# Τεχνητή Νοημοσύνη Ι

## Ενότητα 7:Προτασιακή Λογική

Πέππας Παύλος
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

# Σκοποί ενότητας

Προτασιακή Λογική

# Περιεχόμενα ενότητας

- Προτασιακή λογική

# Προτασιακή Λογική

# Τυπικά Συστήματα

*Αλφάβητο:* p, q, t, C, -

*Αρχικά Strings (Αξιώματα)*:

-p-q--

-t-q-

*Κανόνας (Παραγωγής) 1*:
Αν τα *x*, *y*, *z* είναι strings από παύλες και το *x*p*y*q*z* είναι θεώρημα, τότε και το -*x*p*y*q*z*- είναι θεώρημα.

*Κανόνας (Παραγωγής) 2*:
Αν τα *x*, *y*, *z* είναι strings από παύλες και το *x*p*y*q*z* είναι θεώρημα, τότε και το *x*p*y*-q*z*- είναι θεώρημα.

*Κανόνας (Παραγωγής) 3*:
Αν το *x* είναι string από παύλες και το *x*t-q*x* είναι θεώρημα, τότε και το -*x*t-q*x*- είναι θεώρημα.

*Κανόνας (Παραγωγής) 4*:
Αν τα *x*, *y*, *z* είναι strings από παύλες και το *x*t*y*q*z* είναι θεώρημα, τότε και το *x*t*y*-q*z**x* είναι θεώρημα.

*Κανόνας (Παραγωγής) 5*:
Αν τα *x*, *y*, *z* είναι strings από παύλες και το *x*-t*y*-q*z* είναι θεώρημα, τότε και το C*z* είναι θεώρημα.

# Συλλογισμός

Ο Ναπολέων ήταν Γερμανός
**Εάν** ο Ναπολέων ήταν Γερμανός **τότε** ο Ναπολέων ήταν Ευρωπαίος $\models$ Ο Ναπολέων ήταν Ευρωπαίος

Ο Κώστας είναι ψηλός
**Εάν** ο Κώστας είναι ψηλός **τότε** ο Κώστας είναι όμορφος $\models$ Ο Κώστας είναι όμορφος

苏格拉底是哲学家
**Εάν** 苏格拉底是哲学家 **τότε** 飞驴 $\models$ 飞驴

---

Η ορθότητα του συλλογισμού εξαρτάται (σε πολλές περιπτώσεις) από την *δομή* και όχι από το *περιεχόμενο* της επιχειρηματολογίας.

π.χ.
Αν ξέρουμε, $p \rightarrow q$ και $p$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε το $q$ χωρίς να είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τι αναπαριστούν τα $p$, $q$.

# Προτασιακή Λογική

# Συντακτικό

- **Αλφάβητο**

  $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, (, ), p, q, r, . . .

- **Προτάσεις (Well Formed Formulas ή wff)**
  - Αν x είναι προτασιακή μεταβλητή τότε είναι και πρόταση
  - Αν τα x, y είναι προτάσεις, τότε είναι προτάσεις και τα:

    $\neg x$, $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$, $(x \rightarrow y)$, $(x \leftrightarrow y)$

- **Παραδείγματα προτάσεων**

  $(p \wedge q) \rightarrow r$

  $((p \wedge r) \vee \neg q) \wedge (\neg r \rightarrow q)$

# Πίνακες αληθείας

| $x$ | $y$ | $x \wedge y$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

| $x$ | $y$ | $x \rightarrow y$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

| $x$ | $y$ | $x \leftrightarrow y$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

| $x$ | $\neg x$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

# Άσκηση

Στη σύγκλητο της αρχαίας Ρώμης, οι τρεις ύποπτοι για το φόνο του Ιούλιου Καίσαρα δηλώνουν:

Μάρκος Αντώνιος: «Το έκανε ο Κάσσιος ή ο Βρούτος (ή και οι δύο)»

Κάσσιος: «Δεν το έκανα εγώ. Ο Μάρκος Αντώνιος λέει ψέματα.»

Βρούτος: «Αν το έκανα εγώ τότε οι άλλοι δύο είναι συνένοχοί μου»

Υποθέτοντας ότι οι αθώοι λένε πάντα την αλήθεια, ενώ οι ένοχοι πάντα ψέματα και ότι μόνο ένας από τους τρεις λέει αλήθεια, ποιος (ή ποιοι) σκότωσε τον Ιούλιο Καίσαρα;

# Ορισμοί

**Αποτίμηση** είναι μία συνάρτηση α από το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών στο σύνολο {true, false}.

Π.χ. Μια αποτίμηση για τις μεταβλητές της πρότασης (p V r) $\rightarrow$ $\neg$r που καθιστά την πρόταση false είναι η α(ρ)=F και α(r)=F.

**Έγκυρη** είναι μία πρόταση που είναι αληθής για οποιαδήποτε αποτίμηση.

Π.χ. η πρόταση (πχ η πρόταση (p$\cap$q) $\rightarrow$ q είναι έγκυρη.

***Αντίφαση*** είναι μια πρόταση που είναι ψευδής για οποιαδήποτε αποτίμηση

Π.χ. η πρόταση (p $\cap$ $\neg$p) είναι αντίφαση.

# Ορισμοί (2)

Μια αποτίμηση α <u>**ικανοποιεί**</u> ένα σύνολο προτάσεων Τ αν $\alpha(x) = \text{true}$ για κάθε $x \in T$.

Ένα σύνολο προτάσεων Τ είναι <u>**ικανοποιήσιμο**</u> αν υπάρχει αποτίμηση που το ικανοποιεί:

- Π.χ. το $T=\{(p \vee r)\rightarrow\neg r, (p \cap r) \leftrightarrow \neg q, p\}$ είναι ικανοποιήσιμο, ενώ το $S=\{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Ένα σύνολο προτάσεων Τ <u>**λογικά συνεπάγεται**</u> μια πρόταση x (γράφουμε $T \vDash x$) αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το Τ ικανοποιεί και την x.

- Π.χ. $\{(p \vee r)\rightarrow\neg r, (p \cap r)\leftrightarrow\neg q, p\} \vDash \boldsymbol{\neg r}$

Δύο προτάσεις x, y είναι ***λογικά ισοδύναμες*** (γράφουμε $x \equiv y$ ) αν οι αποτιμήσεις που ικανοποιούν την x ταυτίζονται με τις αποτιμήσεις που ικανοποιούν την y.

# Ασκήσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι έγκυρες και ποιες είναι αντιφάσεις:

   -$p \rightarrow (q \rightarrow p)$

   -$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \cap \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

   -$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow q)$

2. Να δείξετε ότι μια πρόταση x είναι έγκυρη αν η $\neg x$ είναι αντίφαση.
3. Να δείξετε ότι $\{p \rightarrow (q \rightarrow r), q\} \vDash p \rightarrow r$
4. Να δείξετε ότι $T \vDash x$ αν το σύνολο $T \cup \{\neg x\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.
5. Να δείξετε ότι $(p \cap q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

# Conjunctive Normal Form (CNF)

- ***Literal*** ονομάζουμε μια προτασιακή μεταβλητή ή την άρνηση μιας προτασιακής μεταβλητής. Π.χ. Τα $p$, $\neg q$ είναι literals ενώ το $\neg\neg p$ δεν είναι.
- **Clause** ονομάζουμε μία διάζευξη από literals (π.χ. $p \vee \neg q \vee \neg r$ )
- Μια πρόταση είναι σε ***ConjuncHve Normal Form (CNF)*** αν αποτελεί σύζευξη από clauses. Για παράδειγμα η πρόταση $(p \vee \neg q \vee \neg r) \cap (\neg p \vee q) \cap r$ είναι σε CNF.

# Conjunctive Normal Form (CNF) (2)

**<u>Χρήσιμες Ισοδυναμίες</u>**

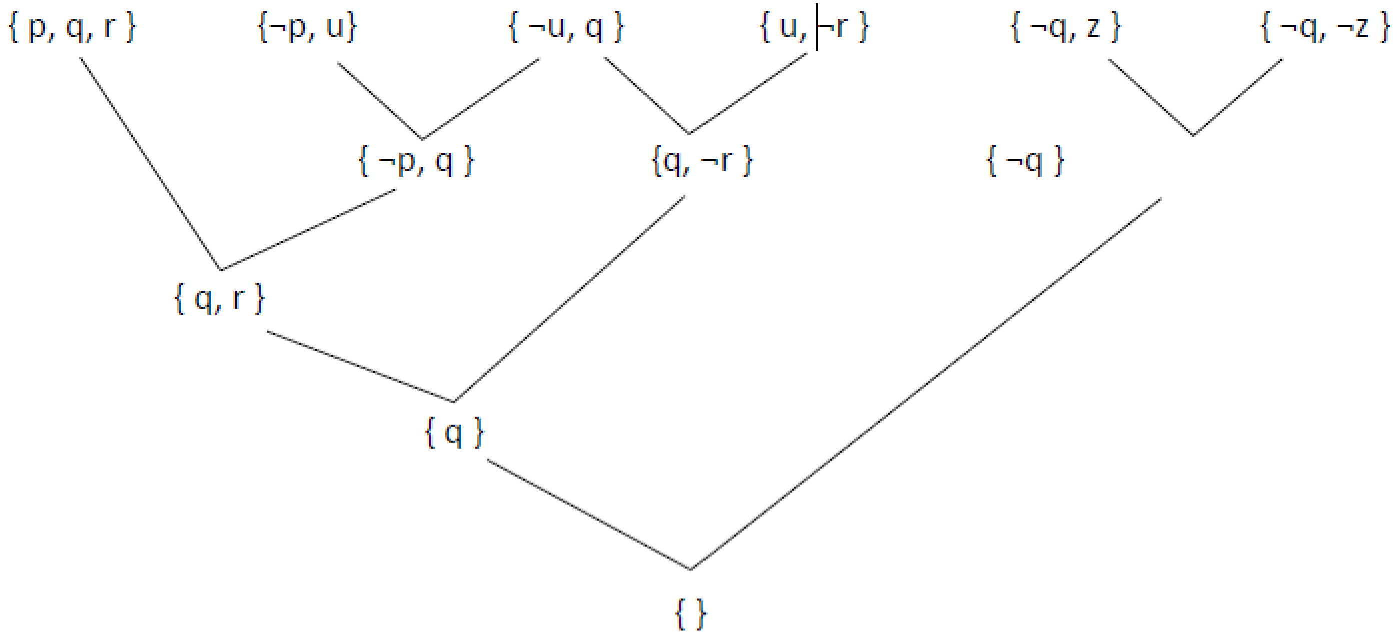
1. $\neg(x \wedge y) \equiv (\neg x \vee \neg y)$
2. $\neg(x \vee y) \equiv (\neg x \wedge \neg y)$
3. $\neg\neg x \equiv x$
4. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
5. $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
6. $x \rightarrow y \equiv \neg x \vee y$
7. $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

**<u>Θεώρημα:</u>**
Οποιαδήποτε πρόταση x μπορεί να μετατραπεί σε μια λογικά ισοδύναμη πρόταση y σε CNF, με την χρήση των παραπάνω ισοδυναμιών.

**<u>Άσκηση</u>**
Μετατρέψτε τις παρακάτω προτάσεις σε CNF:

- $(p \rightarrow q) \vee (\neg r \leftrightarrow q)$
- $(p \vee r) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \wedge q))$
- $\neg(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee r)$

# Resolution



# Resolution (2)

***Είσοδος***: Ένα σύνολο T από claues.

***Έξοδος***: YES ή NO ανάλογα με το αν το T είναι ικανοποιήσιμο.

***Αλγόριθμος***:

1. Για κάθε ζεύγος clauses x, y τέτοια ώστε να υπάρχει προτασιακή μεταβλητή p, με p∈x και ¬p∈y, προσθέτουμε στο T το clause (x- {p}) ∪ (y- {¬p}), εφόσον το νέο clause δεν είναι έγκυρο.

2. Επαναλαμβάνουμε το βήμα (1) μέχρι να μην μπορούν να προστεθούν νέα clauses στο T.

3. Αν κατά την παραπάνω διαδικασία προκύψει το κενό σύνολο απαντάμε NO (το T δεν είναι ικανοποιήσιμο), αλλιώς απαντάμε YES.

# Ασκήσεις

Χρησιμοποιήστε resolution για να προσδιορίσετε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ικανοποιήσιμα:

- $T = \{ \{ p, q, r \}, \{\neg p, u\}, \{ \neg u, q \}, \{ q, \neg r \}, \{ \neg q, z \}, \{ \neg q, \neg u, \neg z \}, \{ \neg q, u, \neg z \}, \{\neg p, \neg q\} \}$
- $S = \{ \{ p \}, \{ \neg r \}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, q\}, \{q, r\} \}$
- $K = \{ \{p, z, w\}, \{p, q, z\}, \{\neg p, z, \neg w\}, \{\neg p, \neg r, \neg w\}, \{\neg p, \neg r, z\}, \{q, r, \neg z\}, \{r, z, w\}, \{\neg q\}, \{\neg r\} \}$

# Horn Clauses

Ένα clause ονομάζεται ***Horn*** αν έχει το πολύ ένα θετικό literal.

***Π.χ.***

- Προτασιακά Horn clauses: {¬p, ¬q, r }, {¬p, ¬z } , { ¬r }, { z }
- Πρωτοβάθμια Horn clauses: {¬On(x,y), table(c) }, { Green(a) } , { ¬P(x, f(a)), Q(g(f(c)), y) }
- Clauses που δεν είναι Horn: {¬p, ¬q, ¬u, r, z }

Ένα Horn clause λέγεται ***αρνητικό*** αν όλα τα literals που περιέχει είναι αρνητικά (πχ, {¬p, ¬z }). Διαφορετικά λέγεται ***θετικό*** (πχ, {¬p, ¬z, r }).

# SLD Resolution

| | |
|---|---|
| Toddler | { Toddler } |
| Toddler → Child | { ¬Toddler, Child } |
| Child∧Male → Boy | { ¬Child, ¬Male, Boy} |
| Infant → Child | { ¬Infant, Child } |
| Child∧Female → Girl | { ¬Child, ¬Female, Girl } |
| Female | { Female } |

Θέλουμε να αποδείξουμε πως από την βάση μας προκύπτει το Girl. Προσθέτουμε την άρνησή του και καταλήγουμε στο empty clause μέσω **SLD resolution**:

{ ¬Girl } ← { ¬Child, ¬Female, Girl }
↓
{ ¬Child, ¬Female } ← { ¬Toddler, Child }
↓
{ ¬Toddler, ¬Female } ← { Toddler }
↓
{ ¬Female } ← { Female }
↓
{ }

# Backward Chaining

**Είσοδος**: μια λίστα ατομικών προτάσεων $q_1, \ldots, q_n$
**Έξοδος**: YES or NO ανάλογα με το αν η βάση συνεπάγεται ταυτολογικά όλα τα $q_i$

prodecure SOLVE[$q_1, \ldots, q_n$]

if n=0 then return YES

for each clause c in KB, do

if $c = \{q_1, \neg p_1 \ldots, \neg p_m\}$ and SOLVE[$p_1, \ldots, p_m, q_2, \ldots, q_n$]

then return YES

end for

return NO

# Backward Chaining - Παράδειγμα

| | | |
|---|---|---|
| Toddler | | { Toddler } |
| Toddler → Child | | { ¬Toddler, Child } |
| Child∧Male → Boy | ⇨ | { ¬Child, ¬Male, Boy} |
| Infant → Child | | { ¬Infant, Child } |
| Child∧Female → Girl | | { ¬Child, ¬Female, Girl } |
| Female | | { Female } |

Θέλουμε να αποδείξουμε πως από την βάση μας προκύπτει το Girl:

1. SOLVE [ Girl ]
2. SOLVE [ Child, Female ]
3. SOLVE [ Toddler, Female ]
4. SOLVE [ Female ]
5. SOLVE [ ]

**ΠΡΟΣΟΧΗ**: - Κίνδυνος για ατέρμονες βρόγχους.
- Ακόμα και όταν ο αλγόριθμος τερματίζει, υπάρχει κίνδυνος για εκθετικό χρόνο.

# Forward Chaining

**Είσοδος**: μια λίστα ατομικών προτάσεων $q_1, \ldots, q_n$
**Έξοδος**: YES or NO ανάλογα με το αν η βάση συνεπάγεται ταυτολογικά όλα τα $q_i$

1. Αν όλα τα $q_i$ έχουν επιλυθεί, τότε επέστρεψε YES.

2. Έλεγξε αν υπάρχει clause $\{p, \neg p_1 \ldots, \neg p_m\}$ στην βάση τέτοιο ώστε όλα τα $p_i$ να έχουν επιλυθεί, χωρίς ωστόσο να έχει επιλυθεί το p.

3. Αν υπάρχει τέτοιο clause στην βάση, καταχώρησε την επίλυση του p, και πήγαινε στο βήμα-1.

4. Διαφορετικά απάντησε NO.

# Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Σγάρμπας Κυριάκος. «Τεχνητή Νοημοσύνη Ι, Προτασιακή Λογική». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

**Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες**