Αναγνώριση Προτύπων Ι

Ενότητα 2: Δομικά Συστήματα

Αν. Καθηγητής Δερματάς Ευάγγελος

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Συναρτήσεις Απόστασης Προτύπων
3. Κριτήρια Ταξινόμησης
4. Διαδικασία Εκπαίδευσης
5. Συναρτήσεις Απόφασης
6. Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης
7. Μη Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης

Εισαγωγή

- Τα **δομικά συστήματα** αποτελούν τις πρώτες, χρονολογικά, προσπάθειες κατασκευής αυτόματων μηχανών ταξινόμησης προτύπων.

- Μια ομάδα δομικών μεθόδων, εκμεταλλεύεται την στατιστική ιδιότητα που έχουν τα πρότυπα μιας κατηγορίας να έχουν μικρότερη απόσταση από τα πρότυπα διαφορετικών κατηγοριών. Η ταξινόμηση πραγματοποιείται με σύγκριση προτύπων, μετρώντας την απόσταση του αγνώστου προτύπου από επιλεγμένα πρωτότυπα ή τεχνητά πρότυπα.

- Μια διαφορετική ομάδα δομικών μεθόδων, ταξινομεί πρότυπα μέσω της εύρεσης των χαρακτηριστικών εκείνων που περιγράφουν με κοινό και ίσως αποκλειστικό τρόπο τα πρότυπα μιας κατηγορίας. Όταν τα χαρακτηριστικά είναι γνωστά, τότε χρησιμοποιούνται γραμμικές ή μη-γραμμικές συναρτήσεις απόφασης για να ταξινομηθούν τα πρότυπα.

Συναρτήσεις Απόστασης Προτύπων (1)

•Θεωρητικά, οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιεί την ισχυρή συνθήκη, που ακολουθεί, και προαιρετικά τις ασθενείς συνθήκες, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει ένα ποσοτικό μέγεθος της ‘απόστασης’ προτύπων.

1. **<u>Ισχυρή συνθήκη</u>**: Σαν μέτρο απόστασης, μπορεί να οριστεί κάθε βαθμωτή συνάρτηση $d(\mathrm{x}, y)$ τέτοια ώστε

$$d(\mathrm{x}, y) \geq 0, \forall \mathrm{x}, y \in S$$

όπου *S* είναι το πεδίο ορισμού των προτύπων $\left(S \subseteq \Re^P\right)$ και *P* είναι ο αριθμός των παραμέτρων του προτύπου.

Συναρτήσεις Απόστασης Προτύπων (2)

2. <u>Ασθενείς συνθήκες</u>: Οι συνθήκες αυτές, έχουν σκοπό να περιγράψουν κάποιες επιθυμητές ιδιότητες, που θα θέλαμε να έχει η συνάρτηση απόστασης.

Οι σημαντικότερες από αυτές τις ιδιότητες, είναι οι ακόλουθες:

α. Το πεδίο τιμών της συνάρτησης δεν πρέπει να περιέχει αρνητικούς αριθμούς. Η απόσταση προτύπων είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός:

$$d(\mathrm{x}, y) \geq 0, \forall \mathrm{x}, y \in S$$

β. Κάθε πρότυπο έχει μηδενική απόσταση από τον εαυτό του:

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = 0, \forall \mathrm{x} \in \mathrm{S}$$

Συναρτήσεις Απόστασης Προτύπων (3)

γ. Συμμετρική ιδιότητα. Η εναλλαγή των προτύπων δεν επηρεάζει το μέγεθος της μετρούμενης απόστασης:

$$d(\mathrm{x}, y) = d(y, \mathrm{x}), \forall \mathrm{x}, y \in S$$

δ. Τριγωνική συνθήκη. Η απόσταση δυο προτύπων είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των αποστάσεων τους από τρίτο πρότυπο:

$$d(\mathrm{x}, y) \leq d(\mathrm{x}, z) + d(\mathrm{z}, \mathrm{x}), \forall \mathrm{x}, z, y \in S$$

- Επειδή, δεν υπάρχει μια γενική μέθοδος επιλογής της πιο κατάλληλης συνάρτησης απόστασης, συνήθως, καταφεύγουμε σε πειραματικές μεθόδους. Με άλλα λόγια, φτιάχνουμε συστήματα ταξινόμησης, τα οποία διαφέρουν μόνο ως προς τον τρόπο με τον οποίο μετρούν την απόσταση των προτύπων.

Συναρτήσεις Απόστασης Προτύπων (4)

• Οι πιο σημαντικές **συναρτήσεις απόστασης** ορίζονται από τις ακόλουθες αλγεβρικές εκφράσεις:

1. **Ευκλείδεια απόσταση**. Είναι η πιο διαδεδομένη συνάρτηση απόστασης που ικανοποιεί ταυτόχρονα όλες τις ασθενείς συνθήκες. Η διάδοση της οφείλεται, κυρίως, στην φυσική υπόσταση της, η οποία εκφράζει το μήκος της ευθείας που συνδέει το άγνωστο πρότυπο με το πρωτότυπο της κατηγορίας *y*, στον N-διάστατο Ευκλείδειο χώρο.

$$d_e(\mathrm{x}, y) = \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\mathrm{x}_i - y_i \right)^2 \right)^{1/2}$$

όπου x_i, y_i είναι η i συνιστώσα του διανύσματος του αγνώστου προτύπου και του αντίστοιχου πρωτοτύπου.

Συναρτήσεις Απόστασης Προτύπων (5)

2. **<u>Σταθμισμένη Ευκλείδεια απόσταση</u>**. Η συνάρτηση αυτή είναι παραλλαγή της Ευκλείδειας απόστασης, στην οποία υπεισέρχονται και πολλαπλασιαστικοί όροι. Οι όροι αυτοί είτε είναι σταθερές, μοναδικές σε κάθε σύστημα ταξινόμησης, είτε αποτελούν χαρακτηριστικό γνώρισμα κάθε κατηγορίας. Η συνάρτηση σταθμισμένης Ευκλείδειας απόστασης ικανοποιεί, επίσης, όλες τις ασθενείς συνθήκες, εκτός από την τριγωνική ιδιότητα στην περίπτωση που κάθε κατηγορία διαθέτει το δικό της σύνολο συντελεστών.

$$d_\omega(\mathrm{x}, y, m) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (\mathrm{x}_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

- Από την παραπάνω εξίσωση γίνεται φανερό ότι για κάθε πρωτότυπο, εκτός από την παραμετρική του περιγραφή χρειάζεται και ο *y* προσδιορισμός του διανύσματος βαρύτητας *m*.

Συναρτήσεις Απόστασης Προτύπων (6)

3. <u>Γενικευμένη Ευκλείδεια απόσταση</u>. Είναι λιγότερο γνωστή συνάρτηση απόστασης και αποτελεί γενίκευση της Ευκλείδειας απόστασης (s=2):

$$d_e(\mathrm{x}, y) = \left(\sum_{i=1}^{N} (\mathrm{x}_\mathrm{i} - y_i)^s \right), s = 2,4,6...$$

❖ Η γενικευμένη Ευκλείδεια απόσταση ικανοποιεί όλες τις ασθενείς συνθήκες.

4. <u>Απόσταση Mahalanobis</u>. Στην συνάρτηση αυτή, που ικανοποιεί μέρος των ασθενών συνθηκών, δόθηκε το όνομα του Ινδού μαθηματικού Mahalanobis:

$$D(\mathrm{x}, y, s) = (\mathrm{x} - y)^T s^{-1} (\mathrm{x} - y)$$

όπου *s* είναι ένας τετραγωνικός πίνακας *N* x *N*.   .

Συναρτήσεις Απόστασης Προτύπων (7)

5. <u>Απόσταση του αντίστροφου κανονικοποιημένου εσωτερικού γινομένου</u>.

$$d_k(\mathrm{x}, y) = \frac{\|\mathrm{x}\|\|y\|}{\mathrm{x}^T y}$$

6. <u>Απόσταση Tanimoto</u>.

$$s(\mathrm{x}, y) = \frac{\mathrm{x}^T \mathrm{x} + \mathrm{y}^{\mathrm{T}} y}{\mathrm{x}^{\mathrm{T}} y} - 2$$

➢ Οι συναρτήσεις απόστασης (5),(6) δεν ικανοποιούν όλες τις ασθενείς συνθήκες.

➢ Η επιλογή της συνάρτησης απόστασης επηρεάζει σημαντικά την αξιοπιστία του συστήματος ταξινόμησης, καθώς επίσης και τον τρόπο υπολογισμού των πρωτοτύπων.

Κριτήρια Ταξινόμησης (1)

• Μετά την επιλογή της συνάρτησης απόστασης, ακολουθεί η επιλογή της τεχνικής ταξινόμησης προτύπων σε κατηγορίες με την μέθοδο της σύγκρισης.

Τα σημαντικότερα κριτήρια ταξινόμησης που χρησιμοποιούνται σε πρακτικές εφαρμογές είναι τα εξής δυο:

1. **Κριτήριο ταξινόμησης της μικρότερης απόστασης προτύπων**. Το πιο διαδεδομένο κριτήριο ταξινόμησης με σύγκριση προτύπων είναι η εύρεση της κατηγορίας εκείνης, το πρωτότυπο της οποίας έχει την μικρότερη απόσταση από το άγνωστο παραμετρικό διάνυσμα. Το κριτήριο ταξινόμησης ονομάζεται ταξινόμηση της μικρότερης απόστασης (minimum distance pattern classification) :

$$\mathrm{x} \in \omega_j \quad \text{ανν} \quad d\left(\mathrm{x}, \omega_j\right) < d\left(\mathrm{x}, \omega_i\right) \qquad \forall j = 1, N$$

όπου ‘ανν’ είναι η συντομογραφία της έκφρασης ‘αν και μόνο αν’, και **N** ο αριθμός των κατηγοριών που αναγνωρίζει το σύστημα.

Κριτήρια Ταξινόμησης (2)

2. <u>Κριτήριο ταξινόμησης των Κ-πλησιέστερων πρωτοτύπων</u>. Στην περίπτωση, κατά την οποία η περιγραφή των κατηγοριών γίνεται με περισσότερα του ενός πρωτότυπα, τότε εκτός από το κριτήριο μικρότερης απόστασης έχουμε την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε και το κριτήριο των Κ-πλησιέστερων πρωτοτύπων (K-nearest neighbor classification).

Η ταξινόμηση πραγματοποιείται με την απομόνωση των Κ πρωτότυπων που παρουσιάζουν την μικρότερη απόσταση από το άγνωστο πρότυπο και ακολουθεί η ταξινόμηση στην κατηγορία εκείνη, τα πρωτότυπα της οποίας υπερτερούν σε αριθμό στο σύνολο των Κ-πλησιέστερων πρωτοτύπων.

- Το κριτήριο αυτό χρησιμοποιείται σπανιότερα, αλλά πολλές φορές δίνει μικρότερο σφάλμα από το κριτήριο ταξινόμησης της μικρότερης απόστασης.

Διαδικασία Εκπαίδευσης (1)

- Το τελευταίο βήμα που πρέπει να πραγματοποιηθεί για να ολοκληρωθεί η κατασκευή ενός συστήματος ταξινόμησης με σύγκριση προτύπων (μετά την επιλογή της **συνάρτησης απόστασης** και του **κριτηρίου ταξινόμησης**) είναι ο υπολογισμός του πρωτοτύπου ή των πρωτοτύπων κάθε κατηγορίας.

- Αυτό που πρέπει να γίνει, είναι να εκτελεστεί μια διαδικασία εκπαίδευσης με την οποία θα προσαρμοστούν οι παράμετροι του συστήματος, έτσι ώστε να λειτουργεί με την μέγιστη δυνατή αξιοπιστία για το σύνολο των παραδειγμάτων που είναι διαθέσιμα.

- Ο τρόπος μέτρησης της απόστασης των προτύπων παίζει καθοριστικό ρόλο, τόσο στον τρόπο υπολογισμού των πρωτοτύπων των κατηγοριών, όσο και στην τελική αξιοπιστία του συστήματος ταξινόμησης.

Διαδικασία Εκπαίδευσης (2)

• Πέντε είναι οι σημαντικότερες μέθοδοι που είναι διαθέσιμες για την υλοποίηση μιας διαδικασίας εκπαίδευσης:

1. Να γίνει χρήση όλων των προτύπων των παραδειγμάτων σαν πρωτότυπα.
2. Να χρησιμοποιηθεί μόνο ένα από αυτά.
3. Να γίνει επιλογή ενός πεπερασμένου αριθμού από τα πρότυπα των παραδειγμάτων σαν πρωτότυπα.
4. Να κατασκευαστεί ένα εικονικό (τεχνητό) πρωτότυπο για κάθε κατηγορία αντικειμένων.
5. Να κατασκευαστούν πολλαπλά εικονικά πρωτότυπα για κάθε κατηγορία αντικειμένων, βάσει κάποιου κριτηρίου βελτιστοποίησης.

Διαδικασία Εκπαίδευσης (3)

Αναλυτικά:

1. <u>Πρωτότυπα είναι όλα τα παραδείγματα</u>

Η μεθοδολογία αυτή ακολουθείται όταν διαθέτουμε μικρό αριθμό παραδειγμάτων ή όταν θέλουμε να έχουμε πολύ μεγάλη αξιοπιστία ταξινόμησης, χωρίς να μας ενδιαφέρει το υπολογιστικό κόστος.

<u>**Παράδειγμα 1ο**</u>

2. <u>Ένα παράδειγμα επιλέγεται σαν πρωτότυπο κατηγορίας</u>

Η μέθοδος αυτή προτιμάται, συνήθως, όταν υπάρχουν σοβαροί περιορισμοί στην ταχύτητα απόκρισης του συστήματος ταξινόμησης ή τα πρότυπα των κατηγοριών είναι σαφώς διαχωρισμένα. Ο συνήθης τρόπος προσδιορισμού του πρωτοτύπου πραγματοποιείται με την εύρεση του προτύπου εκείνου που έχει την μικρότερη, αθροιστικά, απόσταση από τα παραδείγματα της κατηγορίας του:

$$y = \arg\min_{y_j} \sum_{i=1}^{M} d\left(y_i, y_j\right)$$

Διαδικασία Εκπαίδευσης (4)

3. <u>Επιλογή Κ- προτύπων από τα παραδείγματα</u>

Η μέθοδος αυτή είναι η πιο διαδεδομένη στις εφαρμογές και αποτελεί, συνήθως, ένα συμβιβασμό ανάμεσα στην υπολογιστική πολυπλοκότητα του συστήματος ταξινόμησης που χρησιμοποιεί όλα τα παραδείγματα για πρωτότυπα και του συστήματος που χρησιμοποιεί μόνο ένα πρότυπο αναφοράς.
Το κριτήριο επιλογής ενός συνόλου Κ βέλτιστων προτύπων από τα παραδείγματα είναι το ακόλουθο:

$$\{z_1, z_2, \ldots, z_k\} = \arg\min_{z_1, z_2, \ldots, z_k} \sum_{i=1}^{M} \min_{z_x, y_i \neq z_x} d(y_i, z_x),$$

$$z_x \in \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}, y_i \in \{z_1, z_2, \ldots, z_M\}$$

- Ο υπολογισμός των πρωτοτύπων δεν μπορεί να γίνει αναζητώντας το ελάχιστο της συνάρτησης min, διότι δεν είναι παραγωγίσιμη. Η λύση της εξίσωσης πραγματοποιείται με **<u>επαναληπτικό αλγόριθμο</u>**.

Διαδικασία Εκπαίδευσης (5)

- Ο επαναληπτικός αλγόριθμος με τον οποίο επιτυγχάνεται μια διαδοχική προσέγγιση της βέλτιστης λύσης της εξίσωσης, για τον υπολογισμό των πρωτοτύπων, στην περίπτωση του κριτηρίου των Κ-προτύπων από τα παραδείγματα, είναι ο εξής:

Αλγόριθμος

a) Αρχικές συνθήκες. Για να υλοποιήσουμε μια διαδικασία αυτό-εκπαίδευσης, ξεκινάμε με μια τυχαία επιλογή των πρωτοτύπων $z_1, z_2, \ldots, z_k$ από τα πρότυπα των παραδειγμάτων και επαναληπτικά επαναπροσδιορίζουμε τις τιμές τους.

b) Ταξινόμηση προτύπων. Βάσει του κριτηρίου ταξινόμησης τα πρότυπα της κατηγορίας κατατάσσονται σε μια από τις Κ εικονικές κατηγορίες που ορίζονται από τα πρωτότυπα.

Διαδικασία Εκπαίδευσης (6)

c. Υπολογισμός πρωτοτύπων. Σε κάθε εικονική κατηγορία ορίζουμε το πρωτότυπο σαν το πρότυπο του παραδείγματος που ανήκει στην εικονική κατηγορία και ελαχιστοποιεί το άθροισμα των αποστάσεων του από τα υπόλοιπα πρότυπα της κατηγορίας.

d. Έλεγχος του κριτηρίου τερματισμού των επαναλήψεων. Αν κατά την διαδοχική εκτίμηση των πρωτοτύπων, αυτά παρέμειναν ίδια, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει, διαφορετικά επαναλαμβάνεται από το δεύτερο βήμα.

• Οι αλγόριθμοι αυτοί, γνωστοί σαν **αλγόριθμοι k-means** συγκλίνουν πάντα. Μειονέκτημα τους είναι ότι η σύγκλιση επιτυγχάνεται σε ένα τοπικό ελάχιστο του αθροίσματος των αποστάσεων των προτύπων από τα πρωτότυπα.

Διαδικασία Εκπαίδευσης (7)

4. <u>Υπολογισμός εικονικού πρωτοτύπου</u>.

Στην μέθοδο αυτή, αναζητείται, στον χώρο των προτύπων, το εικονικό εκείνο πρότυπο το οποίο θα ελαχιστοποιούσε την απόσταση του από τα πρότυπα των παραδειγμάτων κάθε κατηγορίας.

Αναζητείται, λοιπόν, το διάνυσμα $y_o, y_o \in S$ το οποίο ελαχιστοποιεί την ακόλουθη συνάρτηση:

$$y_o = \arg\min_y \sum_{i=1}^{M} d(y_i, y)$$

Διαδικασία Εκπαίδευσης (8)

Οι βέλτιστες τιμές του διανύσματος y_o βρίσκονται από την λύση της εξίσωσης:

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{\partial}{\partial y} d(y_i, y) = 0$$

- Δυστυχώς, η επίλυση της εξίσωσης δεν είναι εφικτή για όλες τις συναρτήσεις.

- Συχνά, στις περιπτώσεις στις οποίες δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτική αλγοριθμική λύση, καταφεύγουμε στην λύση της αναμενόμενης (μέσης) τιμής, η οποία δίνει, συνήθως, ένα πρωτότυπο κοντά στο πραγματικό βέλτιστο. Βέβαια, ο κανόνας αυτός δεν είναι απόλυτος. Έτσι:

$$y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} y_i$$

Παράδειγμα 2ο

Διαδικασία Εκπαίδευσης (9)

5. <u>Εύρεση k-εικονικών πρωτοτύπων</u>.

Η εύρεση ενός βέλτιστου αριθμού k-εικονικών πρωτοτύπων θεωρείται η πιο αποδοτική μέθοδος αυτόματου υπολογισμού των πρωτοτύπων κατηγοριών.

➢ Το κριτήριο της ελαχιστοποίησης εκφράζεται αλγεβρικά από την παρακάτω εξίσωση:

$$y = \arg\min_{y_1, y_2, \ldots, y_k} \sum_{i=1}^{M} \min_{z_x} d(y_i, z_x),$$

$$z_x \in \{z_1, z_2, \ldots, z_N\}, y_i \in S$$

➢ Επειδή, η συνάρτηση min δεν είναι παραγωγίσιμη, η χρήση επαναληπτικού αλγορίθμου k-means είναι απαραίτητη.

Διαδικασία Εκπαίδευσης (10)

• Στην περίπτωση της εύρεσης k-εικονικών πρωτοτύπων ο επαναληπτικός αλγόριθμος είναι:

Αλγόριθμος

1. Αρχικές συνθήκες. Ξεκινώντας από τυχαίες αρχικές τιμές για τα k πρωτότυπα, εκτελούμε το επαναληπτικό τμήμα του αλγορίθμου.
2. Ταυτοποίηση προτύπων. Βάσει του κριτηρίου ταξινόμησης, τα πρότυπα της κατηγορίας κατατάσσονται σε μια από τις K εικονικές κατηγορίες που ορίζονται από τα πρωτότυπα.
3. Υπολογισμός πρωτοτύπων. Σε κάθε εικονική κατηγορία ορίζουμε σαν πρωτότυπο εκείνο, το διάνυσμα του οποίου ελαχιστοποιεί το άθροισμα των αποστάσεων του από τα πρότυπα της κατηγορίας.
4. Έλεγχος του κριτηρίου τερματισμού των επαναλήψεων. Αν κατά την διαδοχική εκτίμηση των πρωτοτύπων, αυτά παρέμειναν ίδια τότε ο αλγόριθμος τερματίζει, διαφορετικά επαναλαμβάνεται από το 2ο βήμα.

Παράδειγμα 3ο

Συναρτήσεις Απόφασης (1)

• Μια διαφορετική κατηγορία συστημάτων ταξινόμησης προτύπων μπορεί να υλοποιηθεί με τις **<u>συναρτήσεις απόφασης</u>**.

• Για ένα σύστημα ταξινόμησης προτύπων Ν κατηγοριών, ορίζονται Ν(Ν-1) συναρτήσεις απόφασης, κάθε μια των οποίων χωρίζει τον χώρο των μετρήσεων σε δυο περιοχές, τον χώρο που καταλαμβάνουν τα πρότυπα της ω_i και τον χώρο που καταλαμβάνουν τα πρότυπα της ω_j.

➢ Με ω_i , ω_j συμβολίζουμε δυο τυχαίες κατηγορίες του συστήματος ταξινόμησης.

• Αν **x** τυχαίο πρότυπο, τότε οι αντίστοιχες συναρτήσεις απόφασης δίνονται από τις σχέσεις $g_{ij}(x)$ με i,j=1, *N*,j≠i κα $g_{ij}(\mathrm{x}) : S \rightarrow \Re$

Το πρότυπο **x** ταξινομείται στην κατηγορία ω_i όταν:

$$g_{ij}(\mathrm{x}) \rangle 0, \forall j \neq i, j = 1, N$$

Συναρτήσεις Απόφασης (2)

• Ο αριθμός των συναρτήσεων απόφασης αυξάνει, σημαντικά, με τον αριθμό των κατηγοριών του συστήματος ταξινόμησης. Ο μεγάλος αριθμός των συναρτήσεων απόφασης έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας κατά την διαδικασία ταξινόμησης, υψηλές απαιτήσεις μνήμης και μεγάλο αριθμό παραδειγμάτων.

Λύση

• Υπάρχουν δυο τεχνικές ελάττωσης του αριθμού των συναρτήσεων απόφασης:

1. Ορισμός της αντίθετης συνάρτησης απόφασης. Υποθέτοντας ότι, $g_{ij}(x)=-g_{ij}(x)$ ο αριθμός των συναρτήσεων ελαττώνεται στο μισό.

Πιο συγκεκριμένα, με τον ορισμό της αντίθετης συνάρτησης απόφασης, απαιτούνται N(N-1)/2 συναρτήσεις απόφασης για σύστημα ταξινόμησης N κατηγοριών.

Συναρτήσεις Απόφασης (3)

2. Διάσπαση της συνάρτησης απόφασης. Σε εφαρμογές στις οποίες ο αριθμός των κατηγοριών είναι μεγάλος, ο αριθμός των συναρτήσεων απόφασης δεν μπορεί να περιοριστεί σημαντικά, ακόμα και όταν χρησιμοποιήσουμε τον **ορισμό της αντίθετης συνάρτησης απόφασης**. Υποθέτοντας ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να διασπαστεί σε δυο τμήματα, μπορεί να υπάρξει μια δραστική μείωση του αριθμού των συναρτήσεων απόφασης.

- Το πρώτο τμήμα, που αποδίδει την επίδραση του διανύσματος **x** στα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της κατηγορίας ω_i , συμβολίζεται σαν $r_i(x)$ και ονομάζεται συνάρτηση διάκρισης.

- Το δεύτερο τμήμα, που αποδίδει την επίδραση του διανύσματος **x** στην συνάρτηση απόφασης όσον αφορά στην κατηγορία ω_j και συμβολίζεται σαν $r_j(x)$.

Συναρτήσεις Απόφασης (4)

- Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση απόφασης μπορεί να αναλυθεί σα μια διαφορά των συναρτήσεων διάκρισης (discriminant functions) ο αριθμός των συναρτήσεων διάκρισης που απαιτούνται για την πλήρη περιγραφή του συστήματος ταξινόμησης ισούται με τον αριθμό των κατηγοριών:

$$g_{ij}(\mathrm{x}) = r_i(\mathrm{x}) - r_j(\mathrm{x}) = -g_{ij}(\mathrm{x})$$

- Το **<u>κριτήριο ταξινόμησης</u>** για τις συναρτήσεις διάκρισης, προκύπτει ισοδύναμα από το κριτήριο των συναρτήσεων απόφασης και είναι το εξής:

$$\mathrm{x} \in \omega_i \quad \text{ανν} \quad r_i(\mathrm{x}) \rangle r_j(\mathrm{x}), \forall j \neq i$$

- Όταν κατασκευάζουμε σύστημα ταξινόμησης προτύπων με συναρτήσεις απόφασης, δεν είναι πάντα εφικτή η δυνατότητα λήψης απόφασης. Η μετάπτωση του συστήματος ταξινόμησης στην κατάσταση αδυναμίας λήψης κάποιας απόφασης, σε μερικές περιπτώσεις είναι επιθυμητή, π.χ σε συστήματα ασφαλείας, ενώ σε άλλες εφαρμογές όπως π.χ σε συστήματα αυτόματης πλοήγησης, η μη δυνατότητα λήψης απόφασης αποτελεί σαφές μειονέκτημα του συστήματος ταξινόμησης.

Συναρτήσεις Απόφασης (5)

• **<u>Θεώρημα</u>**: Αν η συνάρτηση απόφασης μπορεί να διασπαστεί σε διαφορά συναρτήσεων διάκρισης, τότε δεν υπάρχει πρότυπο το οποίο να μην ταξινομείται σε κάποια κατηγορία.

<u>Απόδειξη</u>

Για κάθε διάνυσμα **x** οι συναρτήσεις διάκρισης μπορούν να τοποθετηθούν κατά φθίνουσα σειρά, έστω:

$$r_i(\mathrm{x}) \rangle r_j(\mathrm{x}) \ldots \rangle r_m(\mathrm{x}) .$$

Αφού η συνάρτηση $r_i(x)$ έχει την μεγαλύτερη αριθμητική τιμή, τότε ικανοποιείται το κριτήριο ταξινόμησης για την κατηγορία ω_i.

Συναρτήσεις Απόφασης (6)

• Αναζητώντας κάποιο συνδετικό κρίκο ανάμεσα στις μεθόδους ταξινόμησης προτύπων με σύγκριση και με συναρτήσεις απόφασης, μπορεί να δειχθεί ότι αν οριστεί σαν απόσταση προτύπων το αντίστροφο της συνάρτησης διάκρισης κάθε κατηγορίας, τότε το κριτήριο ταξινόμησης με συναρτήσεις διάκρισης είναι ισοδύναμο με το κριτήριο ταξινόμησης προτύπων με την μικρότερη απόσταση:

$$\mathrm{x} \in \omega_i \quad \text{ανν} \quad r_i(\mathrm{x}) \rangle r_j(\mathrm{x}), \forall j \neq i \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{x} \in \omega_i \quad \text{ανν} \quad \frac{1}{d_i(\mathrm{x})} \rangle \frac{1}{d_j(\mathrm{x})}, \forall j \neq i \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{x} \in \omega_i \quad \text{ανν} \quad d_i(\mathrm{x}) \langle d_j(\mathrm{x}), \forall j \neq i$$

• Η ταξινόμηση προτύπων με συναρτήσεις απόφασης μπορεί να διακριθεί σε εκείνες τις μεθόδους που χρησιμοποιούν γραμμικές συναρτήσεις απόφασης και τις μεθόδους που χρησιμοποιούν μη-γραμμικές συναρτήσεις απόφασης, όπως τα συστήματα ταξινόμησης προτύπων που χρησιμοποιούν **νευρωνικά δίκτυα**.

Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (1)

• **Αλγόριθμος Perceptron**: Έστω σύστημα ταξινόμησης **N** κατηγοριών για το οποίο υπάρχουν M_i παραδείγματα σε κάθε μια από τις κατηγορίες του. Αν χρησιμοποιήσουμε γραμμικές συναρτήσεις απόφασης, για τις οποίες ισχύει ότι $g_{ij}(x)=-g_{ij}(x)$, τότε ο ακόλουθος επαναληπτικός αλγόριθμος συγκλίνει αν τα παραδείγματα είναι γραμμικά διαχωρίσιμα.

Αλγόριθμος

1. Αρχικές τιμές. Τοποθετούμε τυχαίες τιμές στους συντελεστές των N(N-1)/2 συναρτήσεων απόφασης.

2. Αναγνώριση. Επιλέγουμε τυχαία μια κατηγορία ω_i και από αυτήν το πρότυπο της X_m. Υπολογίζουμε όλες τις συναρτήσεις απόφασης $g_{ij}(X_m)$. Για όσες από αυτές η συνάρτηση απόφασης δεν είναι θετική, επαναπροσδιορίζουμε τους αντίστοιχους συντελεστές ως εξής:

$$w_{ij} = w_{ij} + a(\mathrm{x}_{\mathrm{m}}, 1)$$

όπου α είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (2)

3. Έλεγχος σύγκλισης. Αν με τον έλεγχο όλων των παραδειγμάτων εκπαίδευσης δεν πραγματοποιηθεί επαναπροσδιορισμός των συντελεστών των συναρτήσεων απόφασης, ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά επαναλαμβάνεται το προηγούμενο βήμα.

Παρατηρήσεις

a. Για να βελτιώσουμε την ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου, αρχικά τοποθετούμε μια σχετικά μεγάλη τιμή στον συντελεστή εκπαίδευσης, π.χ α=1. Στην συνέχεια επιλέγοντας παραδείγματα εκτελούμε το επαναληπτικό τμήμα του αλγορίθμου Perceptron.
b. Όταν ολοκληρωθεί ένας ολόκληρος κύκλος ελέγχου των παραδειγμάτων και δεν πραγματοποιηθεί καμιά μεταβολή των συντελεστών της συνάρτησης απόφασης, ο αλγόριθμος τερματίζει.
c. Αν το πρότυπο κάποιου παραδείγματος δεν ταξινομηθεί σωστά, τότε το διάνυσμα των συντελεστών βαρύτητας που έχουν τιμή, επαναπροσδιορίζονται και επαναλαμβάνεται ο κύκλος ελέγχου των παραδειγμάτων.

Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (3)

Παρατηρήσεις

d. Αν μετά από κάποιες επαναλήψεις, όλα τα πρότυπα ταξινομηθούν σωστά, τότε το ελάχιστο σφάλμα του συστήματος ταξινόμησης είναι 0% και γνωρίζουμε, επίσης, ότι τα πρότυπα είναι γραμμικά διαχωρίσιμα.

e. Αν το επαναληπτικό τμήμα του αλγορίθμου δεν τερματίζει, τότε ελαττώνουμε τον συντελεστή εκπαίδευσης α και επαναλαμβάνουμε τον αλγόριθμο. Η διαδικασία μείωσης του συντελεστή εκπαίδευσης επαναλαμβάνεται ξανά, αν και πάλι ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει.

f. Αν η αριθμητική τιμή του συντελεστή εκπαίδευσης μειωθεί σημαντικά χωρίς να πετύχουμε σύγκλιση, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε με αρκετά μεγάλη βεβαιότητα ότι τα πρότυπα δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμα.

Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (4)

• **<u>Αλγόριθμος Perceptron για συναρτήσεις διάκρισης</u>**. Αν οι συναρτήσεις απόφασης μπορούν να εκφραστούν σαν διαφορά γραμμικών συναρτήσεων διάκρισης $g_{ij}(\mathrm{x}) = -g_{ji}(\mathrm{x}) = r_i(\mathrm{x}, w_i) - r_j(\mathrm{x}, w_j)$ τότε ο επαναληπτικός αλγόριθμος Perceptron μπορεί να τροποποιηθεί ως εξής:

<u>Αλγόριθμος</u>

i. <u>Αρχικές τιμές</u>. Τοποθετούμε τυχαίες τιμές στους συντελεστές των N συναρτήσεων διάκρισης.
ii. <u>Ταξινόμηση</u>. Επιλέγουμε τυχαία μια κατηγορία ω_i και από αυτήν το πρότυπο x_m. Υπολογίζουμε την τιμή των N συναρτήσεων διάκρισης. Αν υπάρχουν κάποιες κατηγορίες ω_j για τις οποίες ισχύει $r_i(\mathrm{x}_m, w_i) \le r_j(\mathrm{x}_m, w_j)$ τότε επαναπροσδιορίζουμε τους συντελεστές βαρύτητας των αντίστοιχων κατηγοριών: $w_i = w_i + a(\mathrm{x}_m, 1)$, $w_j = w_j - a(\mathrm{x}_m, 1)$

1. <u>Έλεγχος σύγκλισης</u>. Αν με τον έλεγχο όλων των παραδειγμάτων εκπαίδευσης δεν πραγματοποιηθεί επαναπροσδιορισμός των συντελεστών των συναρτήσεων διάκρισης, ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά επαναλαμβάνεται το προηγούμενο βήμα.

Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (5)

• **<u>Αλγόριθμος ελαχιστοποίησης του σφάλματος εκτίμησης</u>**.

➢ Ο αλγόριθμος Perceptron έχει ένα ισχυρό μειονέκτημα. Συγκλίνει μόνο όταν τα παραδείγματα είναι γραμμικά διαχωρισμένα, διαφορετικά ο επαναπροσδιορισμός των συντελεστών των συναρτήσεων απόφασης ή των συντελεστών των συναρτήσεων διάκρισης καταλήγει σε μια ατέρμονη διαδικασία χωρίς καμία πιθανότητα σύγκλισης.

➢ Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι δύσκολο να κρίνουμε αν η αδυναμία σύγκλισης οφείλεται στην μεγάλη τιμή του συντελεστή εκπαίδευσης ή στην παρουσία μη γραμμικών διαχωρίσιμων παραδειγμάτων.

➢ Ο αλγόριθμος ελαχιστοποίησης του σφάλματος εκτίμησης είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος, ο οποίος συγκλίνει ακόμα και στις περιπτώσεις στις οποίες τα πρότυπα των παραδειγμάτων δεν είναι γραμμικά διαχωρισμένα.

Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (6)

Ακολουθεί η διαδικασία με την οποία προκύπτει ο αλγόριθμος ελαχιστοποίησης του σφάλματος εκτίμησης.

● Μελετάμε το πρόβλημα ορισμού της συνάρτησης απόφασης δυο κατηγοριών, αφού ο υπολογισμός των συντελεστών εξαρτάται μόνο από τα παραδείγματα δυο κατηγοριών κάθε φορά.

➢ Έστω $g_{12}(\mathrm{x}) = -g_{21}(\mathrm{x})$ και N_1,N_2 είναι ο αριθμός των παραδειγμάτων για τις δυο κατηγορίες αντίστοιχα.

➢ Ορίζω σαν **x** την επέκταση του διανύσματος κάθε προτύπου που προκύπτει με την προσθήκη μιας νέας διάστασης με τιμή 1, **x**=(**x**ʹ,1), όπου **x**ʹ είναι το διάνυσμα του προτύπου. Ακόμη, για κάθε ένα από τα διανύσματα εκπαίδευσης της κατηγορίας ω_2, αντιστρέφεται το πρόσημο των συντελεστών, x=-x. Η μετατροπή αυτή μετασχηματίζει το πρόβλημα εκπαίδευσης του συστήματος στην εύρεση των συντελεστών **w**, οι οποίοι ικανοποιούν τις ακόλουθες ανισότητες:

$$\mathrm{x}_i w \rangle 0, \forall i = 1,\ldots,M \quad \text{και} \quad M = N_1 + N_2$$

Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (7)

- Όλες τις συναρτήσεις μπορούμε να τις ομαδοποιήσουμε σε:

$$Xw\rangle 0, \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_M)$$

- Το πρόβλημα επίλυσης της ανίσωσης μπορεί να αντικατασταθεί από ένα πρόβλημα επίλυσης της εξίσωσης:

$$X \;\; w \;\; = \;\; b \;\; , \quad b \in \left(\Re^{+}\right)^{M}$$

- Αναλυτική λύση της παραπάνω εξίσωσης δεν μπορεί να επιτευχθεί, γι'αυτό τον λόγο καταφεύγουμε σε μια επαναληπτική λύση, η οποία να βελτιστοποιεί διαδοχικά μια συνάρτηση κριτηρίου. Η συνάρτηση σφάλματος δίνεται από την εξίσωση:

$$Er(X, w, b) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\left(w^{T} x_i - b_i\right)^2 = \frac{1}{2}\left\|Xw - b\right\|^2$$

- Η βέλτιστη τιμή του **w** προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σφάλματος.

Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (8)

- Επειδή μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση, μεταβάλλοντας δυο ανεξάρτητες μεταβλητές, τις **w** και **b**, υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης σφάλματος ως προς αυτές τις μεταβλητές.

$$\frac{\partial}{\partial w} Er(\mathrm{X}, w, b) = \mathrm{X}^T(\mathrm{X}w - b)$$

$$\frac{\partial}{\partial w} Er(\mathrm{X}, w, b) = -(\mathrm{X}w - b)$$

- Με γνωστή την τιμή **b,** η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης, βρίσκεται στο σημείο στο οποίο ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial w} Er(\mathrm{X}, w, b) = 0 \Rightarrow \mathrm{X}^T(\mathrm{X}w - b) = 0 \Rightarrow w = \left(\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^\mathrm{T} b$$

- Η έκφραση $\left(\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^\mathrm{T}$ ονομάζεται γενικευμένος αντίστροφος πίνακας X.

Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (9)

- Ο συντελεστής **b** επαναπροσδιορίζεται βάσει της μεθόδου βηματικής σύγκλισης:

$$b = b - c\frac{\partial}{\partial b}Er(\mathrm{x}, w, b)$$

- Για να έχουμε αποδεκτή λύση, δεν πραγματοποιούμε την απλή αντικατάσταση της παραγώγου που έχουμε βρει διότι γνωρίζουμε ότι οι συνιστώσες του διανύσματος **b** πρέπει να είναι πάντα θετικοί αριθμοί. Ο επαναπροσδιορισμός των συντελεστών του διανύσματος **b** πραγματοποιείται με την αναδρομική σχέση που ακολουθεί, μόνο στην περίπτωση κατά την οποία, οι συντελεστές αυτοί θα αυξηθούν αριθμητικά σε κάποιες από τις συνιστώσες τους.

$$b = b + \frac{c}{2}\left(\mathrm{X}w - b + \left|\mathrm{X}w - b\right|\right)$$

- Με την τεχνική αυτή προσεγγίζουμε την επίλυση της ανίσωσης, ικανοποιώντας ταυτόχρονα και τους περιορισμούς που έχουν τεθεί.

Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (10)

• Με βάση τα παραπάνω, ακολουθεί ο αλγόριθμος υπολογισμού των συναρτήσεων απόφασης από παραδείγματα, βασιζόμενος στην ελαχιστοποίηση του σφάλματος εκτίμησης.

Αλγόριθμος Ho-Kashyap

1. Αρχικές τιμές. Τοποθετούμε τυχαίους θετικούς αριθμούς στους συντελεστές του διανύσματος **b**.

2. Υπολογισμός των συντελεστών της συνάρτησης απόφασης. Με την σχέση που ακολουθεί πραγματοποιείται μια εκτίμηση του **w**.

$$w = \left(X^T X\right)^{-1} X^T b$$

Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (11)

3. <u>Έλεγχος σύγκλισης</u>. Αν $Xw>0$, τότε τα παραδείγματα είναι γραμμικά διαχωρίσιμα, όποτε και ο αλγόριθμος τερματίζει. Αν η παραπάνω συνθήκη δεν ικανοποιείται και επιπλέον οι μεταβολές του **w** κατά δυο διαδοχικές προσεγγίσεις έχουν μειωθεί σημαντικά, τότε έχουμε κατάσταση σύγκλισης του αλγορίθμου. Σε αυτή την περίπτωση τα παραδείγματα δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμα.

4. <u>Επαναπροσδιορισμός του **b**</u>. Η νέα τιμή του διανύσματος **b** υπολογίζεται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$b = b + \frac{c}{2}\left(\mathrm{X}w - b + \left|\mathrm{X}w - b\right|\right)$$

5. <u>Επανάληψη του αλγορίθμου</u>. Το επαναληπτικό τμήμα του αλγορίθμου εκτελείται από το δεύτερο βήμα.

- Ο συντελεστής **c** παίρνει τιμές στο διάστημα (0,1].

Μη Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (1)

• Οι **μη γραμμικές συναρτήσεις** απόφασης, μπορεί να θεωρηθεί ότι έχουν στενή συγγένεια με τα νευρωνικά συστήματα ταξινόμησης, διότι αυτά περιέχουν μη γραμμικούς τελεστές. Διαφέρουν, ωστόσο, από τα νευρωνικά δίκτυα στο εξής: Οι μη γραμμικές συναρτήσεις απόφασης δεν μπορούν να αναλυθούν σαν ένα πολυεπίπεδο διασυνδεδεμένο σύστημα όμοιων μη γραμμικών τελεστών, όπως συμβαίνει στα νευρωνικά δίκτυα.

• **Γενικευμένες συναρτήσεις απόφασης**.

➢ Γραμμικά διαχωρίσιμες κατηγορίες, είναι πολύ δύσκολο να βρεθούν σε πρακτικά προβλήματα. Η συνήθης κατάσταση είναι η ύπαρξη μη γραμμικών διαχωριστικών επιφανειών.

➢ Για να κατασκευάσουμε ένα σύστημα ταξινόμησης προτύπων με μεγάλη αξιοπιστία, σε αυτές τις περιπτώσεις, καταφεύγουμε σε μια τεχνική που σαν σκοπό έχει τον μη-γραμμικό μετασχηματισμό του χώρου των προτύπων, σε ένα νέο χώρο μετρήσεων στον οποίο τα παραδείγματα να είναι γραμμικά διαχωρίσιμα.

Μη Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (2)

• Ο μετασχηματισμός του χώρου των προτύπων σε ένα νέο χώρο μετρήσεων, όπου τα παραδείγματα θα είναι γραμμικά διαχωρίσιμα, επιτυγχάνεται με τον ορισμό της ακόλουθης συνάρτησης διάκρισης:

$$d(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{K+1} w_k f_k(\mathrm{x}) = w_1 f_1(\mathrm{x}) + w_2 f_2(\mathrm{x}) + \ldots + w_k f_k(\mathrm{x}) + w_{k+1}$$

όπου $f_k(\mathrm{x}), k = 1, \ldots, K$ είναι μονοδιάστατες συναρτήσεις του παραμετρικού διανύσματος του προτύπου.

➢ Η σχέση των συντελεστών βαρύτητας και των τιμών των συναρτήσεων είναι γραμμική, συνεπώς, η συνάρτηση απόστασης μπορεί να γραφεί ισοδύναμα σαν:

$$d(\mathrm{x}) = w\mathrm{x}^*$$

όπου $\mathrm{x}^* = (f_1(\mathrm{x}), f_2(\mathrm{x}), \ldots, f_k(\mathrm{x}), 1)^T$.

Μη Γραμμικές Συναρτήσεις Απόφασης (3)

Παρατηρήσεις

1. Στον μετασχηματισμένο χώρο των μετρήσεων ελέγχουμε την γραμμική διαχωρισιμότητα (εάν αυτό είναι δυνατόν) των παραδειγμάτων και εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Perceptron (ή την μέθοδο Ho-Kashyap) για τις συναρτήσεις διάκρισης των κατηγοριών και για τα μετασχηματισμένα διανύσματα $\mathbf{x}^*$.

2. Η διαχωρισιμότητα των προτύπων στον νέο χώρο των μετρήσεων, διευκολύνεται από την αύξηση των διαστάσεων του διανύσματος των προτύπων. Η τεχνική αυτή βοηθά την πιθανότητα εύρεσης ενός συντελεστή βαρύτητας $\mathbf{w}$, ο οποίος θα είναι σε θέση να διαχωρίσει τα πρότυπα των παραδειγμάτων, διότι με την αύξηση των διαστάσεων του διανύσματος του προτύπου, έχουμε αυτόματα κα ίσου αριθμού αύξηση των διαστάσεων του $\mathbf{w}$, με άμεση συνέπεια την αύξηση των βαθμών ελευθερίας του αλγορίθμου εκπαίδευσης. Η αύξηση των βαθμών ελευθερίας αυξάνει την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου, ταυτόχρονα όμως αυξάνει και την διακριτική ικανότητα της συνάρτησης απόφασης.

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς