την NT , η οποία συμμετέχει σε τρεις περιορισμούς. Έστω $NT = \text{πράσινο}$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα πεδία των υπολοίπων μεταβλητών να τροποποιηθούν ως εξής:
 - $SA = \text{κόκκινο}$
 - $WA = \text{μπλε}$
 - $NT = \text{πράσινο}$
 - $Q = \text{μπλε}$
 - $NSW \in \{\text{πράσινο}, \text{μπλε}\}$
 - $V \in \{\text{πράσινο}, \text{μπλε}\}$
 - $T \in \{\text{κόκκινο}, \text{πράσινο}, \text{μπλε}\}$



Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (3/4)

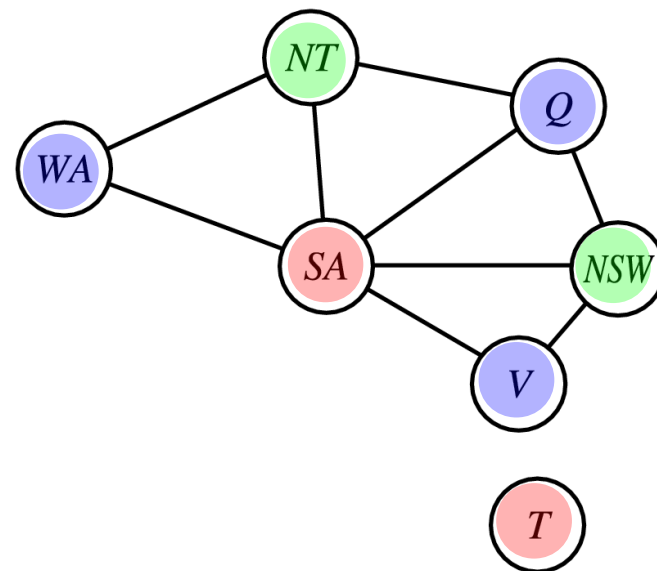
- Το γεγονός ότι η μεταβλητή *WA* πήρε επαγωγικά την τιμή «μπλε» δεν επηρεάζει καμία άλλη μεταβλητή.
- Το γεγονός ότι η μεταβλητή *Q* πήρε επίσης την τιμή «μπλε» επηρεάζει τη μεταβλητή *NSW*, η οποία πλέον παίρνει την τιμή «πράσινο».
- Αυτό με τη σειρά του επηρεάζει τη μεταβλητή *V*, η οποία τελικά παίρνει την τιμή «μπλε».
- Άρα, τα νέα πεδία τιμών των μεταβλητών διαμορφώνονται ως εξής:
 - *SA*=κόκκινο
 - *WA* = μπλε
 - *NT* = πράσινο
 - *Q* = μπλε
 - *NSW* = πράσινο
 - *V* = μπλε
 - $T \in \{\text{κόκκινο, πράσινο, μπλε}\}$



Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (4/4)

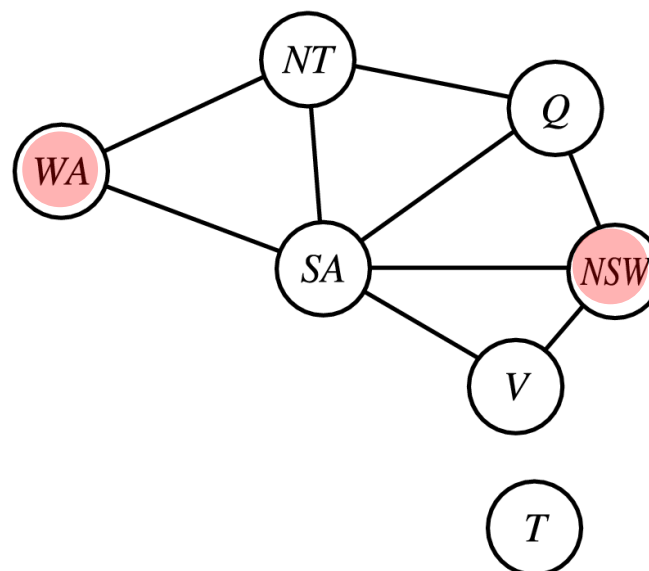
- Με δεδομένο ότι η *T* δεν συμμετέχει σε κανέναν περιορισμό, μπορούμε για τη μεταβλητή αυτή να επιλέξουμε τυχαία μια τιμή από το πεδίο τιμών της.
Έτσι λοιπόν μια δυνατή λύση είναι η εξής:

- *SA* = κόκκινο
- *WA* = μπλε
- *NT* = πράσινο
- *Q* = μπλε
- *NSW* = πράσινο
- *V* = μπλε
- *T* = κόκκινο



Περιορισμοί Ανώτερης Τάξης

- *AllDiff*: Καταμέτρηση του πλήθους των διαφορετικών τιμών των μεταβλητών.
 - π.χ. ο περιορισμός $AllDiff(NT, SA, Q)$ μετά την ανάθεση $\{WA=κόκκινο, NSW=κόκκινο\}$ είναι ασυνεπής.
- K-συνέπεια



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ
ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΗΣ
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ**

SUDOKU

4								
		6	2			1		
7			3					2
8	1	9					6	
	2			7		9		
		8	6		2		9	
	4						7	
				9			4	



4	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	3	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	1	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	8	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

4	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	3	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	1	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	8	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

4	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	3	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	1	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	8	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

4	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	3	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	1	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	8	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

4	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	6	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
7	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	3	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	1	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	8	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

4	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	6	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
7	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	3	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	1	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	8	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

4	1 2 3 5 7 8 9	1 2 3 5 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9
1 2 3 5 7 8 9	1 2 3 5 7 8 9	6	2	1 2 3 4 5 7 8 9	1 2 3 4 5 7 8 9	1	1 2 3 4 5 7 8 9	1 2 3 4 5 7 8 9
7	1 2 3 5 7 8 9	1 2 3 5 7 8 9	3	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	1	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	8	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

4	1 2 3 5 7 8 9	1 2 3 5 7 8 9	1 3 5 6 7 8 9	1 3 5 6 7 8 9	1 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 5 6 7 8 9
1 3 5 7 8 9	1 3 5 7 8 9	6	2	1 3 4 5 7 8 9	1 3 4 5 7 8 9	1	1 3 4 5 7 8 9	1 3 4 5 7 8 9
7	1 2 3 5 7 8 9	1 2 3 5 7 8 9	3	1 3 4 5 6 7 8 9	1 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 7 8 9	1 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	1	9	1 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 7 8 9	1 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	8	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 7 8 9	1 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 7 8 9	1 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9



4	3 5 8 9	1 2 3 5	1 5 7 8 9	1 5 6 8	1 5 6 7 8 9	3 5 6 7 8	3 5 8	3 5 6 7 8 9
3 5 9	3 5 8 9	6	2	4 5 8	4 5 7 8 9	1	3 5 8	3 4 5 7 8 9
7	5 8 9	1 5	3	1 4 5 6 8	1 4 5 6 8 9	4 5 6 8	5 8	2
3 5 6 7	3 5 6 7	3 4 5 7	1 4 5 8 9	1 2 3 4 5 6 8	1 3 4 5 6 8 9	2 3 4 5 7 8	1 2 3 5 8	1 3 4 5 7 8
8	1	9	4 5	2 3 4 5	3 4 5	2 3 4 5 7	6	3 4 5 7
3 5 6	2	3 4 5	1 4 5 8	7	1 3 4 5 6 8	9	1 3 5 8	1 3 4 5 8
1 3 5 7	3 5 7	8	6	1 3 4 5	2	3 5	9	1 3 5
1 2 3 5 6 9	4	1 2 3 5	1 5 8	1 3 5 8	1 3 5 8	2 3 5 6 8	7	1 3 5 6 8
1 2 3 5 6 7	3 5 6 7	1 2 3 5 7	1 5 7 8	9	1 3 5 7 8	2 3 5 6 8	4	1 3 5 6 8

**ΤΕΛΟΣ
ΠΡΩΙΜΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ**



ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

4 3 5 8 9	1 2 3 5	1 5 7 8 9	1 5 6 8	1 5 6 7 8 9	1 5 6 7 8	3 5 6 8	3 5 8	3 5 6 7 8 9
3 5 9	3 5 8 9	6	2	4 5 8	4 5 7 8 9	1	3 5 8	3 4 5 7 8 9
7	5 8 9	1 5	3	1 4 5 6 8	1 4 5 6 8 9	4 5 6 8	5 8	2
3 5 6 7	3 5 6 7	3 4 5 7	1 4 5 8 9	1 2 3 4 5 6 8	1 3 4 5 6 8 9	2 3 4 5 7 8	1 2 3 5 8	1 3 4 5 7 8
8	1	9	4 5	2 3 4 5	3 4 5	2 3 4 5 7	6	3 4 5 7
3 5 6	2	3 4 5	1 4 5 8	7	1 3 4 5 6 8	9	1 3 5 8	1 3 4 5 8
1 3 5	3 5 7	8	6	1 3 4 5	2	3 5	9	1 3 5
1 2 3 5 6 9	4	1 2 3 5	1 5 8	1 3 5 8	1 3 5 8	2 3 5 6 8	7	1 3 5 6 8
1 2 3 5 6	3 5 6 7	1 2 3 5 7	1 5 7 8	9	1 3 5 7 8	2 3 5 6 8	4	1 3 5 6 8



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

4 5 3 8 9	2 1 3 5 6 7 8 9	2 1 3 5 6 7 8 9	2 1 3 5 6 7 8 9	1 5 3 8 9	1 5 3 8 9	1 5 3 8 9	3 5 3 8 9	3 5 3 8 9	3 5 3 8 9
5 5 3 8 9	6 5 3 8 9	2 5 3 8 9	2 5 3 8 9	1 5 3 8 9	4 5 7 8 9	1 5 3 8 9	5 5 3 8 9	4 5 7 8 9	3 5 3 8 9
7 5 3 8 9	1 5 3 8 9	3 5 3 8 9	1 5 3 8 9	4 5 6 8	4 5 6 8	4 5 6 8	5 5 3 8 9	2 5 3 8 9	2 5 3 8 9
3 5 6	3 5 6	3 4 5 7	1 4 5 8 9	1 3 5 6 8	1 3 4 5 6 8 9	3 4 5 7 8	2 4 5 7 8	1 3 4 5 7 8	1 3 4 5 7 8
8 5 6	1 5 6	9 4 5 7	4 5 8 9	2 3 5	3 4 5 7 8	3 4 5 7 8	6 4 5 7 8	4 5 7 8	3 4 5 7 8
3 5 6	2 5 6	3 4 5 7 8	1 4 5 8	7 5 6 8	1 3 4 5 6 8	9 5 3 8	1 3 5 3 8	1 3 4 5 8	1 3 4 5 8
1 3 5	7 5 6	8 4 5 7 8	6 5 3 8 9	4 5 3 8 9	2 5 3 8 9	3 5 3 8 9	9 5 3 8 9	1 3 5 3 8 9	1 3 5 3 8 9
9 5 6	4 5 6	1 3 5	1 5 3 8 9	1 3 5 3 8 9	1 3 5 3 8 9	2 3 5 6 8	7 5 3 8 9	1 3 5 3 8 9	1 3 5 3 8 9
1 2 3 5 6	3 5 6	1 3 5	1 5 3 8 9	9 5 3 8 9	1 3 5 3 8 9	2 3 5 6 8	4 5 3 8 9	1 3 5 3 8 9	1 3 5 3 8 9



ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

4 5 8 9 3	2 5 8 9 3	1 5 7 8 9 1	1 5 6 8 1	1 5 6 7 8 9 1	3 5 6 7 8 3	3 5 8 3	3 5 6 7 8 9 3
5 3 5 8 9	6 5 8 9 3	1 5 1	2 5 8 1	4 5 7 8 9 1	1 4 5 6 8 1	1 4 5 6 8 1	3 4 5 7 8 9 3
7 5 8 9	1 5 1	3 5 6 8 1	1 5 6 8 1	4 5 6 8 9 1	4 5 6 8 1	5 8 1	2 4 5 6 7 8 9 2
3 5 6 3	3 5 6 3	4 5 7 3	1 4 5 8 9 1	1 5 6 8 3	1 4 5 6 8 9 3	3 4 5 7 8 3	2 4 5 7 8 1 3
8 4 5	1 5	9 4 5	4 5	2 3 5 1	4 5 3	4 5 7 3	6 4 5 7 3
3 5 6 3	2 4 5 3	4 5 3	1 4 5 8 1	7 4 5 6 8 1	1 4 5 6 8 3	9 5 8 1	1 4 5 8 3
1 5 3	7 5	8 1 3 5	6 1 3 5 8	4 1 3 5 8	2 1 3 5 8	3 5 3	9 1 3 5
9 1 3 5 6 8	4 1 3 5	1 3 5	1 5 8 1	1 5 8 3	1 5 8 3	2 3 5 6 8 2	7 1 3 5 6 8
1 5 6 1 2 3	3 5 6 3	1 3 5 1	1 5 7 8 1	9 5 7 8 1	1 5 7 8 3	2 3 5 6 8 1	4 1 3 5 6 8



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

4 5 8 9	³ 5 8 9	2	¹ 5 7 8 9	¹ 5 6 8	¹ 5 6 7 8 9	³ 5 6 7 8	³ 5 8	³ 5 6 7 8 9
³ 5	³ 5 8 9	6	2	5 8	4 5 7 8 9	1	³ 5 8	³ 4 5 7 8 9
7	5 8 9	1	3	5 6 8	4 5 6 8 9	4 5 6 8	5 8	2
³ 5 6	³ 5 6	7	¹ 4 5 8 9	¹ ³ 5 6 8	¹ ³ 4 5 6 8 9	³ 4 5 8	2	³ 4 5 8
8	1	9	4 5	2	4 5 ³	³ 4 5 7	6	³ 4 5 7
³ 5 6	2	4 5 ³	4 5 8	7	4 5 6 8	9	1	4 5 ³ 8
¹ ³ 5	7	8	6	4	2	³ 5	9	¹ ³ 5
9	4	5 ³	¹ 5 8	¹ ³ 5 8	¹ ³ 5 8	2	7	¹ ³ 5 6 8
2	³ 5 6	5 ³	¹ 5 7 8	9	¹ ³ 5 7 8	³ 5 6 8	4	¹ ³ 5 6 8



ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

4 5 8 9	³ 5 8 9	2	¹ 5 7 8 9	¹ 5 6 8	¹ 5 6 7 8 9	³ 5 6 7 8	³ 5 8	³ 5 6 7 8 9
³ 5	³ 5 8 9	6	2	5 8	4 5 7 8 9	1	³ 5 8	³ 4 5 7 8 9
7	5 8 9	1	3	5 6 8	4 5 6 8 9	4 5 6 8	5 8	2
³ 5 6	³ 5 6	7	¹ 4 5 8 9	¹ ³ 5 6 8	¹ ³ 4 5 6 8 9	³ 4 5 8	2	³ 4 5 8
8	1	9	4 5	2	4 5 ³	³ 4 5 7	6	³ 4 5 7
³ 5 6	2	³ 4 5	4 5 8	7	³ 4 5 6 8	9	1	³ 4 5 8
³ 5	7	8	6	4	2	³ 5	9	³ 1 5
9	4	³ 5	¹ 5 8	¹ ³ 5 8	¹ ³ 5 8	2	7	³ 1 5 8
2	³ 5 6	³ 5	¹ 5 7 8	9	¹ ³ 5 7 8	³ 5 6 8	4	³ 1 5 6 8



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

4 5 8 9	³ 5 8 9	2	¹ 5 7 8 9	¹ 5 6 8	¹ 5 6 7 8 9	³ 5 6 7 8	³ 5 8	³ 5 7 8 9
³ 5	³ 5 8 9	6	2	5 8	4 5 7 8 9	1	³ 5 8	³ 4 5 7 8 9
7	5 8 9	1	3	5 6 8	4 5 6 8 9	4 5 6 8	5 8	2
³ 5 6	³ 5	7	¹ 4 5 8 9	¹ ³ 5 6 8	¹ ³ 4 5 6 8 9	³ 4 5 8	2	³ 4 5 8
8	1	9	4 5	2	4 5 ³	³ 4 5 7	6	³ 4 5 7
³ 5 6	2	4	5 8	7	³ 5 6 8	9	1	³ 5 8
1	7	8	6	4	2	³ 5	9	³ 5
9	4	³ 5	¹ 5 8	¹ ³ 5 8	¹ ³ 5 8	2	7	6
2	6	³ 5	¹ 5 7 8	9	¹ ³ 5 7 8	³ 5 8	4	¹ ³ 5 8



ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

4 5 8 9	³ 5 8 9	2	¹ 5 7 8 9	¹ 5 6 8	¹ 5 6 7 8 9	³ 5 6 7 8	³ 5 8	³ 5 7 8 9
³ 5	³ 5 8 9	6	2	5 8	4 5 7 8 9	1	³ 5 8	³ 4 5 7 8 9
7	5 8 9	1	3	5 6 8	4 5 6 8 9	4 5 6 8	5 8	2
³ 5 6	³ 5	7	¹ 4 5 8 9	¹ ³ 5 6 8	¹ ³ 4 5 6 8 9	³ 4 5 8	2	³ 4 5 8
8	1	9	4 5	2	4 5 ³	³ 4 5 7	6	³ 4 5 7
³ 5 6	2	4	5 8	7	³ 5 6 8	9	1	³ 5 8
1	7	8	6	4	2	³ 5	9	³ 5
9	4	³ 5	¹ 5 8	¹ ³ 5 8	¹ ³ 5 8	2	7	6
2	6	³ 5	¹ 5 7 8	9	¹ ³ 5 7 8	³ 5 8	4	1 ³ 5 8



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

4 5 8 9	³ 5 8 9	2	¹ 5 7 8 9	¹ 5 6 8	¹ 5 6 7 8 9	³ 5 6 7 8	³ 5 8	³ 5 7 8 9
³ 5	³ 5 8 9	6	2	5 8	4 5 7 8 9	1	³ 5 8	³ 4 5 7 8 9
7	5 8 9	1	3	5 6 8	4 5 6 8 9	4 5 6 8	5 8	2
³ 5 6	³ 5	7	¹ 4 5 8 9	¹ ³ 5 6 8	¹ ³ 4 5 6 8 9	³ 4 5 8	2	³ 4 5 8
8	1	9	4 5	2	4 5 ³	³ 4 5 7	6	³ 4 5 7
³ 5 6	2	4	5 8	7	³ 5 6 8	9	1	³ 5 8
1	7	8	6	4	2	³ 5	9	³ 5
9	4	³ 5	¹ 5 8	¹ ³ 5 8	¹ ³ 5 8	2	7	6
2	6	³ 5	5 7 8	9	³ 5 7 8	³ 5 8	4	1



ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

4	³ 5 8 9	2	¹ 5 7 8 9	¹ 5 6 8	¹ 5 6 7 8 9	³ 5 6 7 8	³ 5 8	³ 5 7 8 9
³ 5	³ 5 8 9	6	2	5 8	4 5 7 8 9	1	³ 5 8	³ 4 5 7 8 9
7	5 8 9	1	3	5 6 8	4 5 6 8 9	4 5 6 8	5 8	2
³ 5 6	³ 5	7	¹ 4 5 8 9	¹ ³ 5 6 8	¹ ³ 4 5 6 8 9	³ 4 5 8	2	³ 4 5 8
8	1	9	4 5	2	4 5 ³	³ 4 5 7	6	³ 4 5 7
³ 5 6	2	4	5 8	7	³ 5 6 8	9	1	³ 5 8
1	7	8	6	4	2	³ 5	9	³ 5
9	4	³ 5	¹ 5 8	¹ ³ 5 8	¹ ³ 5 8	2	7	6
2	6	³ 5	5 7 8	9	³ 5 7 8	³ 5 8	4	1



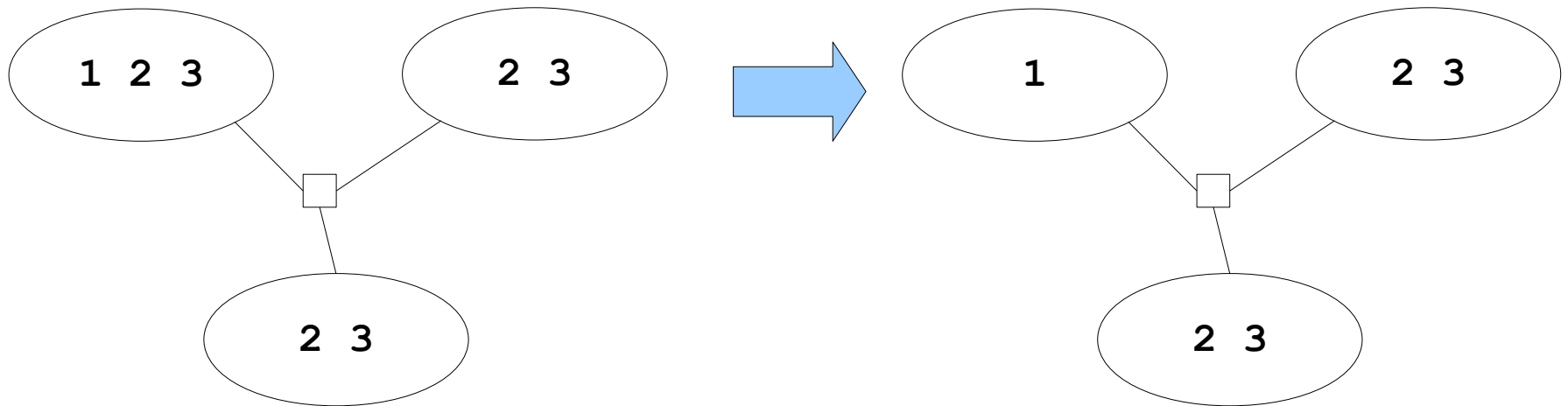
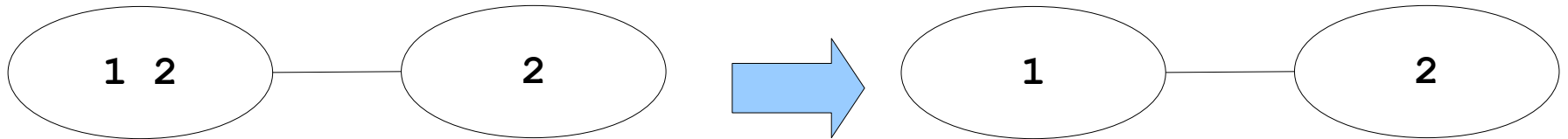
**ΤΕΛΟΣ
ΠΡΩΙΜΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ**

**ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ
ΑΛΛΕΣ ΜΟΝΑΔΙΚΕΣ
ΤΙΜΕΣ**

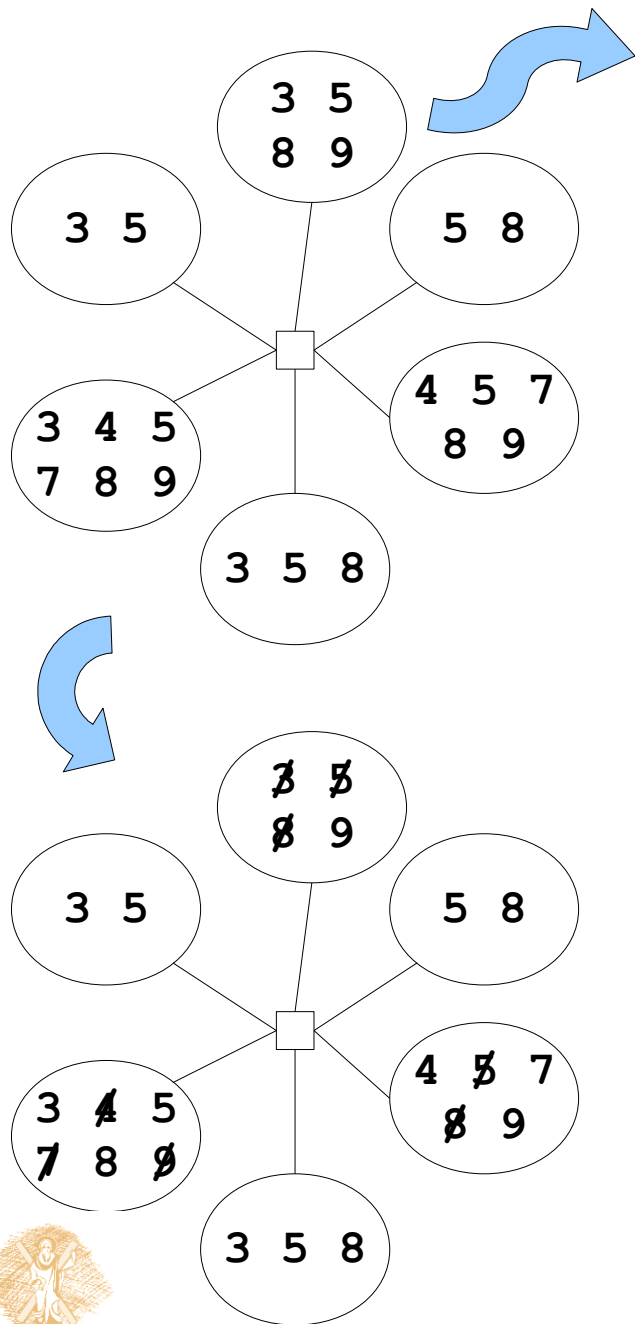
4 5 8 9	³ 5 8 9	2	¹ 5 7 8 9	¹ 5 6 8	¹ 5 6 7 8 9	³ 5 6 7	³ 5 8	³ 5 7 8 9
³ 5	³ 5 8 9	6	2	5 8	4 5 7 8 9	1	³ 5 8	³ 4 5 7 8 9
7	5 8 9	1	3	5 6 8	4 5 6 8 9	4 5 6	5 8	2
³ 5 6	³ 5	7	¹ 4 5 8 9	¹ ³ 5 6 8	¹ ³ 4 5 6 8 9	³ 4 5	2	³ 4 5 8
8	1	9	4 5	2	4 5 ³	³ 4 5 7	6	³ 4 5 7
³ 5 6	2	4	5 8	7	³ 5 6 8	9	1	³ 5 8
1	7	8	6	4	2	³ 5	9	³ 5
9	4	³ 5	¹ 5 8	¹ ³ 5 8	¹ ³ 5 8	2	7	6
2	6	³ 5	5 7	9	³ 5 7	8	4	1



Συνέπεια Τόξου



ΣΥΝΕΠΕΙΑ ΤΟΞΟΥ



4	³ 5 8 9	2	¹ 5 7 8 9	¹ 5 6 8	¹ 5 6 7 8 9	³ 5 6 7	³ 5 8	³ 5 7 8 9
³ 5	³ 5 8 9	6	2	5 8	4 5 7 8 9	1	³ 5 8	4 5 7 8 9
7	5 8 9	1	3	5 6 8	4 5 6 8 9	4 5 6	5 8	2
³ 5 6	³ 5	7	¹ 4 5 8 9	^{1 3} 5 6 8	^{1 3} 4 5 6 8 9	³ 4 5	2	³ 4 5 8
8	1	9	4 5	2	4 5 3	4 5 7 3	6	4 5 7 3
³ 5 6	2	4	5 8	7	5 6 8 3	9	1	5 8 3
1	7	8	6	4	2	³ 5	9	³ 5
9	4	³ 5	¹ 5 8	^{1 3} 5 8	^{1 3} 5 8	2	7	6
2	6	³ 5	5 7	9	5 7 3	8	4	1



ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

& ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΝΕΠΕΙΑΣ ΤΟΞΟΥ

4 <small>5 8</small> ³	2	<small>1 5 7 8 9</small> ¹	<small>1 5 6 8</small> ¹	<small>1 5 6 7 8 9</small> ¹	<small>6 7</small> ³	<small>5 8</small> ³	7	9
<small>5</small> ³	9	6	2	<small>5 8</small>	<small>4 7</small>	1	<small>5 8</small> ³	<small>4 7</small>
7	<small>5 8</small>	1	3	<small>5 8</small>	<small>4 5 6 8 9</small>	<small>4 6</small>	<small>5 8</small>	2
<small>5 6</small> ³	<small>5</small> ³	7	<small>1 4 5 8 9</small> ¹	<small>1 3 5 6 8</small> ¹	<small>1 3 4 5 6 8 9</small> ¹	<small>4 5</small> ³	2	<small>4 5 8</small> ³
8	1	9	<small>4 5</small>	2	<small>4 5</small> ³	<small>4 5 7</small> ³	6	<small>4 5 7</small> ³
<small>5 6</small> ³	2	4	<small>5 8</small>	7	<small>5 6 8</small> ³	9	1	<small>5 8</small> ³
1	7	8	6	4	2	<small>5</small> ³	9	<small>5</small> ³
9	4	<small>5</small> ³	<small>1 5 8</small> ¹	<small>1 3 5 8</small> ¹	<small>1 3 5 8</small> ¹	2	7	6
2	6	<small>5</small> ³	<small>5 7</small>	9	<small>5 7</small> ³	8	4	1



4	³ 5 8	2	¹ 5 7 8	¹ 5 8	¹ 5 7 8	7	³ 5 8	9
³ 5	9	6	2	⁵ 8	4	1	³ 5 8	4
7	⁵ 8	1	3	6	4	4	⁵ 8	2
³ 5 6	³ 5	7	¹ 4 5 8	^{1 3} 5 8	^{1 3} 4 5 6 8 9	³ 4 5	2	³ 4 5 8
8	1	9	4 5	2	³ 4 5	³ 4 5 7	6	³ 4 5 7
³ 5 6	2	4	⁵ 8	7	³ 5 6 8	9	1	³ 5 8
1	7	8	6	4	2	³ 5	9	³ 5
9	4	³ 5	¹ 5 8	^{1 3} 5 8	^{1 3} 5 8	2	7	6
2	6	³ 5	⁵ 7	9	³ 5 7	8	4	1



4	³ ₅ 8	2	¹ ₅ 7 8	¹ ₅ 8	¹ ₅ 7 8	6	³ ₅ 8	9
³ ₅	9	6	2	⁵ ₈	4	1	³ ₅ 8	7
7	⁵ ₈	1	3	6	9	4	⁵ ₈	2
³ ₅ 6	³ ₅	7	9	¹ ₅ 8	³ ₅ 6	³ ₅	2	³ ₄ 5 8
8	1	9	⁴ ₅	2	³ ₅	7	6	³ ₄ 5
³ ₅ 6	2	4	⁵ ₈	7	³ ₅ 6 8	9	1	³ ₅ 8
1	7	8	6	4	2	³ ₅	9	³ ₅
9	4	³ ₅	¹ ₅ 8	¹ ₅ 8	³ ₁ 5 8	2	7	6
2	6	³ ₅	⁵ ₇	9	³ ₅ 7	8	4	1



4	³ ₅ 8	2	¹ ₅ 7 8	¹ ₅ 8	¹ ₅ 7 8	6	³ ₅ 8	9
³ ₅	9	6	2	⁵ ₈	4	1	³ ₅ 8	7
7	⁵ ₈	1	3	6	9	4	⁵ ₈	2
6	³ ₅	7	9	¹ ₈	¹ ₈	³ ₅	2	⁴ ₈
8	1	9	4	2	³ ₅	7	6	³ ₅
³ ₅	2	4	⁵ ₈	7	³ ₅ 6	9	1	³ ₅ 8
1	7	8	6	4	2	³ ₅	9	³ ₅
9	4	³ ₅	¹ ₅ 8	¹ ₅ 8	³ ₁ 5 8	2	7	6
2	6	³ ₅	⁵ ₇	9	³ ₅ 7	8	4	1



4	³ ₅ 8	2	¹ ₇ 8	¹ ₅ 8	¹ ₅ 7 8	6	³ ₅ 8	9	
5	9	6	2	⁵ 8	4	1	³ ₅ 8	7	
7	⁵ 8	1	3	6	9	4	⁵ 8	2	
6	³ 5	7	9	¹ 8	¹ 8	³ ₅	2	4	
8	1	9	4	2	³	7	6	³ 5	
3	2	4	5	7	6	9	1	8	
1	7	8	6	4	2	³ ₅	9	³ ₅	
9	4	³ ₅	¹ 8	¹ ₅ 8	³ 5 8	¹ ₅ 8	2	7	6
2	6	³ ₅	7	9	³ ₅ 7	8	4	1	



4	³ 8	2	¹ 8	¹ 5 8	¹ 5 8	6	⁵ 8	9
5	9	6	2	⁸	4	1	3	7
7	⁸	1	3	6	9	4	⁵ 8	2
6	5	7	9	¹ 8	¹ 8	³	2	4
8	1	9	4	2	3	7	6	5
3	2	4	5	7	6	9	1	8
1	7	8	6	4	2	⁵ ³	9	⁵
9	4	⁵	¹ 8	3	¹ 5 8	2	7	6
2	6	⁵ ³	7	9	⁵	8	4	1



4	3	2	¹	¹ 5	7	6	8	9
5	9	6	2	8	4	1	3	7
7	8	1	3	6	9	4	5	2
6	5	7	9	¹	¹	3	2	4
8	1	9	4	2	3	7	6	5
3	2	4	5	7	6	9	1	8
1	7	8	6	4	2	5	9	3
9	4	5	¹	3	¹	2	7	6
2	6	3	7	9	5	8	4	1



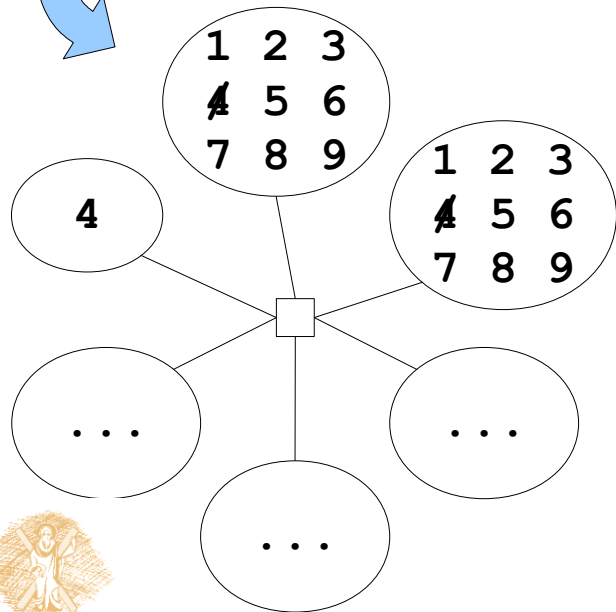
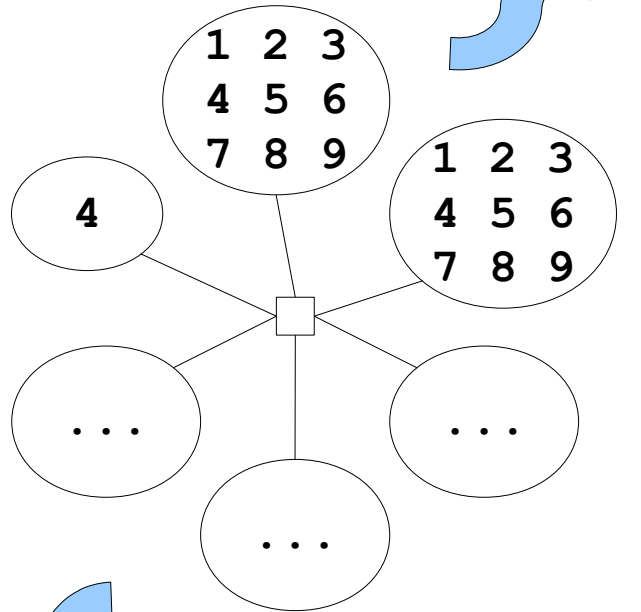
4	3	2	1	5	7	6	8	9
5	9	6	2	8	4	1	3	7
7	8	1	3	6	9	4	5	2
6	5	7	9	1	8	3	2	4
8	1	9	4	2	3	7	6	5
3	2	4	5	7	6	9	1	8
1	7	8	6	4	2	5	9	3
9	4	5	8	3	1	2	7	6
2	6	3	7	9	5	8	4	1



Ο Πρώιμος Έλεγχος και ο
Εντοπισμός Μοναδικών Τιμών
είναι ειδικές περιπτώσεις
συνέπειας τόξου

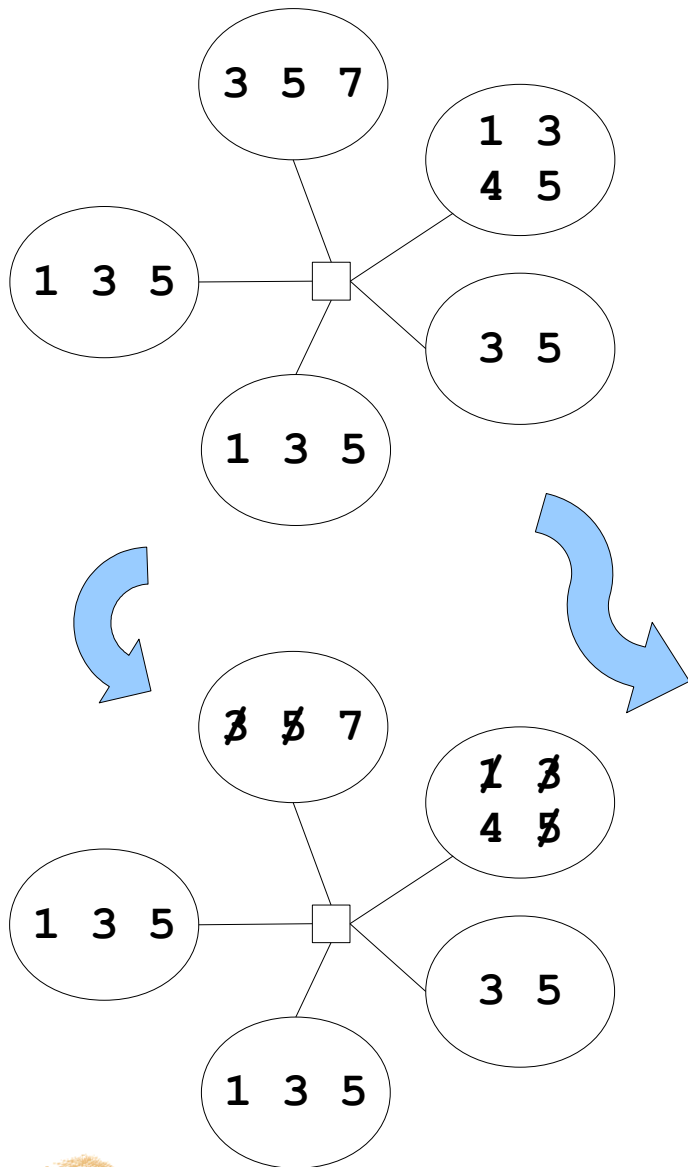


ΠΡΩΙΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ



4	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1	1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	1	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	8	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	7	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9

ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ



4 5 8 9	3 5 8 9	1 2 3 5	1 5 7 8 9	1 5 6 8	1 5 6 7 8 9	3 5 6 7 8	3 5 8	3 5 6 7 8 9
3 5 9	3 5 8 9	6	2	4 5 8	4 5 7 8 9	1	3 5 8	3 4 5 7 8 9
7	5 8 9	1 5	3	1 4 5 6 8	1 4 5 6 8 9	4 5 6 8	5 8	2
3 5 6 7	3 5 6 7	3 4 5 7	1 4 5 8 9	1 2 3 4 5 6 8	1 3 4 5 6 8 9	2 3 4 5 7 8	1 2 3 5 8	1 3 4 5 7 8
8	1	9	4 5	2 3 4 5	3 4 5	2 3 4 5 7	6	3 4 5 7
3 5 6	2	4 5 3	1 4 5 8	7	1 3 4 5 6 8	9	1 3 5 8	1 3 4 5 8
1 3 5	3 5 7	8	6	1 3 4 5 8	2	3 5	9	1 3 5
1 2 3 5 6 9	4	1 2 3 5	1 5 8	1 3 5 8	1 3 5 8	2 3 5 6 8	7	1 3 5 6 8
1 2 3 5 6 7	3 5 6 7	1 2 3 5 7	1 5 7 8	9	1 3 5 7 8	2 3 5 6 8	4	1 3 5 6 8



Άσκηση

Έστω ένα πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού πέντε εργασιών, κάθε μία από τις οποίες έχει διάρκεια μία ημέρα. Κάθε εργασία πρέπει να τελειώσει την ημέρα που άρχισε. Δεν μπορεί να διακοπεί και να συνεχίσει την επόμενη ημέρα. Επιτρέπεται δυο ή περισσότερες εργασίες να εκτελούνται ταυτόχρονα. Όλες οι εργασίες θα πρέπει να εκτελεσθούν εντός τεσσάρων ημερών.

Θεωρήστε τις εργασίες ως ακέραιες μεταβλητές (A, B, C, D και E) με πεδίο τιμών το $\{1, 2, 3, 4\}$. Οι τιμές ουσιαστικά δηλώνουν σε ποιά από τις τέσσερις ημέρες θα εκτελεστεί η κάθε εργασία. Επιπλέον, πρέπει να ισχύουν οι εξής περιορισμοί:

- Η εργασία C δεν μπορεί να εκτελεστεί την ίδια μέρα με την D , ούτε με την A .
- Η εργασία E πρέπει να εκτελεστεί πριν τις C και D (τουλάχιστον 1 ημέρα νωρίτερα).
- Η εργασία B πρέπει να εκτελεστεί μετά τις C και D (τουλάχιστον 1 ημέρα μετά).
- Το άθροισμα $E+A$ πρέπει να είναι άρτιο.

Σχεδιάστε το γράφημα περιορισμών του προβλήματος και στη συνέχεια λύστε το με τη βοήθεια κατάλληλης μεθόδου διάδοσης περιορισμών. Αν υπάρχουν περισσότερες από μια λύσεις στο πρόβλημα, βρείτε τις όλες.



Άσκηση

Έστω οι πόλεις Α, Β, Γ, Δ και Ε, σε κάθε μία από τις οποίες πρόκειται να τοποθετηθεί ένας πομπός που θα εκπέμπει σε συγκεκριμένη ραδιοσυχνότητα. Οι διαθέσιμες ραδιοσυχνότητες είναι {1010 KHz, 1020 KHz, 1030 KHz, 1040 KHz}. Οι ραδιοσυχνότητες θα πρέπει να διανεμηθούν στις πόλεις με τέτοιο τρόπο ώστε οι πομποί να μην αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Για το σκοπό αυτό (και με βάση τα γεωγραφικά δεδομένα του προβλήματος) έχει φτιαχτεί ο παρακάτω πίνακας διαχωρισμού που δείχνει για κάθε ζεύγος πόλεων την ελάχιστη διαφορά συχνότητας που πρέπει να έχουν οι πομποί τους ώστε να μην υπάρχει αλληλεπίδραση.

	A	B	Γ	Δ	Ε
A	-	20 KHz	20 KHz	10 KHz	30 KHz
B	20 KHz	-	10 KHz	10 KHz	10 KHz
Γ	20 KHz	10 KHz	-	10 KHz	0 KHz
Δ	10 KHz	10 KHz	10 KHz	-	10 KHz
Ε	30 KHz	10 KHz	0 KHz	10 KHz	-

(Πχ. το 20 KHz μεταξύ Α και Β σημαίνει ότι οι συχνότητες των πομπών στις πόλεις Α και Β θα πρέπει να διαφέρουν κατά 20 KHz ή περισσότερο.)

Σχεδιάστε το γράφημα περιορισμών του προβλήματος και στη συνέχεια λύστε το με τη βοήθεια κατάλληλης μεθόδου διάδοσης περιορισμών. Αν υπάρχουν περισσότερες από μια λύσεις στο πρόβλημα, βρείτε τις όλες.



Άσκηση

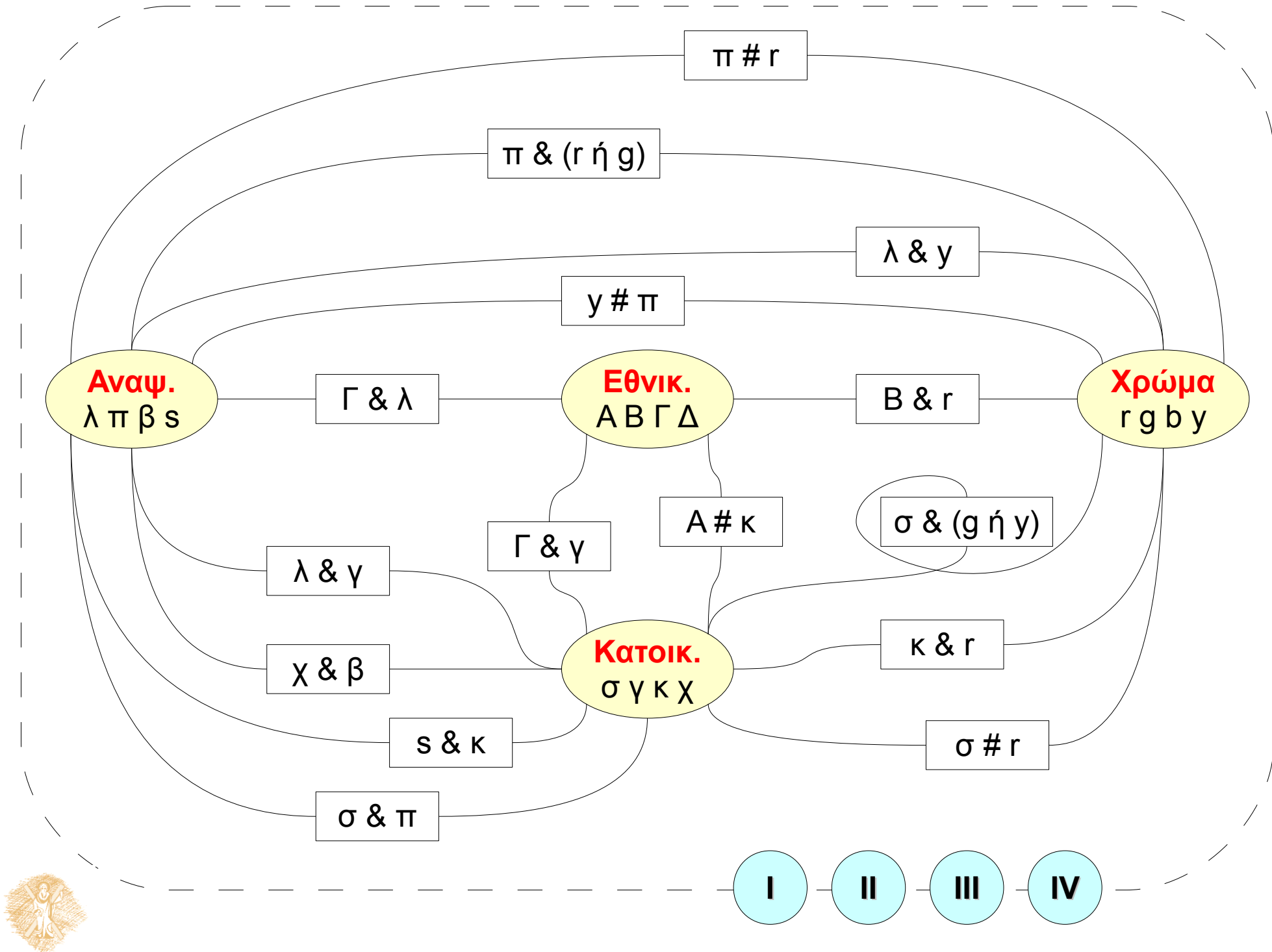
Ένας Άγγλος, ένας Βέλγος, ένας Γάλλος κι ένας Δανός μένουν ο καθένας σε σπίτι διαφορετικού χρώματος από τους υπόλοιπους, έχουν από ένα διαφορετικό κατοικίδιο ζώο και συνηθίζουν να πίνουν διαφορετικό αναψυκτικό ο καθένας. Θεωρήστε ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

- 1. Ο Άγγλος δεν έχει καναρίνι.*
- 2. Ο Βέλγος μένει στο κόκκινο σπίτι.*
- 3. Ο Γάλλος έχει γάτα και πίνει λεμονάδα.*
- 4. Αν κάποιος μένει σε κίτρινο σπίτι, δεν πίνει πορτοκαλάδα.*
- 5. Όποιος έχει χρυσόψαρο πίνει βυσσινάδα.*
- 6. Αν κάποιος πίνει σόδα, τότε έχει καναρίνι.*
- 7. Όποιος έχει σκύλο μένει σε πράσινο ή σε κίτρινο σπίτι.*
- 8. Αν κάποιος πίνει λεμονάδα, μένει σε κίτρινο σπίτι.*
- 9. Όποιος πίνει ποτροκαλάδα μένει σε κόκκινο ή σε πράσινο σπίτι.*
- 10. Όποιος έχει καναρίνι μένει σε κόκκινο σπίτι.*
- 11. Αν κάποιος έχει σκύλο τότε πίνει πορτοκαλάδα και δεν μένει σε κόκκινο σπίτι.*

Βρείτε:

- α) Ποιός πίνει σόδα;**
- β) Ποιό κατοικίδιο βρίσκεται στο μπλε σπίτι;**





Zebra Puzzle (Einstein's Puzzle)

5.13 Consider the following logic puzzle: In five houses, each with a different color, live 5 persons of different nationalities, each of whom prefer a different brand of cigarette, a different drink, and a different pet. Given the following facts, the question to answer is “Where does the zebra live, and in which house do they drink water?”

The Englishman lives in the red house.

The Spaniard owns the dog.

The Norwegian lives in the first house on the left.

Kools are smoked in the yellow house.

The man who smokes Chesterfields lives in the house next to the man with the fox.

The Norwegian lives next to the blue house.

The Winston smoker owns snails.

The Lucky Strike smoker drinks orange juice.

The Ukrainian drinks tea.

The Japanese smokes Parliaments.

Kools are smoked in the house next to the house where the horse is kept.

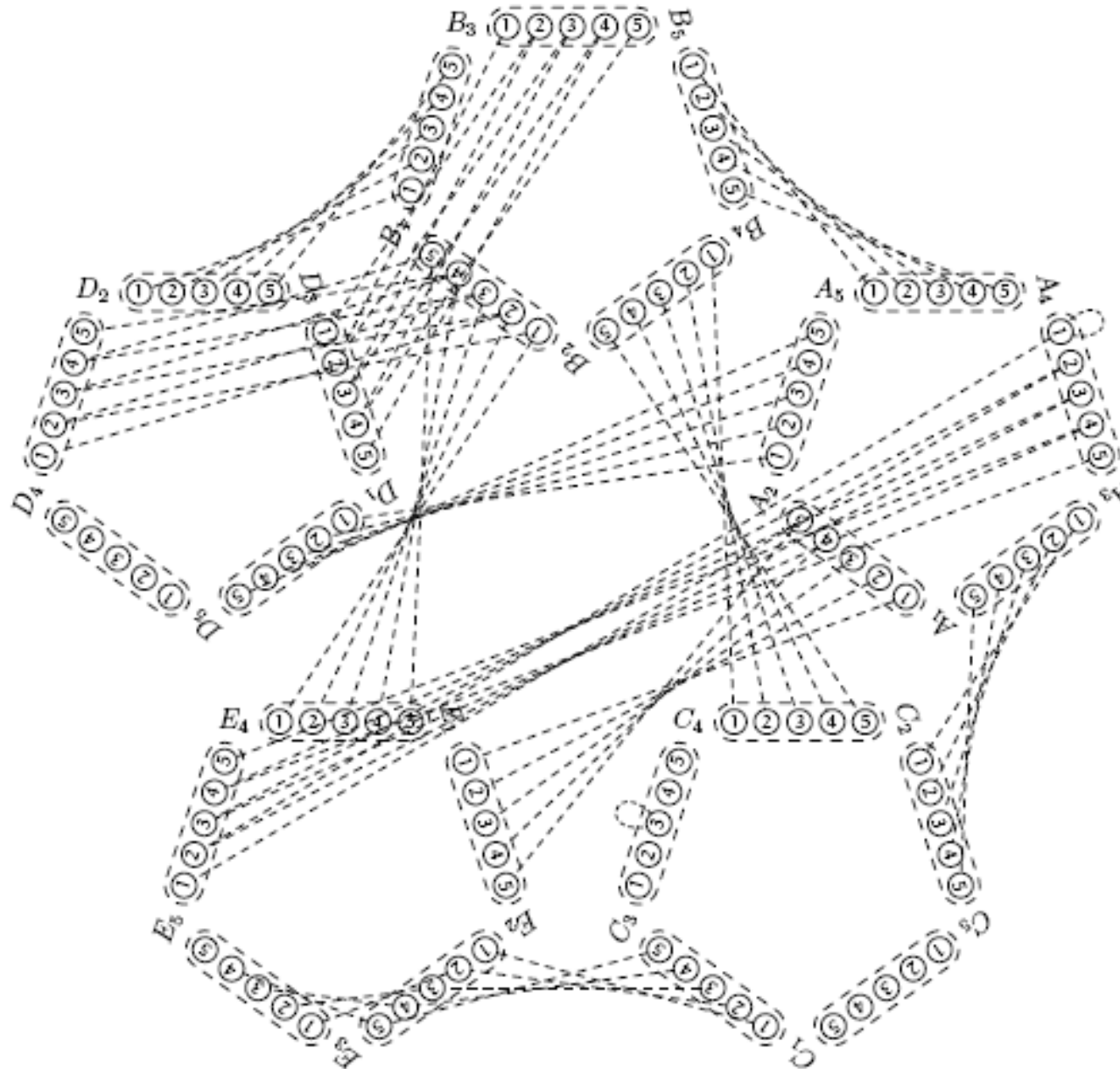
Coffee is drunk in the green house.

The Green house is immediately to the right (your right) of the ivory house.

Milk is drunk in the middle house.

Discuss different representations of this problem as a CSP. Why would one prefer one representation over another?

Ενδεικτικό Διάγραμμα Περιορισμών



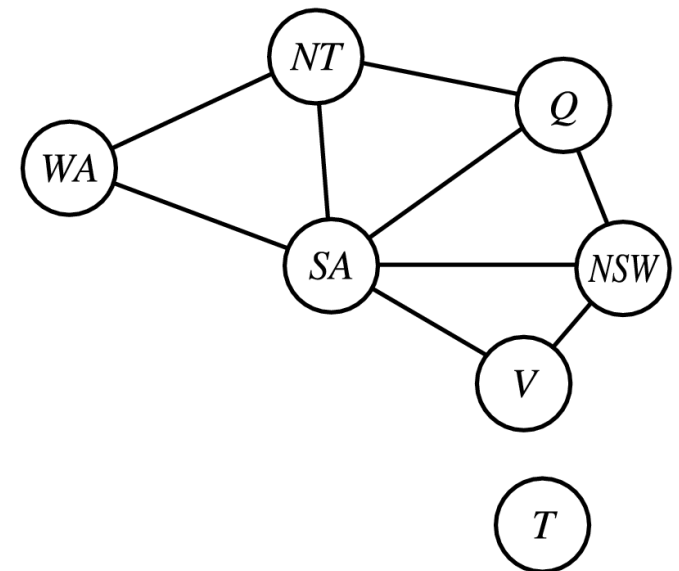
Ειδικοί περιορισμοί

- Περιορισμοί πόρων
 - π.χ. για $atmost(10, A, B, C, D)$:
 - αν κάθε μεταβλητή έχει πεδίο $\{3, 4, 5, 6\}$, το πρόβλημα είναι ασυνεπές.
 - αν κάθε μεταβλητή έχει πεδίο $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, πρέπει να αφαιρεθεί η τιμή 6 από όλες τις μεταβλητές.
- Διάδοση φραγμάτων
 - Πτήση271 = $[0, 165]$, Πτήση272 = $[0, 385]$
 - Πτήση271+Πτήση272 = $[420, 420]$
 - Πτήση271 = $[35, 165]$, Πτήση272 = $[255, 385]$



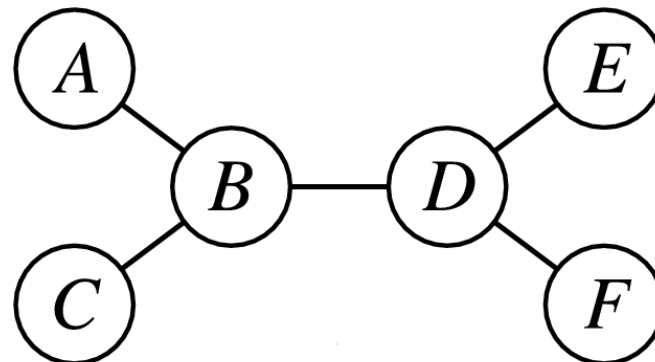
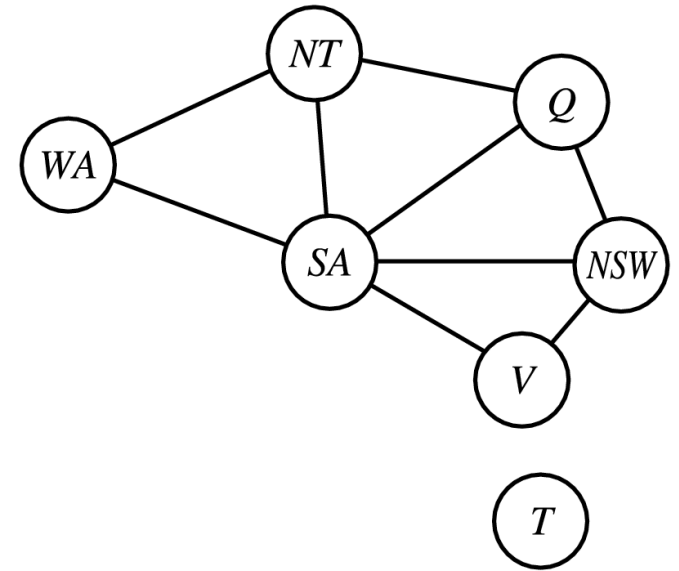
Υπαναχώρηση με άλμα (backjumping)

- Εναλλακτική μέθοδος του πρώιμου ελέγχου.
- Για κάθε μεταβλητή Y διατηρούμε ένα σύνολο άλλων μεταβλητών στις οποίες ανατέθηκαν τιμές, και εξαιτίας των οποίων αφαιρέθηκαν τιμές από το πεδίο της Y .
 - Σύνολο συγκρούσεων (conflict set)
- Εάν το πεδίο της Y αδειάσει, ο αλγόριθμος υπαναχωρεί στην πιο πρόσφατη μεταβλητή του συνόλου συγκρούσεων της Y .
- Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε παραγάγει τη μερική ανάθεση τιμών $\{Q = \text{κόκκινο}, NSW = \text{πράσινο}, V = \text{μπλε}, T = \text{κόκκινο}\}$ και πρέπει να επιλέξουμε τιμή για την SA .
 - Το σύνολο συγκρούσεων της SA είναι το $\{Q, NSW, V\}$.



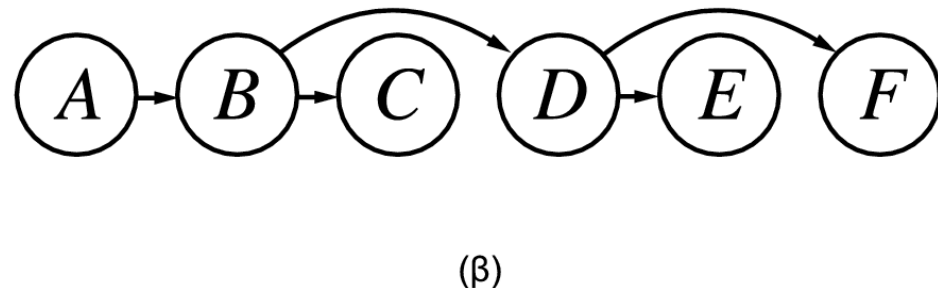
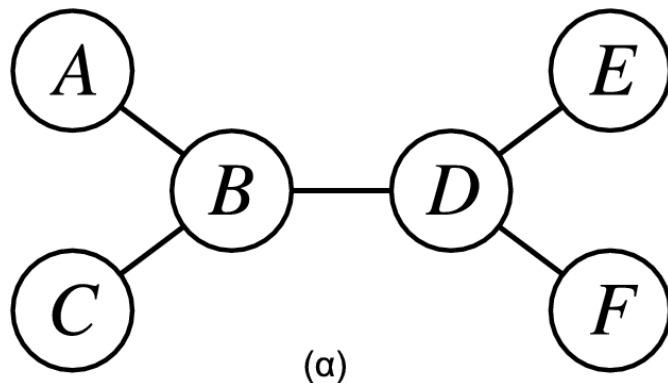
Μορφές προβλημάτων

- Ανεξάρτητα υποπροβλήματα
 - Η πολυπλοκότητα εξαρτάται εκθετικά από το μέγεθος των υποπροβλημάτων και όχι από το μέγεθος του αρχικού.
- Συνδεδεμένες συνιστώσες
- Ακυκλικά γραφήματα περιορισμών
 - Οποιοδήποτε πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών με δομή δένδρου μπορεί να επιλυθεί σε χρόνο γραμμικό ως προς τον αριθμό των μεταβλητών.



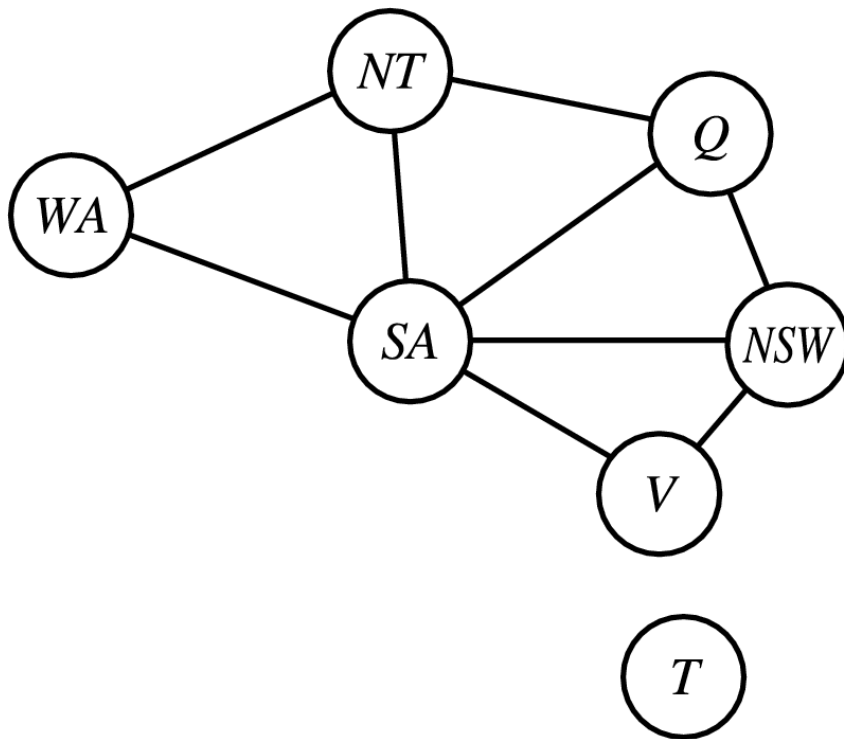
Επίλυση για δένδρα περιορισμών

- Επιλέγεται μια οποιαδήποτε μεταβλητή ως ρίζα του δένδρου, και οι μεταβλητές διατάσσονται από τη ρίζα προς τα φύλλα με τέτοιον τρόπο ώστε ο γονέας κάθε κόμβου του δένδρου να προηγείται στη διάταξη. Ονομάζονται οι μεταβλητές X_1, \dots, X_n με τη σειρά. Κάθε μεταβλητή εκτός από τη ρίζα έχει ακριβώς μία μεταβλητή γονέα.
- Για τις τιμές j από το n μέχρι το 2, εφαρμόζεται έλεγχος συνέπειας τόξου στο τόξο (X_i, X_j) , όπου η X_i είναι ο γονέας της X_j , με αφαίρεση τιμών από το πεδίο ορισμού $\text{Domain}[X_j]$ όπου χρειάζεται.
- Για τις τιμές j από το 1 μέχρι το n , ανατίθεται στη X_j οποιαδήποτε τιμή είναι συνεπής με την τιμή που ανατέθηκε στη X_i , όπου η X_i είναι ο γονέας της X_j .

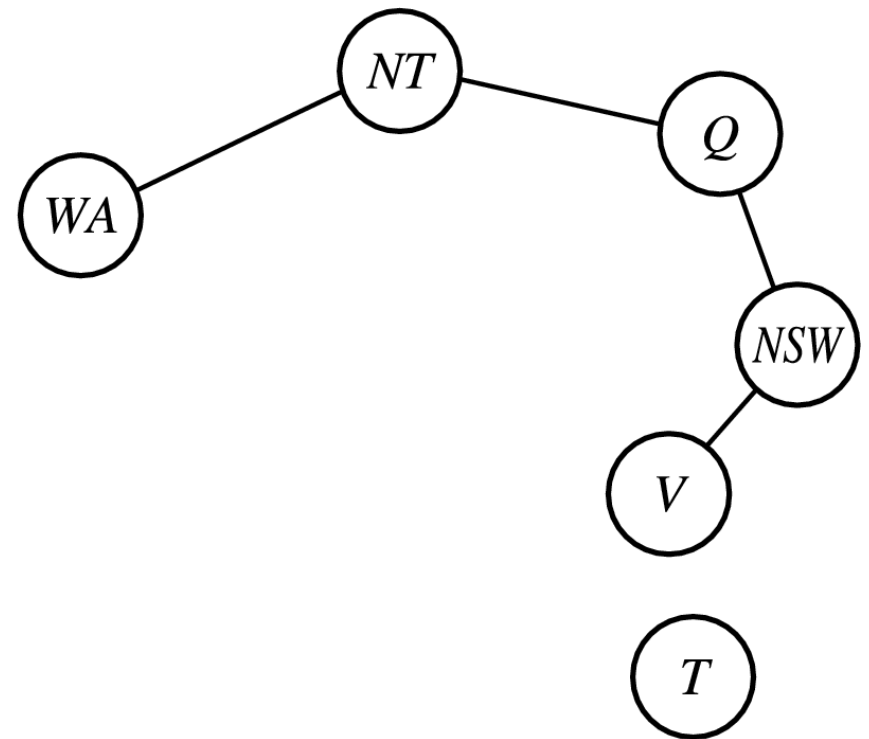


Μετατροπή σε δένδρα με αφαίρεση μεταβλητών (1/2)

- Επιλέγουμε ένα σύνολο μεταβλητών, που αν αφαιρεθούν, μετατρέπουν το γράφημα περιορισμών σε δένδρο.
 - Σύνολο αποκοπής κύκλων (cycle cutset)



(α)



(β)

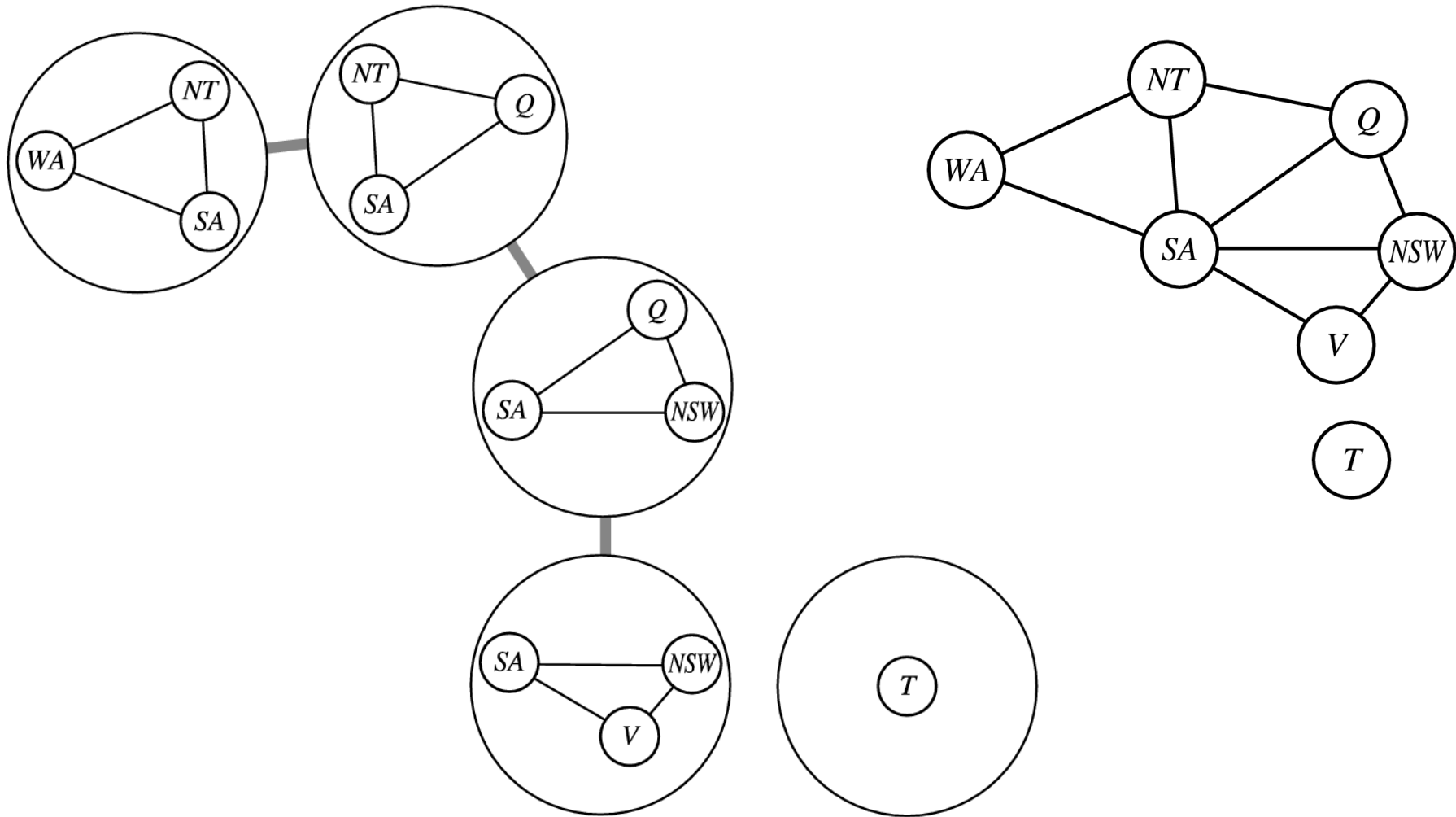


Μετατροπή σε δένδρα με αφαίρεση μεταβλητών (2/2)

- Έστω S το **σύνολο αποκοπής κύκλων**.
- Για κάθε δυνατή ανάθεση τιμών στις μεταβλητές του S που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς για το S ,
 - (α) αφαιρούνται από τα πεδία ορισμού των υπόλοιπων μεταβλητών οποιεσδήποτε τιμές είναι ασυνεπείς με την ανάθεση τιμών του S , και
 - (β) αν το πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών που απομένει έχει λύση, αυτή επιστρέφεται μαζί με την ανάθεση τιμών του S .
- Η εύρεση του μικρότερου συνόλου αποκοπής κύκλων είναι NP-δύσκολη.
 - Δεν είναι απαραίτητο να βρούμε το μικρότερο S .



Αποσύνθεση δένδρου (1/2)

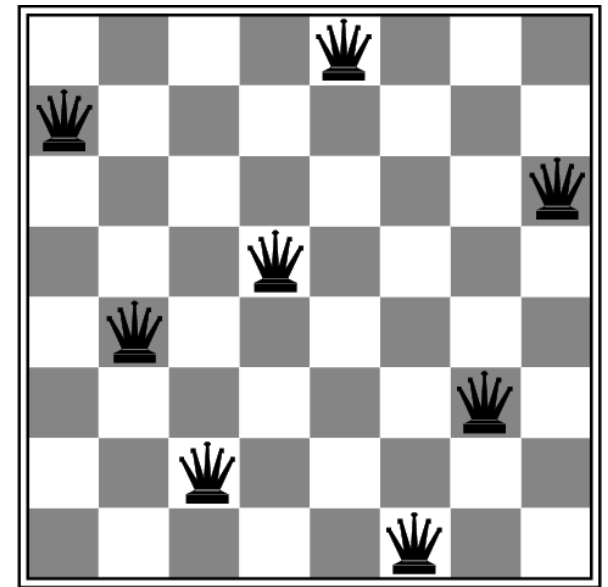
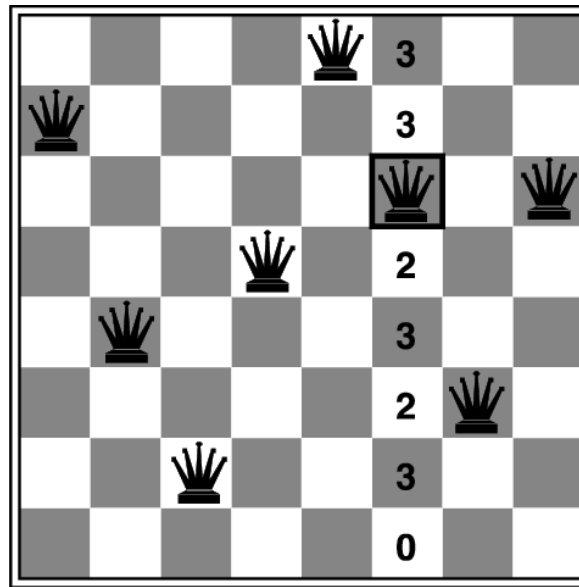
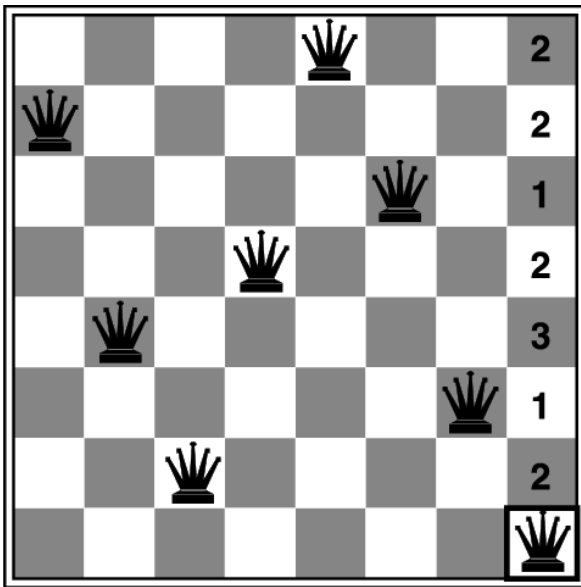


Αποσύνθεση δένδρου (2/2)

- Κατασκευή αποσύνθεσης δένδρου:
 - Κάθε μεταβλητή του αρχικού προβλήματος εμφανίζεται σε τουλάχιστον ένα από τα υποπροβλήματα.
 - Αν δύο μεταβλητές συνδέονται με έναν περιορισμό στο αρχικό πρόβλημα, πρέπει να βρίσκονται μαζί (και μαζί με τον περιορισμό) σε τουλάχιστον ένα από τα υποπροβλήματα.
 - Αν μια μεταβλητή εμφανίζεται σε δύο υποπροβλήματα στο δένδρο, πρέπει να εμφανίζεται και σε κάθε υποπρόβλημα κατά μήκος της διαδρομής που συνδέει αυτά τα υποπροβλήματα.
- Εύρεση λύσης:
 - Βρίσκονται όλες οι λύσεις για κάθε υποπρόβλημα.
 - Τα υποπροβλήματα θεωρούνται υπερ-μεταβλητές, με πεδία ορισμού τις λύσεις τους και περιορισμό το ότι οι λύσεις γειτονικών υποπροβλημάτων πρέπει να συμφωνούν στις κοινές μεταβλητές.



Τοπική αναζήτηση στα προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών



Μέθοδος Ελαχίστων Συγκρούσεων (Min Conflicts)

- Ιδιαίτερα αποτελεσματική μέθοδος (αν και όχι πλήρης).
- Κατάλληλη και για online προβλήματα, όπου μικρές αλλαγές στο περιβάλλον οδηγούν σε νέες λύσεις με μικρές διαφοροποιήσεις από τις προηγούμενες.



Σύγκριση Αποτελεσματικότητας Αλγορίθμων CS

Problem	Backtracking	BT+MRV	Forward Checking	FC+MRV	Min-Conflicts
USA	(> 1,000K)	(> 1,000K)	2K	60	64
<i>n</i> -Queens	(> 40,000K)	13,500K	(> 40,000K)	817K	4K
Zebra	3,859K	1K	35K	0.5K	2K
Random 1	415K	3K	26K	2K	
Random 2	942K	27K	77K	15K	



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση **1.0** διαθέσιμη [εδώ](#).

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Σγάρμπας Κυριάκος. «Τεχνητή Νοημοσύνη Ι, Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>



Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες