ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – Φεβρουάριος 2016

1ο ΘΕΜΑ [4.0 βαθμοί]

1.1 Χρησιμοποιώντας τον διαμοιρασμό του συστήματος σε
$$\dot{\bar{x}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]\bar{x} + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A\bar{x} + B\bar{u}$$
$$y = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\bar{x}$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς ως $Y(s) = \dfrac{4s}{s^2+2s+1}U_1(s) + \dfrac{2s}{s^2+3s}U_2(s)$

1.2 Υπολογίστε νόμο ελέγχου $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}\bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\tilde{r}$ έτσι ώστε οι ελέγξιμοι πόλοι του συστήματος να είναι στις θέσεις -2, -2, -3, και -3

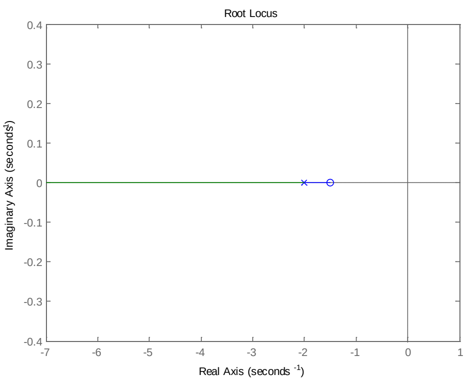
Ως μία από τις πολλαπλές λύσεις θεωρώ ότι με το u_1 θα αλλάξουν οι πόλοι του πρώτου υποπίνακα από -1 και -1 σε -2 και -2. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο σε αυτή την περίπτωση είναι s^2+4s+4 και τα κέρδη υπολογίζονται από $-4=-1+4k_1$ και $-4=-2+4k_2$. Όμοια το χαρακτηριστικό πολυώνυμο για τον κάτω δεξιά υποπίνακα πρέπει να είναι s^2+6s+9 και τα κέρδη υπολογίζονται ως $-9=0+2k_3$ και $-6=-3+2k_4$

1.3 Η συνάρτηση μεταφοράς $\dfrac{Y(s)}{\tilde{R}(s)} = G(s) = \dfrac{4s}{s^2+4s+4} + \dfrac{2s}{s^2+6s+9}$.

1.4 Από την σχέση $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1 = \lim_{s\to 0} sH(s)R(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sH(s)\dfrac{1}{s}s\left(\dfrac{4}{s^2+4s+4} + \dfrac{2}{s^2+6s+9}\right)$ ή

$1 = \lim_{s\to 0} sH(s)\left(\dfrac{4}{4}+\dfrac{2}{9}\right)$ οπότε $H(s) = \dfrac{9/11}{s}$

1.5 Το κλειστό σύστημα είναι $\dot{\bar{x}} = \left(A + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4(1+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\bar{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4(1+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\tilde{r}$. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι $s^2+4s+4-2\gamma s-3\gamma=0$ ή $1-\gamma\dfrac{2s+3}{s^2+4s+4}$. Για $\gamma \le 0$ ο ΓΤΡ



εμφανίζεται στο διπλανό σχήμα

1.6 Με τον προτεινόμενο νόμο ελέγχου το κλειστό σύστημα αλλάζει σε

$\dot{\bar{x}} = \left(A + \begin{bmatrix}0&0\\4&0\\0&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k&k&0&0\\0&0&k&k\end{bmatrix}\right)\bar{x} + \begin{bmatrix}0&0\\4&0\\0&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\tilde{r}$. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού είναι

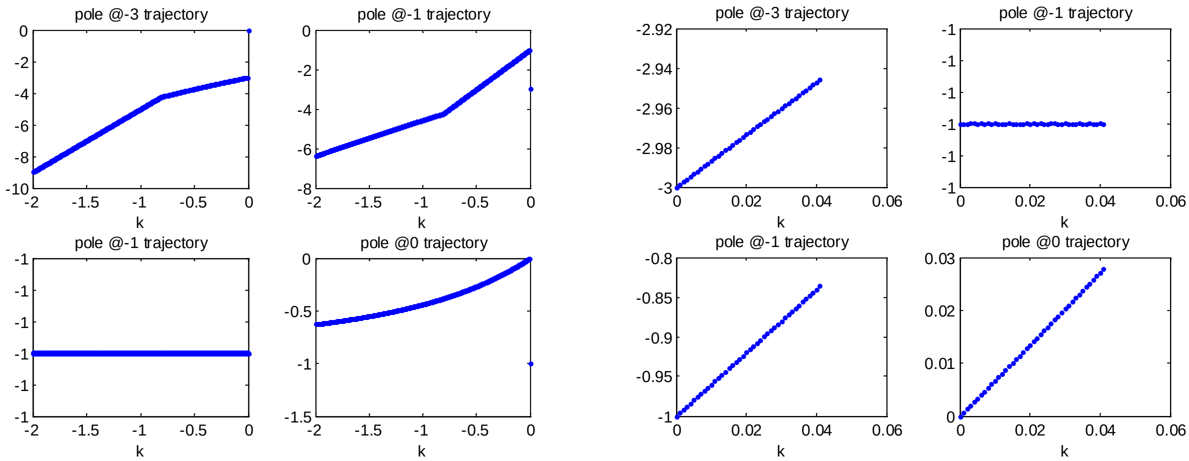
$\dfrac{Y(s)}{\tilde{R}(s)} = G(s) = \dfrac{4s}{s^2+(2-4k)s+(1-4k)} + \dfrac{2s}{s^2+(3-2k)s+(-2k)}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$s^4+5s^3+7s^2+3s+k\left(-6s^3+(-22+8k)s^2+(-18+16k)s+(8k-2)\right)=0$ ή

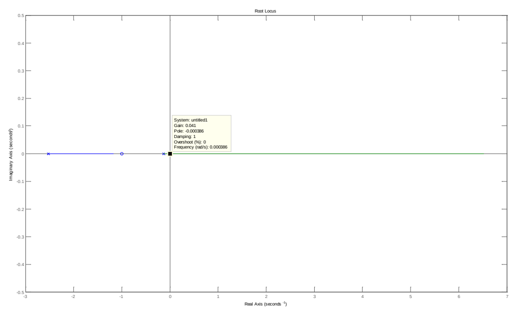
$$1+k\frac{-6s^3+(-22+8k)s^2+(-18+16k)s+(8k-2)}{s(s+3)(s+1)^2}=0 \tag{1.1}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης για $k=0$ είναι 0,-3 και διπλή στο -1, ενώ για $k\neq 0$ μπορεί να θεωρηθεί ότι προσεγγίζουν αυτές της $-6s^3+(-22+8k)s^2+(-18+16k)s+(8k-2)=0$.

Για αρνητικά(θετικά) k οι τροχιές των τεσσάρων πόλων (ως συνάρτηση του k είναι στα αριστερά (δεξιά) στο ακόλουθο σχήμα



Για διαφορετικές τιμές του k οι ρίζες της εξίσωσης $-6s^3+(-22+8k)s^2+(-18+16k)s+(8k-2)=0$ μπορούν να υπολογιστούν ως $1+k\dfrac{8s^2+16s+8}{-6s^3-22s^2-18s-2}=0$ ή $1-8k\dfrac{(s+1)^2}{(s+2.53)(s+1)(s+0.13)}=0$. Πράγματι για $k\leq 0$ ο ΓΤΡ είναι μέσα στο αριστερό ημι-επίπεδο, ενώ για $k\geq 0$ με την χρήση του ΓΤΡ το σύστημα παραμένει ευσταθές για $k\leq 0.041$ όπως φαίνεται και από τον ακόλουθο ΓΤΡ



, παρά το γεγονός ότι οι πραγματικές ρίζες είναι ασταθείς.

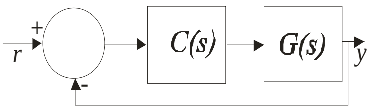
Εφόσον οι ρίζες του κλειστού συστήματος καθώς το k μικραίνει αποκτούν όλο και μικρότερο αρνητικό μέρος η πιο γρήγορη απόκριση είναι για $k\to-\infty$.

2^o ΘΕΜΑ [2.0 βαθμοί]

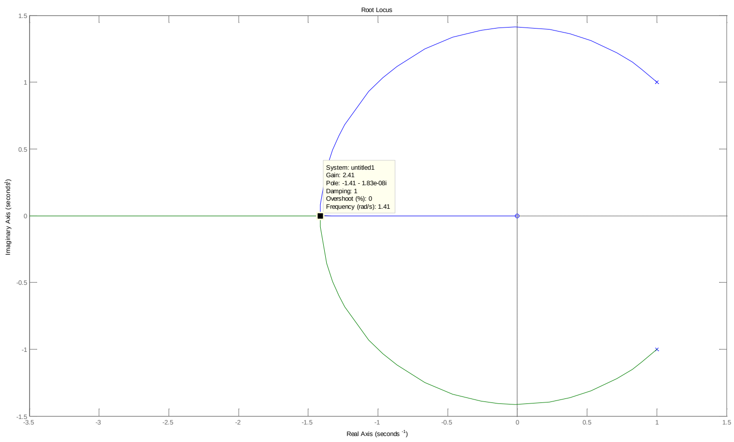
2.1 Για το συνεχές σύστημα $\begin{aligned}\dot{\overline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\overline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}u = A\overline{x} + Bu \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\overline{x}\end{aligned}$, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Η απόκριση $\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-1t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.2 Η έξοδος $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-1(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}u(\tau)d\tau$

3^{o} ΘΕΜΑ [1.5 βαθμοί]

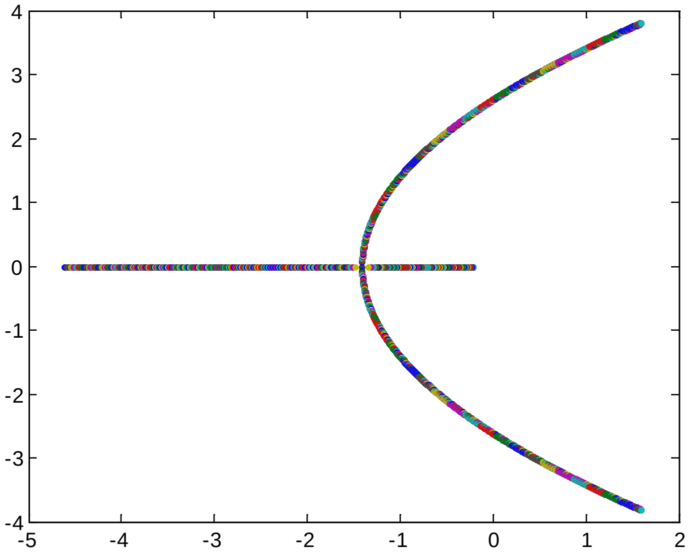
3.1 Για το σύστημα 

με $C(s)=k$ και $G(s)=\dfrac{2s}{(s-1+j)(s-1-j)}$, ο ΓΤΡ είναι



. Επιλέγουμε το $k=2.41$ έτσι ώστε οι πόλοι του κλειστού συστήματος να βρίσκονται στο ίδιο σημείο (με το μικρότερο πραγματικό μέρος $=-\sqrt{2}$)

3.2 Αν η $G(s)$ μεταβληθεί σε $G(s)=\dfrac{2s}{(s-\gamma+j)(s-\gamma-j)}$, η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι $\dfrac{2ks}{s^2-2(\gamma-k)s+\gamma^2+1}$ Οι πόλοι του κλειστού συστήματος είναι $(\gamma-k)\pm\sqrt{(\gamma-k)^2-(\gamma^2+1)}$ και καταγράφεται η θέση τους στο ακόλουθα σχήμα για $0\le\gamma\le 4$, όπου διαφαίνεται ότι δεν υπάρχει καμία τιμή του γ που να ικανοποιεί το κριτήριο όπως όλοι οι πόλοι έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του -3.



4° ΘΕΜΑ [1.0 βαθμός]

Έστω σύστημα το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη δυναμική εξίσωση $\dddot{x} + 3x\,\ddot{x} + 3e^{\dot{x}} + Dx = u\ \cos(x)$.

Για το σημείο λειτουργίας $x^o = \frac{\pi}{4},\ \dot{x}^o = \ddot{x}^o = \dddot{x}^o = 0$:

4.1 Για το σύστημα $\dddot{x} + 3x\,\ddot{x} + 3e^{\dot{x}} + Dx = u\ \cos(x)$ και το σημείο λειτουργίας $x^o = \frac{\pi}{4},\ \dot{x}^o = \ddot{x}^o = \dddot{x}^o = 0$, τότε

$u^o = \sqrt{2}\left(3e^0 + D\frac{\pi}{4}\right)$. Η γραμμικοποιημένη εξίσωση είναι

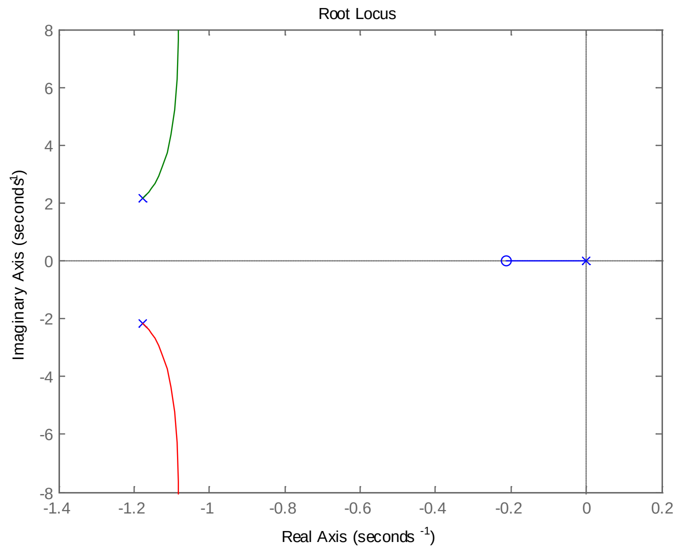
$(0+\Delta\dddot{x}) + 3\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)(0+\Delta\ \ddot{x}) + 3e^{(0+\Delta\dot{x})} + D\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right) = \left(u^o+\Delta u\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)$ ή

$\Delta\dddot{x} + \frac{3\pi}{4}\Delta\ddot{x} + 3e^0(1+\Delta\dot{x}) + D\frac{\pi}{4} + D\Delta x = \left(u^o+\Delta u\right)\ (\cos\frac{\pi}{4}\cos\Delta x - \sin\frac{\pi}{4}\sin\Delta x)$. Για μικρές γωνίες $\cos\Delta x \simeq 1$ και $\sin\Delta x \simeq 1$, οπότε $\Delta\dddot{x} + \frac{3\pi}{4}\Delta\ddot{x} + 3\Delta\dot{x} + D\Delta x = -u^o\sin\frac{\pi}{4}\Delta x + \cos\frac{\pi}{4}\Delta u$ και

$$\Delta\dddot{x} + \frac{3\pi}{4}\Delta\ddot{x} + \left(6 + D\frac{\pi}{4}\right)\Delta\dot{x} + D\Delta x = \cos\frac{\pi}{4}\Delta u$$

4.2 Οι πόλοι του κλειστού συστήματος είναι οι ρίζες της εξίσωσης $s^3 + \frac{3\pi}{4}s^2 + 6s + \frac{3\pi}{2}Ds + D = 0$ ή

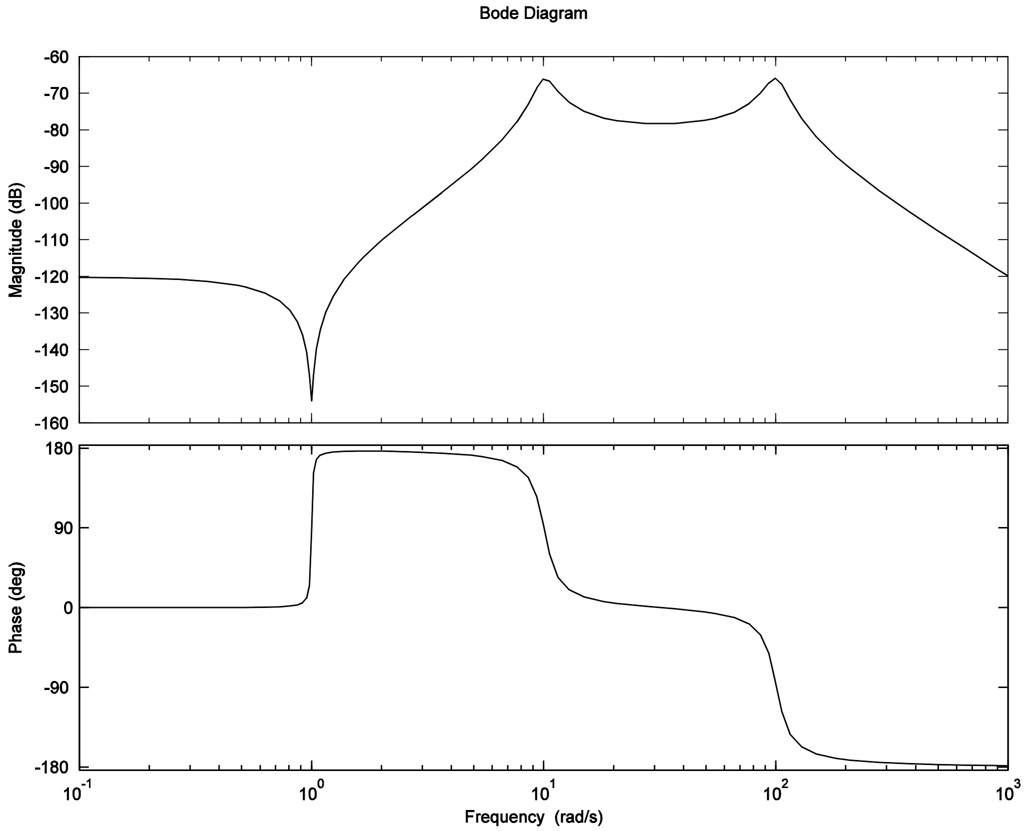
$1 + D\dfrac{\frac{3\pi}{2}s+1}{s\left(s^2+\frac{3\pi}{4}s+6\right)} = 0$. Η μεταβολή των πόλων καθώς το D μεταβάλλεται (για θετικές τιμές) καταγράφεται



στον διπλανό ΓΤΡ

5^{o} ΘΕΜΑ [1.0 βαθμός]

Η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ με μηδενικά στις θέσεις $-0.01 \pm i$ και πόλους στις θέσεις $-1 \pm 10i, -10 \pm 100i$ (εκεί δηλαδή που εμφανίζονται τα ακρότατα), δηλαδή $G(s) = \dfrac{\left(s^2 + 0.02s + 1.001\right)}{\left(s^2 + 2s + 101\right)\left(s^2 + 20s + 10100\right)}$ έχει το ακόλουθο Bode



διάγραμμα