



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ

Αντί του «απλού» ΖΟΗ χρησιμοποιείται **First Order Hold (FOH)**

$$f_k(t) = f(kh) + f^{(1)}(kh)(t - kh) \quad kh < t < (k + 1)h$$

Όπου η πρώτη παράγωγος της $f^{(1)}|_{t=kh}$ προσεγγίζεται ως

$$f^{(1)}(kh) \cong \frac{f(kh) - f((k-1)h)}{h}$$

Η κρουστική απόκριση υπολογίζεται θέτοντας

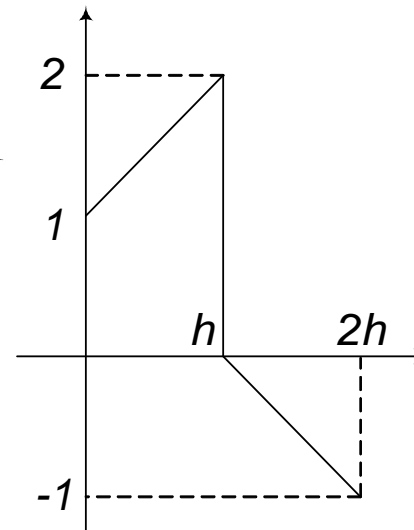
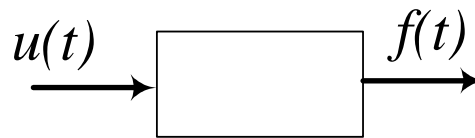
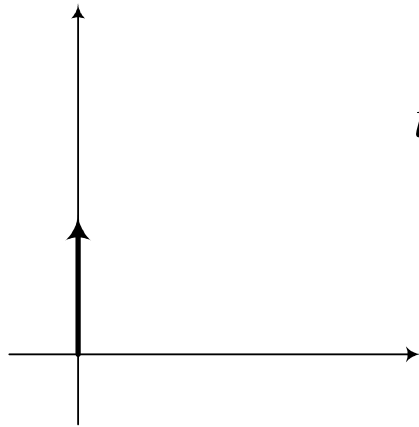
$$f(0) = 1, \quad f(h) = f(2h) = \dots = 0$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ

$$f_0(t) = f(0) + \frac{f(0) - f(-h)}{h}t, \quad 0 \leq t < h$$

$$f_1(t) = f(h) + \frac{f(h) - f(0)}{h}(t-h) = -\frac{1}{h}(t-h) = 1 - \frac{t}{h}, \quad h \leq t < 2h$$

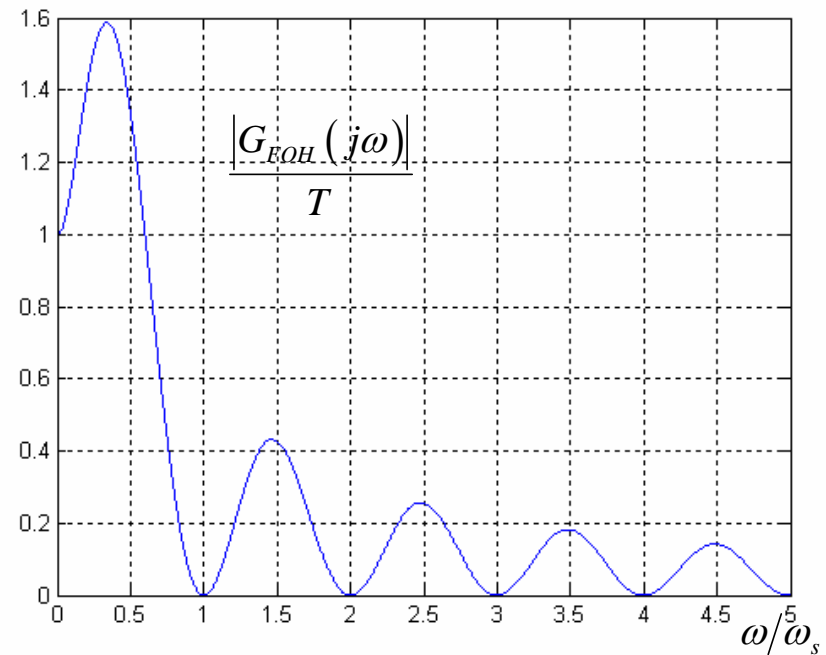
$$f_2(t) = f_3(t) = \dots = 0$$



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ

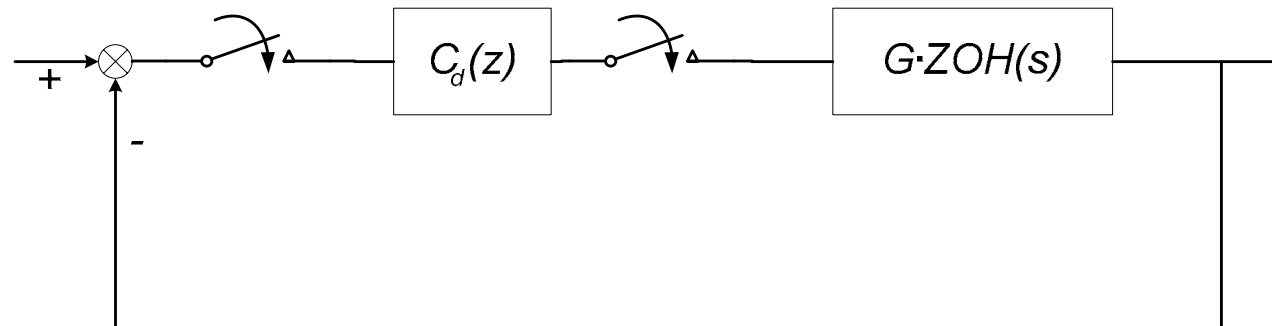
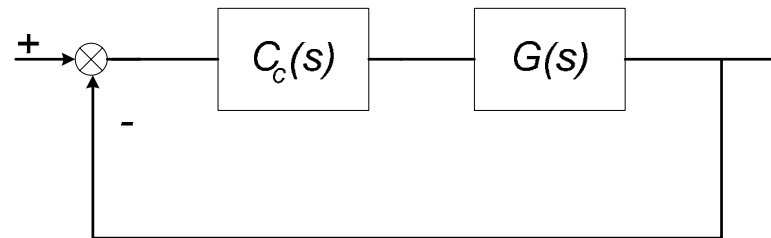
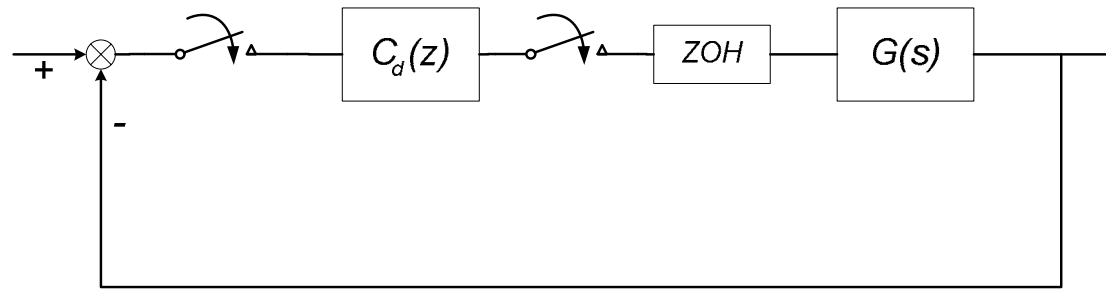
$$G_{FOH}(s) = L \left[\mathbf{1}(t) + \frac{t}{h} \mathbf{1}(t) - 2\mathbf{1}(t-h) - 2\frac{(t-h)}{h} \mathbf{1}(t-h) + \frac{(t-2h)}{h} \mathbf{1}(t-2h) + \mathbf{1}(t-2h) \right] = \frac{1+hs}{h} \left(\frac{1-e^{sh}}{s} \right)^2$$

$$|G_{FOH}(j\omega)| = \frac{2\pi}{\omega_s} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 \omega^2}{\omega_s^2}} \left[\frac{\sin \frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}} \right]^2$$



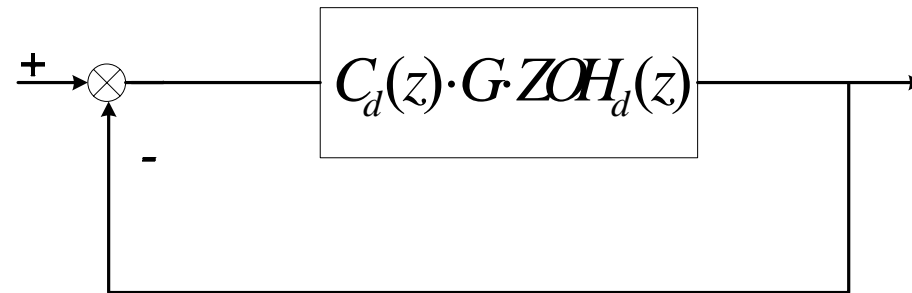
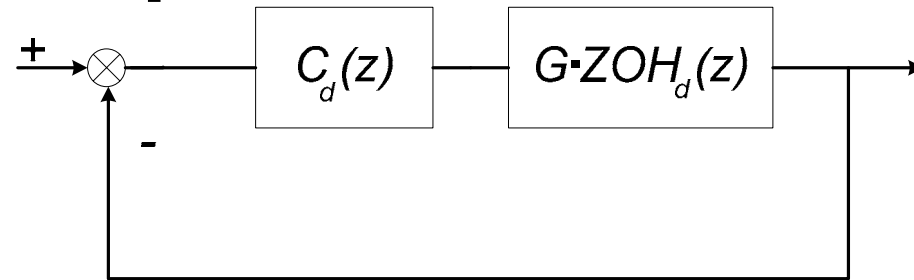
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

Ευστάθεια διακριτού συστήματος

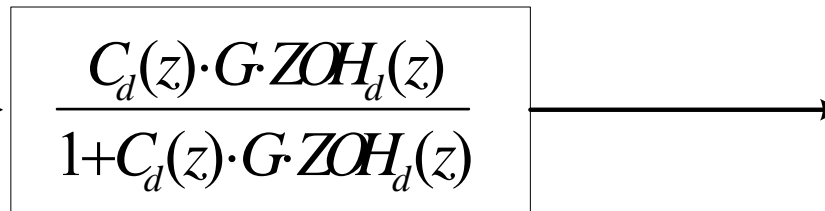


ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

$$Z[G(s)ZOH(s)] = G \cdot ZOH_d(z)$$



Ισοδύναμο κλειστό
διακριτό σύστημα





ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

Για να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές πρέπει

$$|\text{ριζες}[C_d(z) \cdot G \cdot ZOH_d(z) = 0]| < 1$$

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s}$$

$$G \cdot ZOH_d(z) = Z\left(\frac{1 - e^{-sT_s}}{s} G(s)\right) = Z\left((1 - e^{-T_s}) \frac{G(s)}{s}\right) = (1 - z^{-1}) Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

Για τον υπολογισμό του $Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι προηγούμενες μέθοδοι διακριτοποίησης

Κριτήριο Jury

Έστω πολυώνυμο:

$$F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z^1 + a_0, \quad a_n \in \mathbb{R}^+$$

Για έλεγχο του μέτρου των ριζών $|\text{ριζες}(f(t)=0)| < 1$ δημιουργούμε τον πίνακα.....

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

	z^0	z^1	z^2	...	z^{n-k}	...	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-k}		a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_k		a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-k}		b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_k		b_0	
5	c_0	c_1	c_2	...		c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	...		c_0		
.								
.								
$2n-5$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3				
$2n-4$	ρ_3	ρ_2	ρ_1	ρ_0				
$2n-3$	q_0	q_1	q_2	q_3				



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

Όπου

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

•

•

•

$$q_0 = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_3 \\ \rho_3 & \rho_0 \end{vmatrix}$$

$$q_2 = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_3 & \rho_2 \end{vmatrix}$$

Το διακριτό σύστημα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $F(z)$ είναι ευσταθές αν ικανοποιούνται όλες οι ακόλουθες συνθήκες



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

- $F(1) > 0$

- $F(-1) \begin{cases} > 0, & n=\text{άρτιο} \\ < 0, & n=\text{περιττό} \end{cases}$

- $|a_0| < a_n$

- $|b_0| > |b_{n-1}|$

- $|c_0| > |c_{n-2}|$

- $|d_0| > |d_{n-3}|$

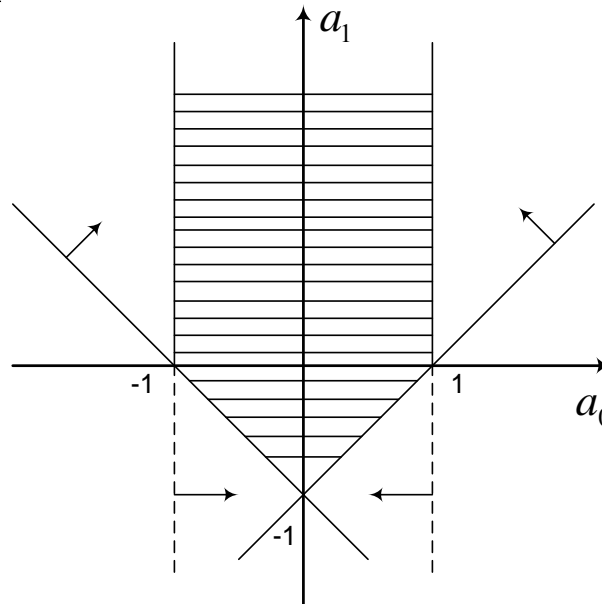
...

- $|q_0| > |q_2|$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

$$F(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

- $F(1) > 0$
 - $F(-1) > 0$
 - $|a_0| < 1$
- $$\Rightarrow \begin{cases} 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ 1 - a_1 + a_0 > 0 \\ |a_0| < 1 \end{cases}$$





ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ

ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Μια ολόκληρη γραμμή του κριτηρίου Jury έχει μηδενικά

Φυσικό νόημα: υπάρχουν ρίζες του πολυωνύμου ακριβώς στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου.

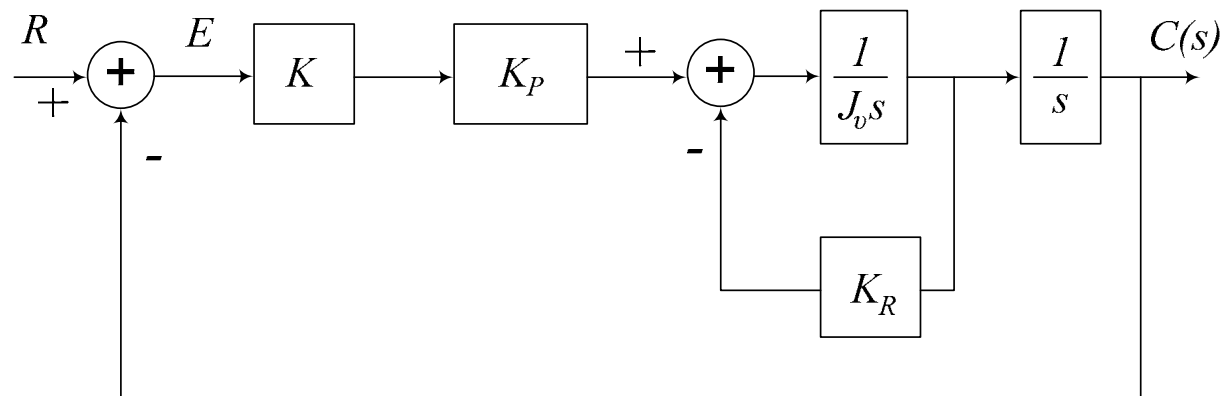
Μετατροπή: $F(z)$ γίνεται $F[(1 + \varepsilon)z]$ με $\varepsilon \approx 0 \in \mathbb{R}^+$

$$\left[z^n \rightarrow (1 + \varepsilon)^n \cdot z^n \approx (1 + n\varepsilon) \cdot z^n \right]$$

Δηλαδή στην ουσία αυξάνεται ανεπαίσθητα η ακτίνα του μοναδιαίου κύκλου και υπολογίζεται η επίδραση της στην ευστάθεια του συστήματος.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

Σύστημα ελέγχου DC-κινητήρα



$$K_P = 1,65 \times 10^6$$

$$K_R = 3,7 \times 10^5$$

$K = \text{ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ}$

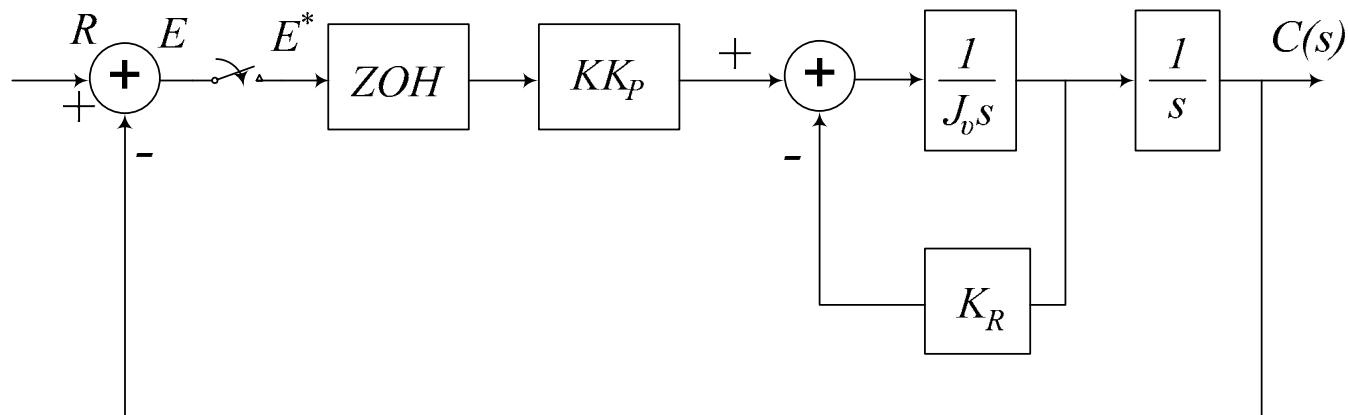
$$J_v = 41822$$

$$\text{Open-Loop } G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{K \cdot K_P}{s(J_v s + K_R)}$$

$$\text{Closed-Loop } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{39.453K}{s^2 + 8.8715s + 39.453K}$$

$$\text{Σύστημα ευσταθές } \forall K > 0, \quad \omega_n = \sqrt{39.453K}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II



$$G(s) = \frac{C(s)}{E^*(s)} = ZOH(s)G(s) = \frac{1 - e^{-T_s}}{s} \frac{KK_P/J_v}{s \left(s + \frac{K_R}{J_v} \right)}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \frac{KK_P}{K_R} Z \left(\frac{1}{s^2} - \frac{J_v}{K_R s} + \frac{J_v}{K_R \left(\left(s + \frac{K_R}{J_v} \right) \right)} \right)$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ

$$G(z) = \frac{KK_P}{K_R^2} \left[\frac{\left(TK_R - J_v + J_v e^{-\frac{K_R T}{J_v}} \right) z - \left(TK_R + J_v e^{-\frac{K_R T}{J_v}} \right) + J_v}{(z-1) \left(z - e^{-\frac{K_R T}{J_v}} \right)} \right]$$

$$\text{Closed-loop } \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{N(z)}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$\alpha_1 = 0,000012K(3,75 \cdot 10^5 T - 41822 + 41822 e^{-8,871T}) - 1 - e^{-8,871T}$$

$$\alpha_0 = e^{-8,871T} + 0,000012K[41822 - (3,75 \cdot 10^5 T + 41822) e^{-8,871T}]$$

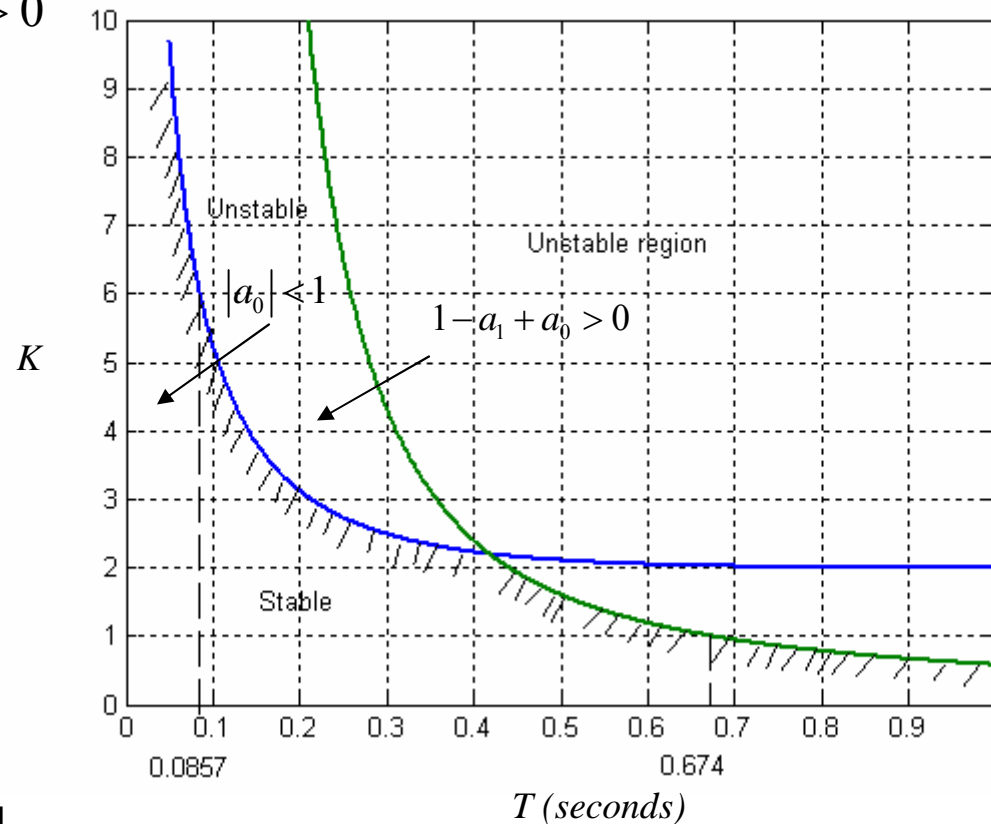
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

$$F(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

$$F(1) = 1 + a_1 + a_0 \Rightarrow 1 - e^{-8,871T} > 0$$

$$F(-1) = 1 - a_1 + a_0 > 0$$

$$|a_0| < 1$$



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

