VII.3 Μεταδοση σφαλματων A/D μετατροπεων και σφαλματων πολλ/σμου στον ελεγκτη

Η μεταδοση και ενισχυση του θορυβου κβαντισμου, εξαρταται απο τη δομη του αλγοριθμου. Οι διαφορες δυνατοτητες υλοποιησης εξεταστηκαν στο προηγουμενο κεφαλαιο. Γενικα, δεν υπαρχει καποια απλη θεωρια που να βοηθαει τον σχεδιαστη να εκτιμησει τον θορυβο που θα δημιουργηθει απο μια ορισμενη συναρτηση μεταφορας οπως αυτη υλοποιειται με μια συγκεκριμενη δομη. Ο μονος πρακτικος δρομος ειναι η μελετη μεσω παραδειγματων.

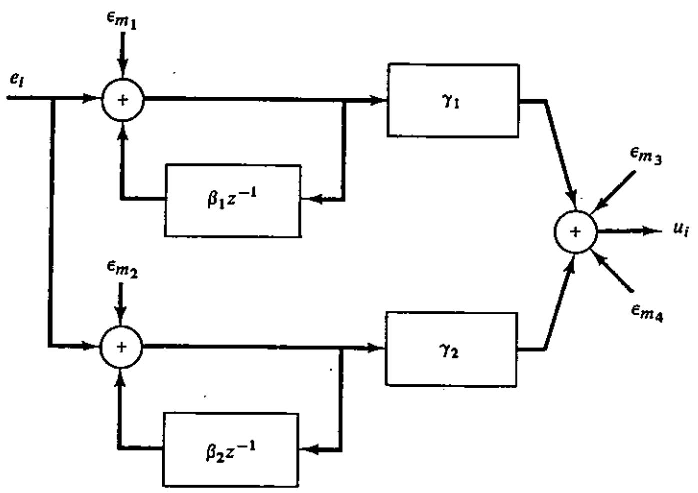
Παραδειγμα

Θεωρουμε την

$$\frac{u(z)}{e(z)} = D(z) = \frac{\gamma_1}{1-\beta_1 z^{-1}} + \frac{\gamma_2}{1-\beta_2 z^{-1}}$$

Θα μελετησουμε την παραλληλη υλοποιηση και πως μεταδιδεται το σφαλμα.

α)Παραλληλη υλοποιηση



Θα μελετησουμε τον πολλαπλασιαστικο θορυβο που δημιουργειται απο την αποκοπη των αριθμων σε καταχωρητες πεπερασμενου μηκους λεξεως. Υπενθυμιζεται οτι ο θορυβος κβαντισμου στην αριθμητικη αντιστροφης 2, εχει μεση τιμη $\varepsilon_{\Pi} = q/2$

και διασπορα, $\sigma_\varepsilon^2 = q^2/12$. Στην περιπτωση στρογγυλευσης αντι για αποκοπη, η μεση τιμη ειναι μηδεν και η διασπορα $\sigma_\sigma^2 = q^2/12$

Η μεταδοση του $\overline{\varepsilon_\Pi}$, $\overline{u}$ δινεται απο,

$$\overline{u} = \overline{\varepsilon} \lim_{z \to 1} zD(z)$$

Αφου η μεση τιμη σαν συναρτηση προστιθεται, τοτε,

$$\overline{u} = \overline{\varepsilon_\Pi}\, z \left[\sum_{k=1}^{4} D_k(z) \right]$$

οπου,

$$D_1 = \frac{\gamma_1}{1-\beta_1 z^{-1}} \quad , \quad D_2 = \frac{\gamma_2}{1-\beta_2 z^{-1}}$$

$$D_3 = D_4 = 1$$

και αντικαθιστωντας εχουμε,

$$\overline{u} = \overline{\varepsilon_\Pi} \left[\frac{\gamma_1}{1-\beta_1} + \frac{\gamma_2}{1-\beta_2} + 2 \right]$$

Οταν μελεταμε την μεταδοση της διασπορας χρειαζομαστε τον τυπο,

$$\sigma_u^2 = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{2\pi j} \oint D(z)D(z^{-1})z^{-1}dz$$

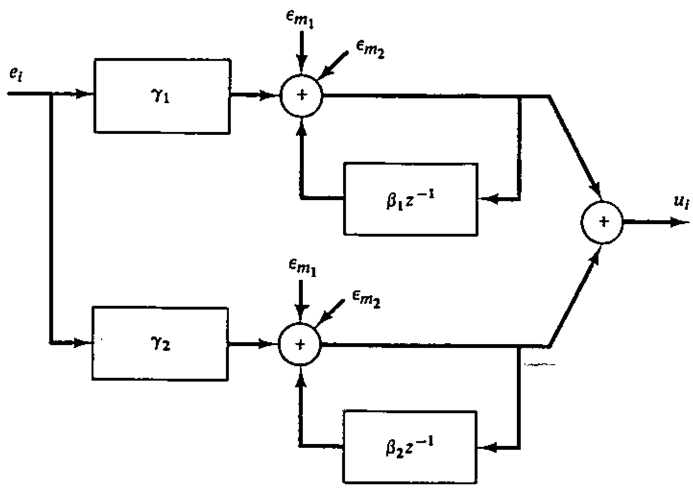
και επειδη η διασπορα προστιθεται,

$$\sigma^2_u = \sigma^2_\varepsilon \frac{1}{2\pi j} \oint D_k(z)D_k(z^{-1})z^{-1}dz$$

αρα,

$$\sigma_u^2 = \frac{q^2}{12} \left\{ \frac{\gamma_1^2}{1-\beta_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{1-\beta_2^2} + 2 \right\}$$

β) Παραλληλη υλοποιηση, 2^{η} περιπτωση



Η μεση τιμη δινεται απο το τυπο,

$$\bar{u} = \bar{\varepsilon} z \sum_{k=1}^{2} 2D_k(z)$$

οπου, $D_1 = \dfrac{1}{1-\beta_1 z^{-1}}$, $D_2 = \dfrac{1}{1-\beta_2 z^{-1}}$

που συνεπαγεται,

$$\bar{u} = 2\bar{\varepsilon}_{\Pi} \left\{ \frac{1}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_2} \right\}$$

και η διασπορα,

$$\sigma_u^2 = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=1}^{2} 2 \oint D_k(z) D_k(z^{-1}) z^{-1} dz$$

και αρα,

$$\sigma^2_u = 2\sigma_\varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{1-\beta_1^2} + \frac{1}{1-\beta_2^2} \right\}$$

Παρατηρουμε δηλ. οτι για μεγαλυτερα γ , η δευτερη υλοποιηση β), δημιουργει χαμηλοτερο θορυβο κβαντισμου.

γ) Πολλαπλασιαστικα σφαλματα στην απ'ευθειας υλοποιηση.

Για το ιδιο παραδειγμα, παιρνουμε,

$$D(z) = \frac{\gamma_1}{1-\beta_1 z^{-1}} + \frac{\gamma_2}{1-\beta_2 z^{-1}} = \frac{(\gamma_1+\gamma_2)-(\gamma_1\beta_2+\gamma_2\beta_1)z^{-1}}{1-(\beta_1+\beta_2)z^{-1}+\beta_1\beta_2 z^{-2}}$$

που μπορει να γραφτει,

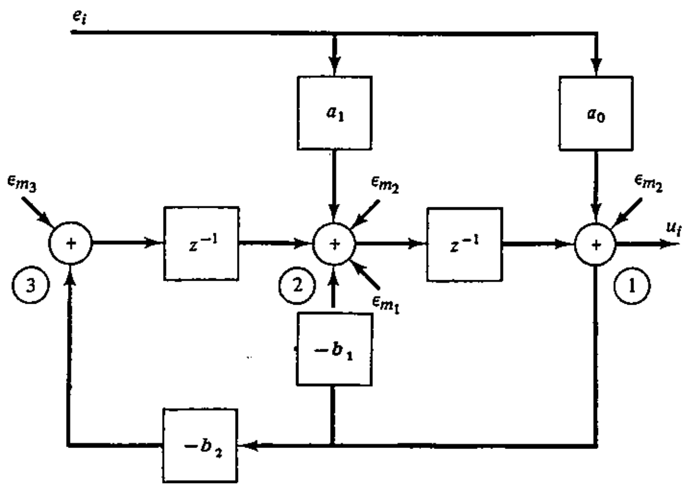
$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}$$

και οπου,

$$a_0=\gamma_1+\gamma_2 \qquad a_1 = -(\gamma_1\beta_1+\gamma_2\beta_1)$$

$$b_1=-(\beta_1+\beta_2) \qquad b_2=\beta_1\beta_2$$

Ο πολλαπλασιαστικος θορυβος ε_Π ,δημιουργειται σε τρεις κομβους, δηλ.



Οι αντιστοιχες συναρτησεις μεταφορας , η μεση τιμη και η διασπορα καθε κομβου ειναι ως εξης.

Κομβος 1.

$$\frac{u_1(z)}{\varepsilon_{\pi 1}(z)} = \frac{1}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}$$

$$\overline{u_1} = \overline{\varepsilon}_{\pi 1} \frac{1}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}$$

$$\sigma^2_{u1} = \sigma_{\varepsilon\pi 1}{}^2 \frac{1}{(\beta_1-\beta_2)(1-\beta_1\beta_2)} \left[\frac{\beta_1}{1-\beta_1{}^2} - \frac{\beta_2}{1-\beta_2{}^2} \right]$$

Κομβος 2.

$$\frac{u_2}{\varepsilon_{\pi 2}} = \frac{z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}} = \frac{z}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}$$

$$\overline{u}_2 = \overline{\varepsilon}_{\pi 2} \frac{1}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}$$

$$\sigma^2_{u2} = \sigma^2_{\varepsilon\pi 2} \frac{1}{(\beta_1-\beta_2)(1-\beta_1\beta_2)} \left[\frac{\beta_1}{1-\beta_1{}^2} - \frac{\beta_2}{1-\beta^2{}_2} \right]$$

Κομβος 3.

$$\frac{u_3(z)}{\varepsilon_{\pi 3}(z)} = \frac{z^{-2}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}} = \frac{1}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}$$

$$\overline{u_3} = \overline{\varepsilon}_{\pi 3} \frac{1}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}$$

$$\sigma^2_{u3} = \sigma^2_{\varepsilon\pi 3} \frac{1}{(\beta_1-\beta_2)(1-\beta_1\beta_2)} \left[\frac{\beta_1}{1-\beta_1^2} - \frac{\beta_2}{1-\beta_2^2} \right]$$

Η ολικη μεση τιμη, του u που δημιουργειται απο τους θορυβους λογω αποκοπης $\varepsilon_{\pi 1}, 2\varepsilon_{\pi 2}, \varepsilon_{\pi 3}$ ειναι

$$\bar{u}_\pi = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + \bar{u}_3 = \frac{4\bar{\varepsilon}_\pi}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}$$

και η ολικη διασπορα,

$$\sigma^2_u = \sigma^2_\varepsilon \frac{4}{(\beta_1-\beta_2)(1-\beta_1\beta_2)} \left[\frac{\beta_1}{1-\beta_1^2} - \frac{\beta_2}{1-\beta_2^2} \right]$$

$$= 4\sigma^2_\varepsilon \frac{1+\beta_1\beta_2}{(1-\beta_1\beta_2)(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}$$

Συγκρινοντας με τον θορυβο στη παραλληλη υλοποιηση,

$$\frac{\sigma^2_u(\text{παραλλ.})}{\sigma^2_u(\text{ευθ.})} \approx \frac{(2-\beta_1^2-\beta_2^2)(1-\beta_1\beta_2)}{1+\beta_1\beta_2}$$

Παρατηρουμε δηλ. οτι για μεγαλες τιμες της περιοδου δειγματοληψιας οι αριθμητικες τιμες των β_1, β_2 ειναι πολυ κοντα στο 1. Ετσι απο την προηγουμενη σχεση βλεπουμε οτι η παραλληλη υλοποιηση εχει μικροτερη ενισχυση του θορυβου πολλαπλασιασμου. Η συγκριση της μεσης τιμης οπως μεταδιδεται μεσα απο την παραλληλη και την ευθεια υλοποιηση δινεται απο,

$$\frac{\bar{u}(\text{παραλλ.})}{\bar{u}(\text{ευθ.})} = \frac{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{2}$$

VIII.4 <u>Σφαλματα στους συντελεστες και επιδραση τους στη δυναμικη συμπεριφορα του ελεγκτη</u>

Λογω του πεπερασμενου μηκους λεξεως, οι συντελεστες του ελεγκτη D(z) μπορει να ειναι λιγο διαφορετικοι απο την αρχικα υπολογισμενη τιμη τους. Η διαφορα αυτη δημιουργει μεταβολες στις θεσεις των πολων και των μηδενικων του ελεγκτη. Και παλι, αυτη η ευαισθησια εξαρταται απο την συγκεκριμενη υλοποιηση.

Ορισμος του προβληματος

Αν θεωρησουμε την συναρτηση μεταφορας D(z)

$$D(z) = \frac{N(z)}{1+\sum_{k=1}^{n} b_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{\prod_{j=1}^{n} \left(1-\frac{z^{-1}}{z_j}\right)}$$

οπου z_j ειναι οι πολοι της D(z) και b_k ειναι οι συντελεστες του φιλτρου που προσδιοριζουν τους πολους. Η N(z) προσδιοριζει τα μηδενικα.

Οι Kaiser-Kuo βρηκαν ενα τυπο βασει του οποιου υπολογιζεται η καινουργια θεση του πολου z_m σαν συναρτηση της μεταβολης του b_k.

$$\Delta z_m = \frac{z_m^{k+1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} \left(1-\frac{z_m}{z_j}\right)} \Delta b_k$$

χρησιμοποιωντας αυτο το τυπο μπορουμε να υπολογισουμε την επιδραση του Δb στη περιπτωση της ευθειας υλοποιησης.

Ευαισθησια στη μεταβολη των συντελεστων ενος δευτερας ταξεως φιλτρου

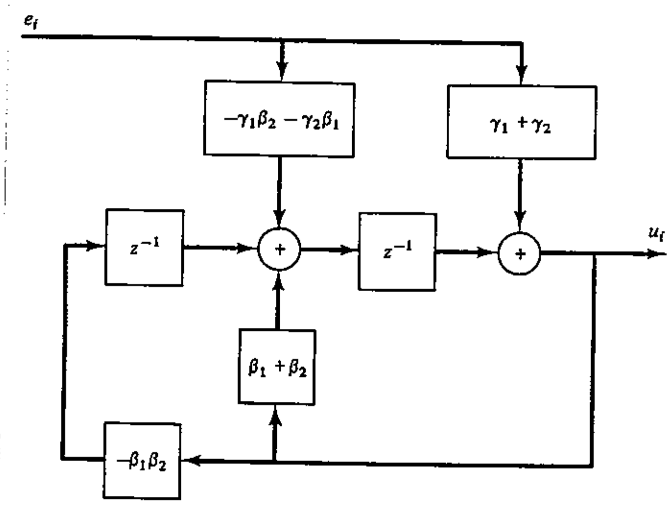
Δοθεντος ενος φιλτρου δευτερας ταξεως, υλοποιημενου παραλληλα, δηλ.

$$D(z) = \frac{\gamma_1}{1-\beta_1 z^{-1}} + \frac{\gamma_2}{1-\beta_2 z^{-1}} = \frac{\gamma_1+\gamma_2 - (\gamma_1\beta_2+\gamma_2\beta_1)z^{-1}}{1-(\beta_1+\beta_2)z^{-1} + \beta_1\beta_2 z^{-1}}$$

θα συγκρινουμε τρεις διαφορετικες υλοποιησεις.

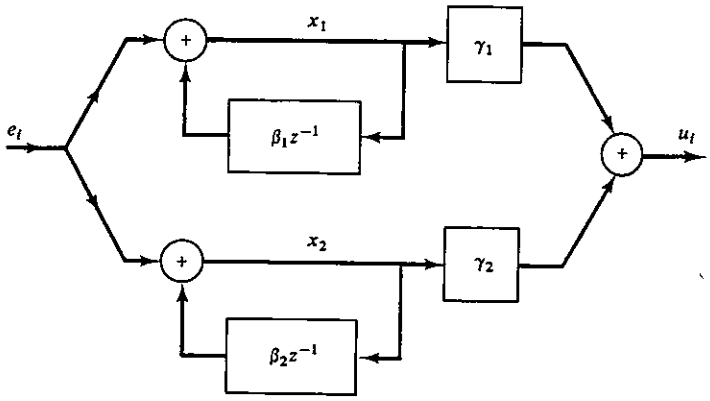
α) Ευθεια 1

$$u_i = (\beta_1+\beta_2)u_{i-1} - \beta_1\beta_2 u_{i-2} + (\gamma_1+\gamma_2)e_i - (\gamma_1\beta_2+\gamma_2\beta_1)e_{i-2}$$



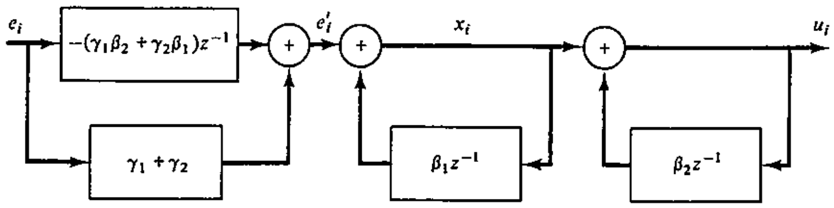
β) Παραλληλη

$$x_{1(i)} = \beta_1 x_{1(i-1)} + e_i$$
$$x_{2(i)} = \beta_2 x_{2(i-1)} + e_i$$
$$u_i = \gamma_1 z_{1(i)} + \gamma_{2(i)}$$



γ) Εν σειρα

$$e'_i=(\gamma_1+\gamma_2)e_i-(\gamma_1\beta_2+\gamma_2\beta_1)e_{i-1}$$
$$x_i=\beta_1 x_{i-1}+e'_i$$
$$u_i=\beta_2 u_{i-1}+x_i$$



Οι συντελεστες των πολων στην εν σειρα και την παραλληλη υλοποιηση βασιζονται στα β_1,β_2. Στην ευθεια υλοποιηση ειναι, $\beta_1\beta_2$ και $\beta_1+\beta_2$. Θεωρουμε τωρα τη χαρακτηριστικη εξισωση $P(z,\lambda)$,οπου οι τιμες του λ ειναι οι συντελεστες. Μια μεταβολη $\lambda+\delta\lambda$ συνεπαγεται αλλαγη θεσης των πολων στα $z_1+\delta z_1, z_2+\delta z_2, \ldots$

$$P(z_j+\delta z_j,\ \lambda+\delta\lambda) = P(z_j,\lambda) + \frac{\partial P}{\partial z_j}\delta z + \frac{\partial P}{\partial \lambda}\delta\lambda$$

αλλα, το αριστερο μελος και ο πρωτος ορος του δεξιου, ειναι μηδεν απο τον ορισμο της χαρακτηριστικης εξισωσης, ετσι

$$\delta z_j = -\frac{\partial P/\partial\lambda}{\partial P/\partial z}\delta\lambda \ \Big|_{z=z_j}$$

Στο προβλημα μας τωρα, την ευαισθησια του $2^{ας}$ ταξης συστηματος, α)Η ευθεια υλοποιηση δινει,

$$P = z^2 - (\beta_1+\beta_2)z + \beta_1\beta_2$$

οριζουμε σαν $\beta_1+\beta_2 = \lambda_1$ και, $\beta_1\beta_2 = \lambda_2$. Μερικη παραγωγιση μας δινει,

$$\frac{\vartheta P}{\vartheta \lambda_1} = -z, \quad \frac{\vartheta P}{\vartheta z} = 2z-\lambda_1 , \quad \frac{\vartheta P}{\vartheta \lambda_2} = 1$$

συνεπως,

$$\frac{\delta z}{\delta \lambda_1} = -\frac{-z}{2z-\lambda_1}\Big|_{z=\beta_1} = \frac{\beta_1}{2\beta_1 - (\beta_1+\beta_2)} = \frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}$$

$$\frac{\delta z}{\delta \lambda_2} = \frac{-1}{2z-\lambda_1}\Big|_{z=\beta_1} = \frac{-1}{\beta_1-\beta_2}$$

Δηλ. για πολους που βρισκονται πολυ κοντα μεταξυ τους ($\beta_1 \approx \beta_2$), η ευθεια υλοποιηση ειναι πολυ ευαισθητη σε μεταβολες των συντελεστων.

β)Εν σειρα και παραλληλη

Στις δυο αυτες υλοποιησεις οι συντελεστες που δημιουργουνται απο την υλοποιηση ειναι οι ιδιοι οι πολοι.