1^o ΘΕΜΑ [6.0 βαθμοί]

Έστω συνεχές σύστημα $\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = A\bar{x} + B\bar{u}$

$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}$

1.1 [1 β] Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα ***A***;

Με το ακόλουθο partinioning του πίνακα $A = \left[\begin{array}{c|cccc|c} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ οι ιδιοτιμές του είναι

$\text{eig(A)} = \text{eig}([-5]) \cup \text{eig}(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}) \cup \text{eig}([-2])$. Οι ιδιοτιμές του 3×3 canonical-πίνακα είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης όπως προκύπτει από την τελευταία γραμμή του ή $\text{roots}(s^3 + 5s^2 + 4s + 0 = 0) = s(s+1)(s+4) = \{0,-1,-4\}$. Οπότε οι 5 (πέντε) ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι $\{-5\} \cup \{0,-1,-4\} \cup \{-2\}$.

1.2 [1 β] Βρείτε τις συναρτήσεις μεταφοράς $G_i(s), i = 1,2,3$ έτσι ώστε $Y(s) = \sum_{i=1}^{3} G_i(s)U_i(s)$

Επειδή $G_i(s) = C(sI - A)^{-1} B_i$, όπου B_i είναι η i-οστή στήλη του πίνακα B: α) η πρώτη είσοδος έχει $G_1(s) = 0$ επειδή $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, β) η δεύτερη είσοδος επηρεάζει μόνο το μεσαίο 3×3 πίνακα και

$G_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Επειδή η όλη αναπαράσταση είναι σε controller canonical form, η συνάρτηση μεταφοράς εξάγεται άμεσα ως $G_2(s) = 3\frac{1s^2 + 1s + 0}{s^3 + 5s^2 + 4s + 0} = 3\frac{(s+1)s}{(s+1)(s+4)s} = \frac{3}{s+4}$, γ) η τρίτη είσοδος επηρεάζει μόνο τον κάτω δεξιά 1×1 πίνακα $G_3(s) = [1](sI - [-2])^{-1}[1] = \frac{1}{s+2}$

1.3 [1 β] Υπολογίστε νόμο ελέγχου $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{r}$ έτσι ώστε οι ελέγξιμοι πόλοι του συστήματος να είναι στις θέσεις -1, -3, -4, και -2.

Επειδή η πρώτη είσοδος υπεισέρχεται μέσω του πίνακα μηδενικού διανύσματος B_1, δεν επηρεάζει τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Θέτω $k_1 = 0$ για να μην επηρεαστεί και από τις άλλες εισόδους λόγω του όρου k_1. Η τρίτη είσοδος επηρεάζει μόνο τον πόλο που ανήκει στον κάτω δεξιά πίνακα, ο οποίος από την συνάρτηση μεταφοράς είναι στο -2. Αν επιλέξω να παραμείνει ό ίδιος πόλος για αυτό το τμήμα, τότε δεν χρειάζεται να τον μετακινήσω και $k_5 = 0$. Η δεύτερη είσοδος θα πρέπει να μετακινήσει τους 3 πόλους της $G_2(s)$-συνάρτησης μεταφοράς έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα νέο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $D^d(s) = (s+1)(s+3)(s+4) = s^3 + 8s^2 + 19s + 12$. Επειδή

$D^d(s) = \left(s^3 + 5s^2 + 4s + 0\right) - 3\left(k_4 s^2 + k_3 s + k_2\right)$, τότε

$$\begin{bmatrix} k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (-12+0) & (-19+4) & (-8+5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Τονίζεται ότι αυτός δεν είναι ο μοναδικός συνδυασμός (υπάρχουν 4 συνδυασμοί) κερδών αφού μπορεί να επιλεγεί για τον κάτω δεξιά πίνακα αντί του πόλου στο -2, οποιοσδήποτε άλλος από τους -1,-3 και -4.

1.4 [1 β] Υπολογίστε την συνάρτηση μεταφοράς $\dfrac{Y(s)}{\tilde{R}(s)} = G(s)$.

Με βάση τα προαναφερθέντα $G(s) = \dfrac{3(s^2+s)}{\left(s^3+8s^2+19s+12\right)} + \dfrac{1}{s+2} = \dfrac{4s^3+17s^2+25s+12}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$

1.5 [1 β] Έστω $\tilde{r}(t) = H\ r(t)$ όπου $r(t)$ μία βηματική είσοδος. Να υπολογιστεί το κέρδος H έτσι ώστε $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$.

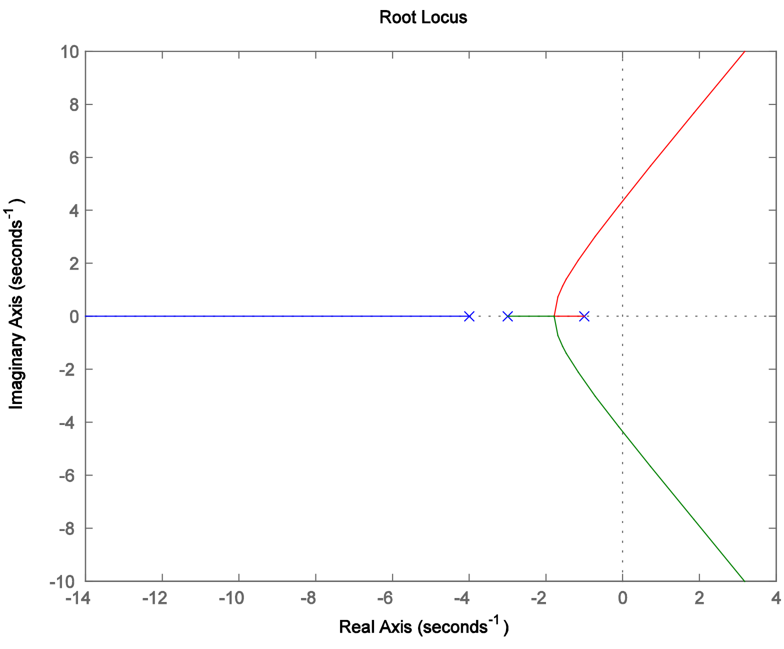
Επειδή $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1 = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sR(s)HG(s) = \lim_{s\to 0} s\dfrac{1}{s}HG(s) = H\dfrac{12}{24}$. Οπότε $H = 2$

1.6 [1 β] Έστω ότι εφαρμόζεται ο νόμος ελέγχου από το ερώτημα 1.3, αλλά $u_1 = u_3 = 0$, δηλαδή

$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\overline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\tilde{r}$ και υποθέστε την αλλαγή του στοιχείου (4,2) του πίνακα A από 0 σε -0-γ. Δείξτε τους πόλους του κλειστού συστήματος καθώς το γ μεταβάλλεται. Ποια είναι τα όρια του γ για τα οποία το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές;

Το ονομαστικό κλειστό σύστημα σε αυτή την περίπτωση έχει $G(s) = \dfrac{3(s^2+s)}{\left(s^3+8s^2+19s+12\right)}$. Η διαφορά έγκειται στο ότι αν αλλαχθεί το (4,2) στοιχείο από 0 σε 0-γ, τότε η συνάρτηση μεταφοράς θα αλλάξει σε

$s^3+8s^2+19s+12+\gamma = 0$ ή $1+\dfrac{\gamma}{s^3+8s^2+19s+12} = 0$ ή $1+\dfrac{\gamma}{(s+1)(s+3)(s+4)} = 0$ Οι πόλοι του κλειστού συστήματος καθώς το γ μεταβάλλεται προκύπτει από τον Γεωμετρικό τόπο των ριζών για το σύστημα $\dfrac{1}{(s+1)(s+3)(s+4)}$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα για $\gamma \geq 0$



.

Είτε από τον ΓΤΡ, είτε από το κριτήριο Routh μπορούν να υπολογιστούν τα όρια για το γ. Για το συγκεκριμένο σύστημα το κριτήριο Routh έχει τον ακόλουθο πίνακα

s^3	1	19
s^2	8	$12+\gamma$
s^1	$-\dfrac{(12+\gamma)-8\times 19}{8}$	
s^0	$12+\gamma$	

, όπου προκύπτει ότι για να έχουμε ευστάθεια $-12 \le \gamma \le 140$.

Όμοια και εδώ τονίζεται ότι ανάλογα με το ποιοι πόλοι επελέγησαν για τον 3×3 πίνακα τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά.

2ο ΘΕΜΑ [2.0 βαθμοί]

2.1 [1 β] Έστω συνεχές σύστημα $\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \overline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = A\overline{x} + Bu$ και $\overline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overline{x}$

Υπολογίστε την έκφραση της εξόδου του συστήματος *y(t)* για οποιαδήποτε είσοδο $u(t)$.

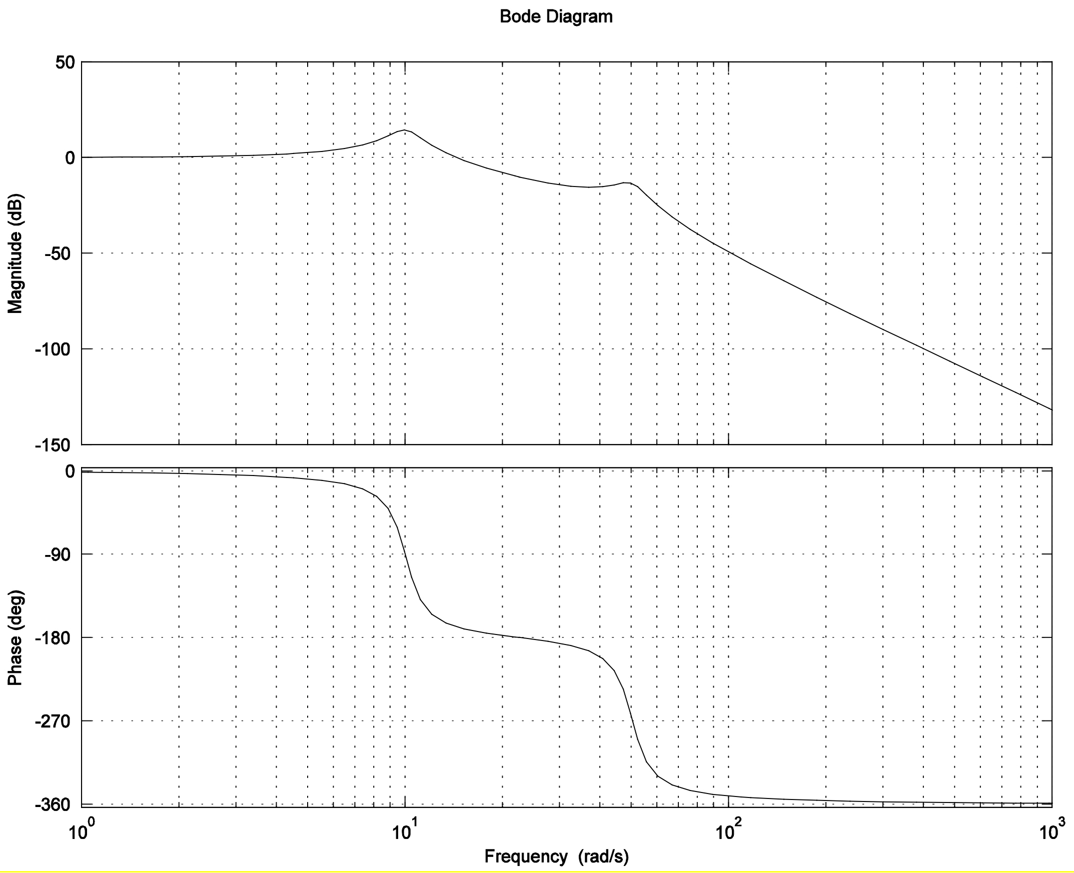
Η έξοδος του συστήματος είναι $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \int_0^t e^{A(t-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau$. Για τον υπολογισμό του πίνακα e^{At} παρατηρούμε ότι $A = M \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1{}^2 & \lambda_2{}^2 & \lambda_3{}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} M^{-1}$, όπου $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = [0, -1, -4]$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Ο πίνακας $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{0t} & & \\ & e^{-1t} & \\ & & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1.25 & 0.25 \\ 0 & -1.33 & -0.33 \\ 0 & 0.083 & 0.083 \end{bmatrix}$

2.2 [1 β.] Αν η είσοδος είναι βηματική, υπολογίστε $\lim_{t \to \infty} y(t)$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 1 = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} sR(s)G(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{1}{s}G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 + s}{s^3 + 5s^2 + 4s} = \frac{1}{4}$$

3° ΘΕΜΑ [3.0 βαθμοί]

3.1 [1 β.] Αναγνωρίστε την συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ με το ακόλουθο Bode -διάγραμμα



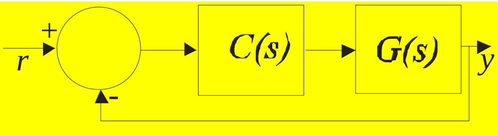
Η ονομαστική συνάρτηση μεταφοράς είναι $G(s)=\dfrac{K}{(s+1+10i)(s+1-10i)(s+5+50i)(s+5-50i)}$, όπου το K προκύπτει από το $\lim_{s\to 0} G(s)=1$. Σε κάθε προσέγγιση θα πρέπει να προκύψουν τουλάχιστον 4 πόλοι πιο πολλοί από μηδενικά καθώς η φάση της $\lim_{\omega\to\infty} \angle G(j\omega)=4\times(-90^{\circ})$. Οι μιγαδικοί πόλοι προκύπτουν από την υπερύψωση του μέτρου στις συγκεκριμένες συχνότητες που είναι εφάμιλλη με αυτή ενός συστήματος δευτέρας τάξης.

Μπορούν να υπάρξουν πολλές προσεγγίσεις στο όλο θέμα. Ακόμα και αν δεν υπολογιστούν μιγαδικές τιμές για πόλους αλλά πραγματικά μηδενικά και πόλοι στην περιοχή του 1 rad/sec και 10 rad/sec πάλι είναι αποδεκτή η λύση.

3.2 [1β] Έστω ότι η $G(s)$ αλλάζει σε $kG(s),\ k\in[1,10^{50/20}]$. *Υπολογίστε προσεγγιστικά τα περιθώρια κέρδους και φάσης για διαφορετικές τιμές του k.*

Για $k=1$ το περιθώριο κέρδους είναι $10.2\text{db}\left(\omega_{-180^{\circ}}=22.5\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$ και το περιθώριο φάσης είναι $11.6^{\circ}\left(\omega_{0\text{db}}=14.4\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$.

Για $k=10^{50/20}$ το περιθώριο κέρδους είναι $(10.2-50)\text{db}\left(\omega_{-180^{\circ}}=22.5\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$ και το περιθώριο φάσης είναι $-171^{\circ}\left(\omega_{0\text{db}}=102\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$.



3.3 [1 β.] Να σχεδιαστεί ελεγκτής *C(s)* έτσι ώστε ταυτόχρονα: 1) το σφάλμα μόνιμης κατάστασης για μία βηματική είσοδο να είναι όσο πιο μικρό γίνεται, και 2) να αυξηθεί το περιθώριο φάσης κατά τουλάχιστο 10°.

Ένας απλός ολοκληρωτής $C(s) = \frac{1}{s}$ κάνει το σφάλμα μόνιμης κατάστασης 0 σε βηματική είσοδο. Παράλληλα δε αλλάζει το περιθώριο φάσης σε 88.6° $\left(\omega_{0\mathrm{db}} = 1.01 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}} \right)$.

Οποιαδήποτε λύση με ένα lag-ελεγκτή για τις χαμηλές συχνότητες και ένα lead-ελεγκτή για να αυξήσει το περιθώριο φάσης κατά τουλάχιστο 10° είναι επίσης αποδεκτή.