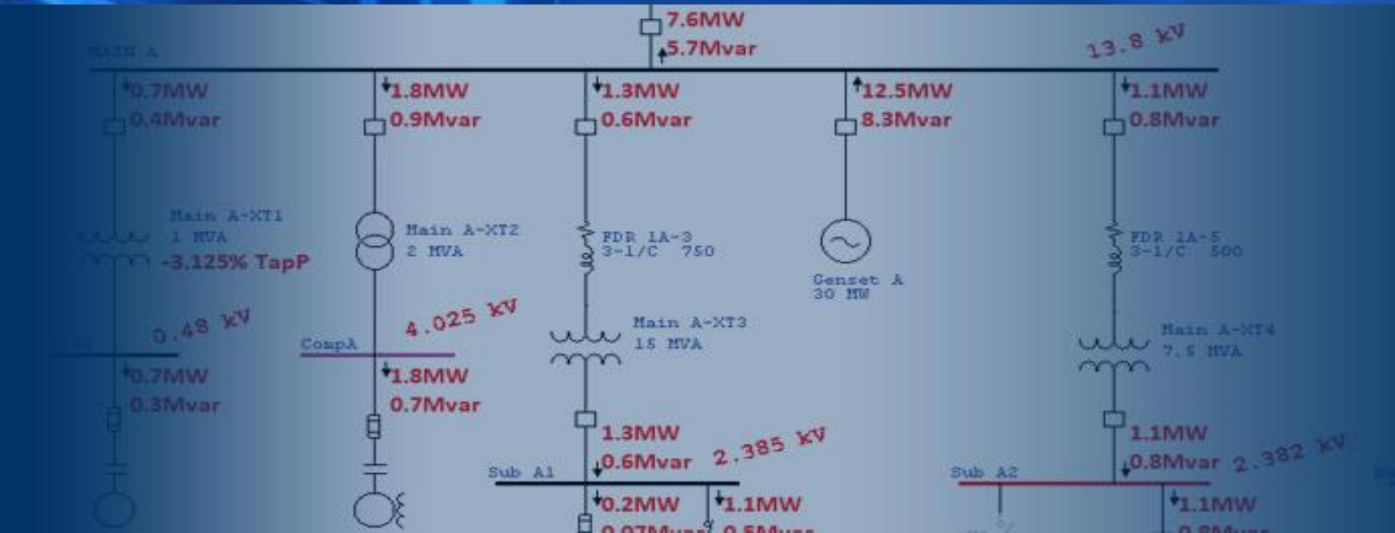
Ανάλυση Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας (3η ενότητα)

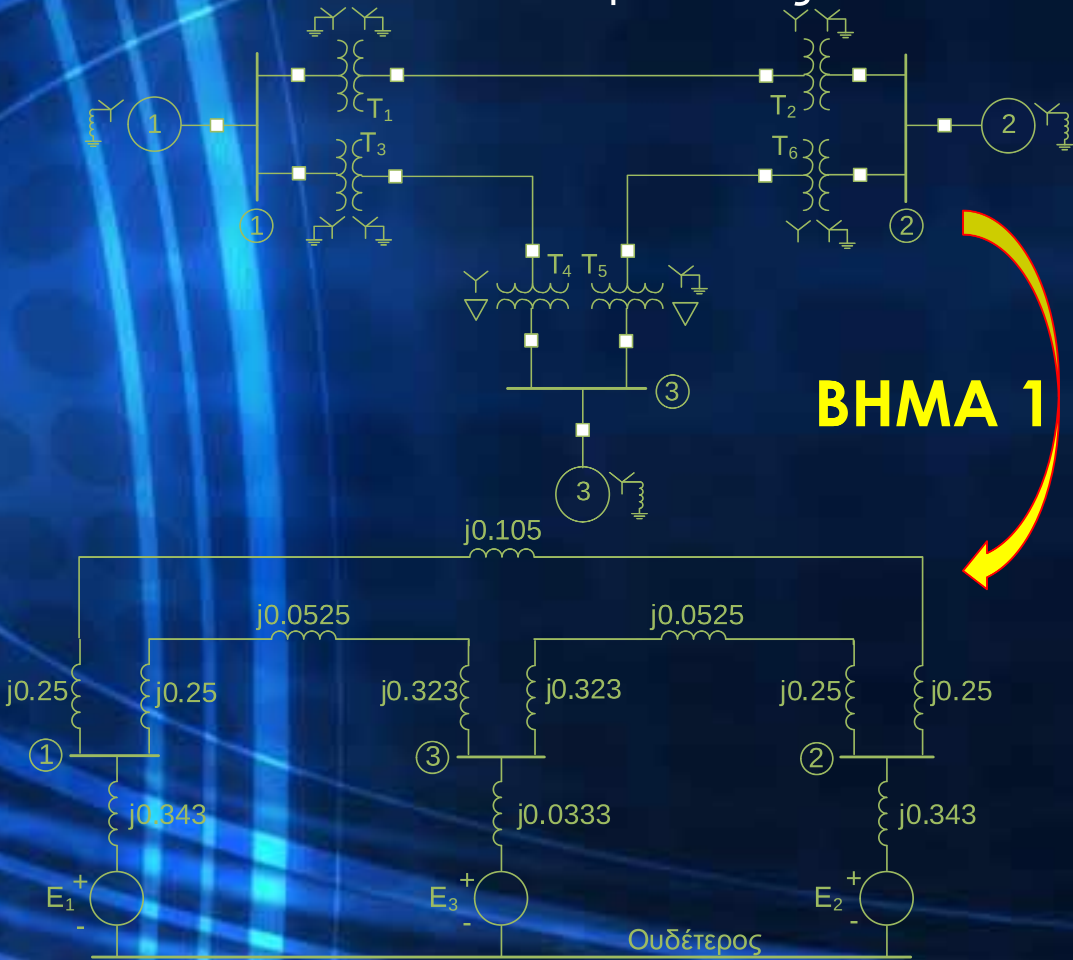
Παναγής Βοβός
Επίκ. Καθηγητής

Μοντέλο σύνθετης αγωγιμότητας συστήματος



Διαδικασία δημιουργίας μοντέλου συστήματος σε 3 βήματα

1. Σχηματισμός μονοφασικού ισοδυνάμου κυκλώματος.
2. Δημιουργία των εξισώσεων που το περιγράφουν.
3. Επίλυση των εξισώσεων.



ΒΗΜΑ 2: π.χ.
$\boldsymbol{Y_{bus} \cdot V_{bus} = I_{bus}}$

ΒΗΜΑ 3: π.χ.
με γνωστή I_{bus} :
$\boldsymbol{V_{bus} = Y_{bus}^{-1} \cdot I_{bus}}$

Βήμα 1: Δημιουργία ανά μονάδα μονοφασικό ισοδύναμο συστήματος

- Σε ισοζυγισμένα 3Φ συστήματα επιλύουμε τη μία φάση και εκμεταλλευόμαστε τη συμμετρία για τις υπόλοιπες.
- Άρα μας ενδιαφέρει το 1Φ ισοδύναμο κύκλωμα του προς επίλυση συστήματος.
- Προκύπτει από το μονογραμμικό διάγραμμα του, αν αντικατασταθεί κάθε μία συνιστώσα με το 1Φ ισοδύναμό της.
- Δυσκολίες στην επίλυση του ισοδύναμου κυκλώματος λόγω των διαφορετικών επίπεδων τάσης που δημιουργούν οι μετασχηματιστές.
- Ξεπερνιούνται όταν οι υπολογισμοί γίνονται στο ανά μονάδα σύστημα.
- Πρέπει λοιπόν τα 1Φ ισοδύναμα των συνιστωσών του συστήματος να εκφραστούν σε ανά μονάδα τιμές.
- Το 1Φ ισοδύναμο κύκλωμα που προκύπτει λέγεται ανά μονάδα 1Φ ισοδύναμο κύκλωμα του συστήματος.

Βάσεις ανά μονάδα ισοδύναμου συστήματος

- Οι ανά μονάδα τιμές ισχύος και τάσης κάθε συνιστώσας υπολογίζονται ίσες είτε με 1Φ ισχύ και φασική τάση ή 3Φ ισχύ και πολική τάση.
- Επιλέγουμε για βάσεις 3Φ ισχύ και πολική τάση, αφού συνήθως έτσι δίνονται απευθείας τα δεδομένα των συνιστωσών.
- Με τυχαίες βάσεις τάσεων στις δύο πλευρές μετασχηματιστή, οι ανά μονάδα τιμές αντιστάσεων θα ήταν διαφορετικές.
- Εξαλείφεται η «τμηματικοποίηση» του δικτύου από τους μετασχηματιστές:
  α) όταν επιλέγεται μία κοινή βάση ισχύος για όλο το σύστημα
  β) και ο λόγος των βάσεων τάσεων στις πλευρές ενός μετασχηματιστή είναι ίσος με το λόγο των ονομαστικών τάσεων του.

Προσαρμογή βάσεων γεννητριών και μετασχηματιστών

- Οι κατασκευαστές συνήθως δίνουν τα δεδομένα συνθέτων αντιστάσεων γεννητριών και μετασχηματιστών σε ανά μονάδα τιμές.
- Για βάσεις χρησιμοποιούν την ονομαστική τους ισχύ και την ονομαστική τους τάση.
- Θα πρέπει οι σύνθετες αντιστάσεις να αναφερθούν στις νέες βάσεις του συστήματος, στο σημείο που βρίσκονται : $Z_{pu}^{new} = Z_{pu}^{old} \frac{|V_b^{old}|^2}{|V_b^{new}|^2} \frac{|S_b^{new}|}{|S_b^{old}|}$

  old : βάσεις που χρησιμοποίησε ο κατασκευαστής (προσοχή στην αναφορά: δίνεται X_{l1} ή X_{l2})

  new:βάσεις συστήματος στο σημείο της γεννήτριας/μετασχηματιστή
- Οι σύνθετες αντιστάσεις γραμμών μεταφοράς δίνονται κατά κανόνα σε Ω. Μετατρέπονται σε ανά μονάδα τιμές με βάση : $|Z_{bi}|_{3\Phi} = \frac{|V_{bi}|_{3\Phi}^2}{|S_b|_{3\Phi}} \quad \Omega$

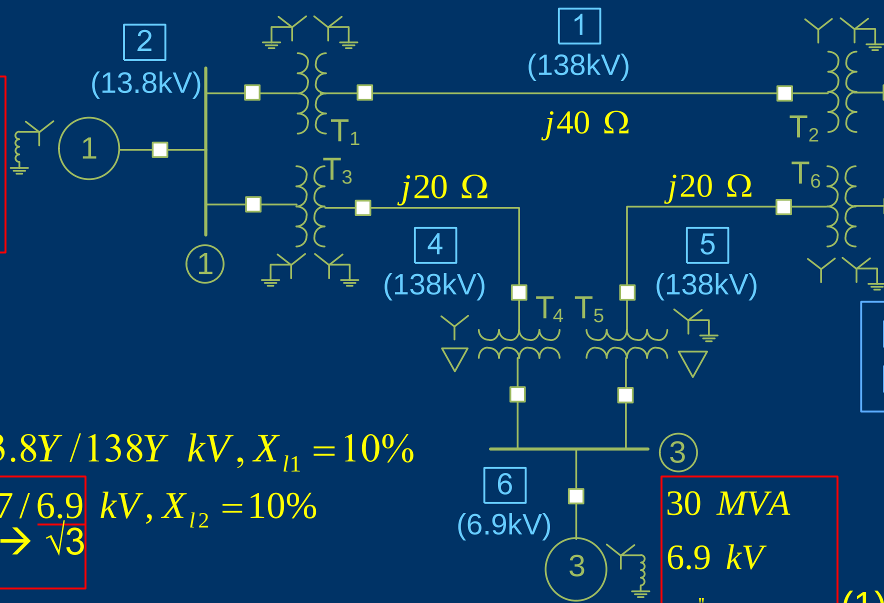
  $|S_b|_{3\Phi}$ κοινή βάση ισχύος συστήματος (MVA)

  $|V_{bi}|_{3\Phi}$ βάση τάσης τμήματος *i* δικτύου που βρίσκεται η γραμμή (kV)
- Η βάση ρεύματος για το ίδιο τμήμα δικτύου είναι : $|I_{bi}|_{3\Phi} = \frac{|S_b|_{3\Phi}}{\sqrt{3}|V_{bi}|_{3\Phi}} \quad \text{kA}$

Παράδειγμα διαδικασίας σχηματισμού ανά μονάδα ισοδύναμου

$X_{G1}=X_{G2}=$ j0.343 *pu* (1)

$20\ MVA$
$13.2\ kV$
$X''_{G1}=15\%$



$20\ MVA$
$13.2\ kV$
$X''_{G2}=15\%$

$|V_b|_{3\Phi}$=138kV για γραμμή 40Ω
$|S_b|_{3\Phi}$=50MVA βάση συστήματος

$$Z_{pu}^{new}=Z_{pu}^{old}\frac{|V_b^{old}|^2}{|V_b^{new}|^2}\frac{|S_b^{new}|}{|S_b^{old}|} \quad (1)$$

$Y-Y: 3\Phi, 20\ MVA, 13.8Y/138Y\ kV, X_{l1}=10\%$

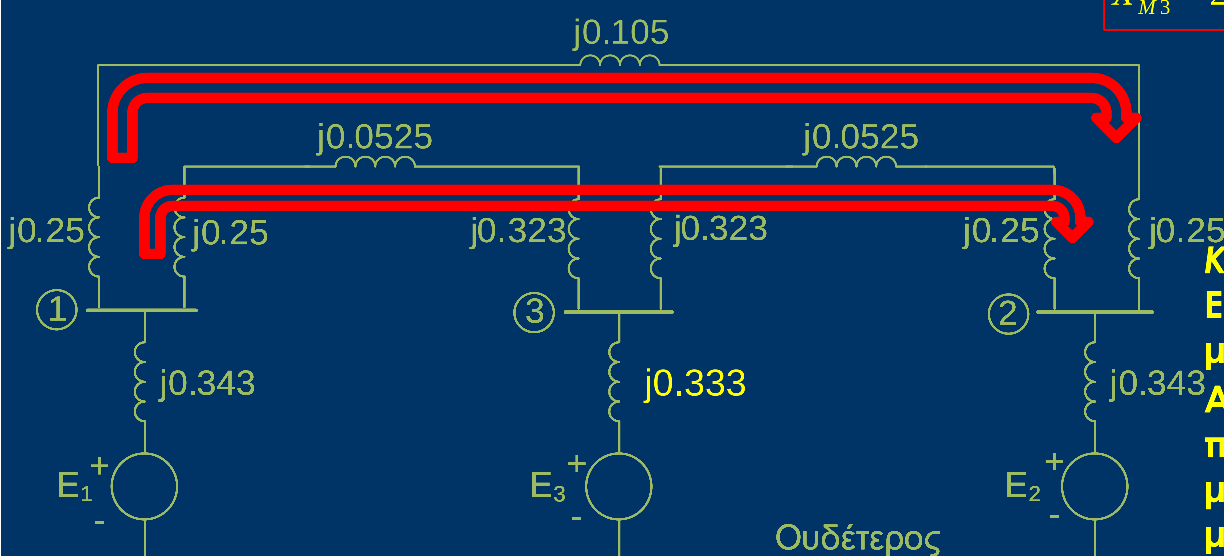
$Y-\Delta: 1\Phi, 5\ MVA, 79.67/6.9\ kV, X_{l2}=10\%$

Y-Y → √3

$30\ MVA$
$6.9\ kV$
$X''_{M3}=20\%$ (1)

X_{M3}= j0.333 pu

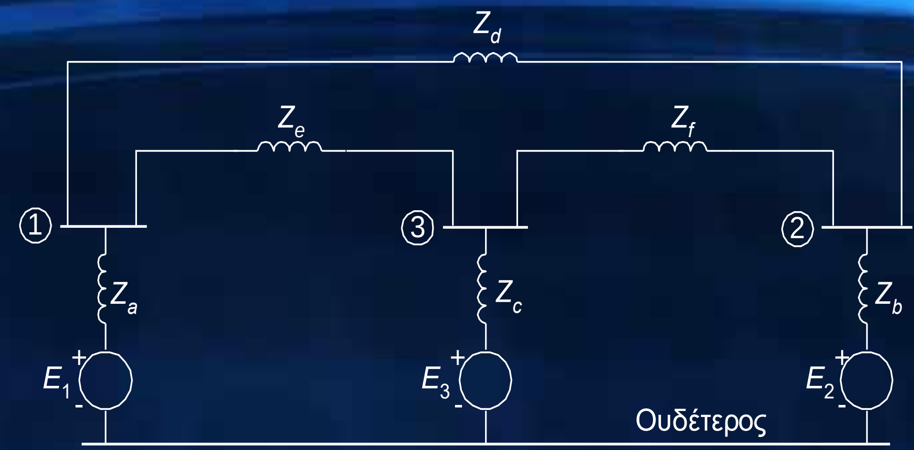
Για τις γραμμές : $|Z_{bi}|_{3\Phi}=\dfrac{|V_{bi}|^2_{3\Phi}}{|S_b|_{3\Phi}}\ \Omega$

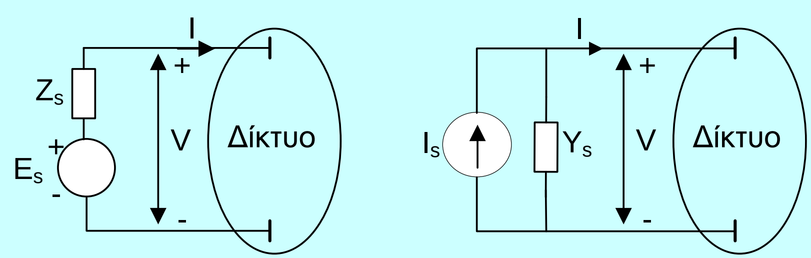


ΚΥΚΛΙΚΑ ΡΕΥΜΑΤΑ :

Εάν κάθε κλάδος είχε γινόμενο μιγαδικών λόγων μετασχηματισμού ≠ 1. Ακύρωση φασικών μετατοπίσεων στον παράλληλο κλάδο των Υ-Δ και Δ-Υ μετασχηματιστών του κινητήρα: μέτρα τάσεων και ρευμάτων, καθώς και ροές μιγαδικής ισχύος <u>ανεπηρέαστες</u>.

Δημιουργία ισοδύναμου με πηγές ρεύματος για την εξαγωγή εξισώσεων κόμβων

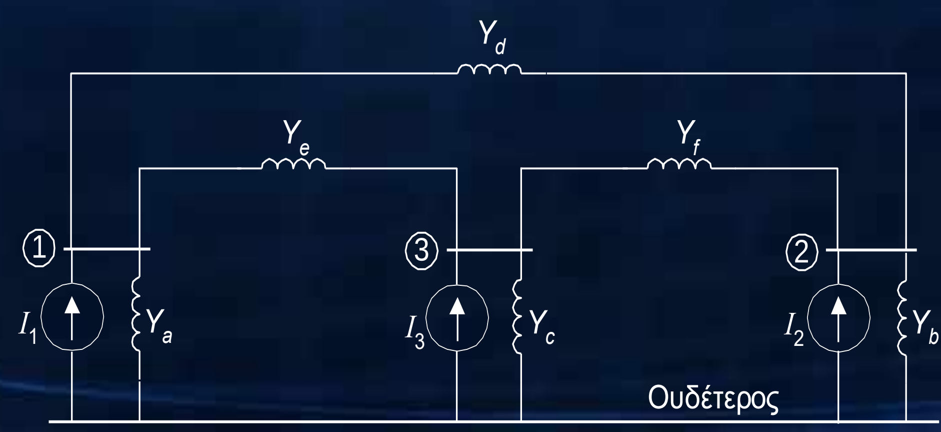




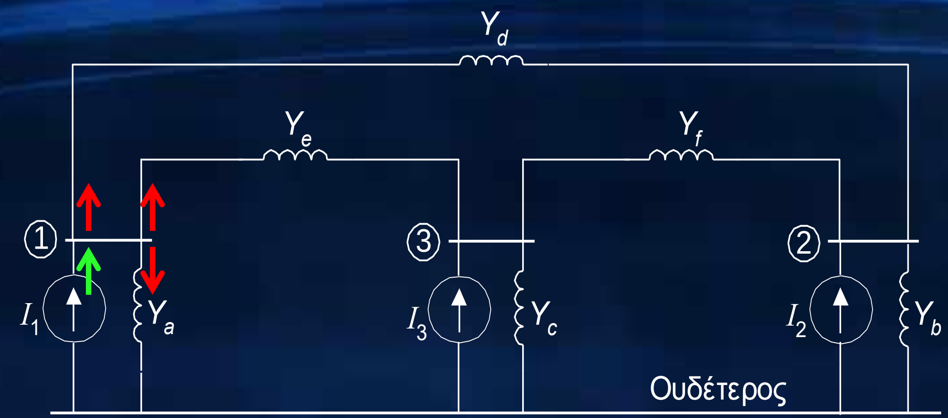
$$I_s = \frac{E_s}{Z_s}$$

$$Y_s = \frac{1}{Z_s}$$

$Y_{line} = 1/Z_{line}$



Βήμα 2: Εξισώσεις κόμβων



$$
\begin{cases}
I_1 = V_1Y_a + (V_1 - V_2)Y_d + (V_1 - V_3)Y_e = (Y_a + Y_d + Y_e)V_1 - Y_dV_2 - Y_eV_3 \\
I_2 = V_2Y_b + (V_2 - V_1)Y_d + (V_2 - V_3)Y_f = -Y_dV_1 + (Y_b + Y_d + Y_f)V_2 - Y_fV_3 \\
I_3 = V_3Y_c + (V_3 - V_1)Y_e + (V_3 - V_2)Y_f = -Y_eV_1 - Y_fV_2 + (Y_c + Y_e + Y_f)V_3
\end{cases}
$$

Τις γράφω σε μορφή πινάκων

$$
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} =
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad \end{array} \\
\begin{bmatrix}
Y_a + Y_d + Y_e & -Y_d & -Y_e \\
-Y_d & Y_b + Y_d + Y_f & -Y_f \\
-Y_e & -Y_f & Y_c + Y_e + Y_f
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}
$$

$$\boxed{I_{bus} = \boxed{Y_{bus}} V_{bus}}$$

Μέθοδοι σχηματισμού του πίνακα αγωγιμοτήτων (Y_{bus})

- *Με παρατήρηση (όταν δεν υπάρχουν συζεύξεις)*

Υπόθεση: Χωρίς αμοιβαίες συζεύξεις μεταξύ κλάδων

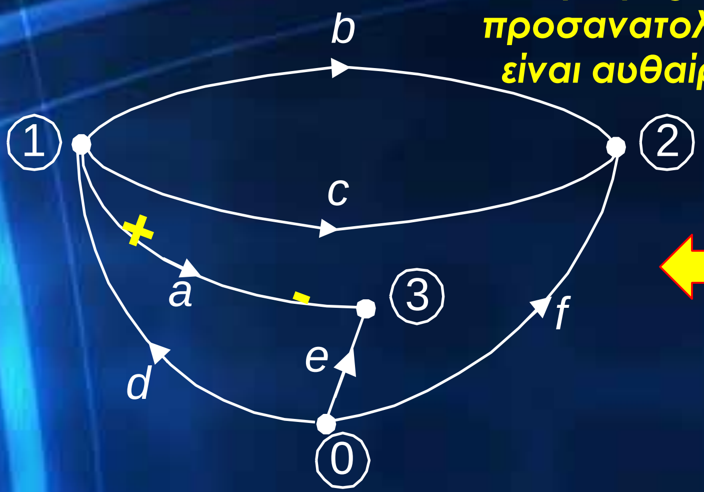
- *Κάθε διαγώνιο στοιχείο y_{ii} ισούται με το άθροισμα των αγωγιμοτήτων που συνδέονται στον κόμβο i.*
- *Κάθε μη διαγώνιο στοιχείο y_{ij} ισούται με το αρνητικό της αγωγιμότητας που συνδέεται μεταξύ των κόμβων i και j.*

- *Με χρήση του πίνακα πρόσπτωσης ζυγών*

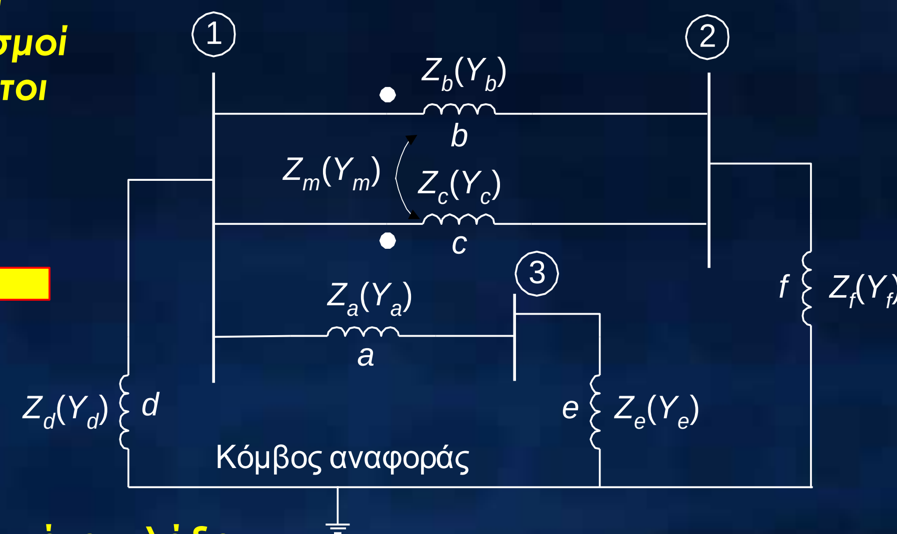
- *Με αλγοριθμική μέθοδο*

Σχηματισμός Y_{bus} με χρήση του πίνακα πρόσπτωσης ζυγών

Γράφος: οι προσανατολισμοί είναι αυθαίρετοι



Κλάδοι b και c αμοιβαία συζευγμένοι



κόμβοι

$$
A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

πίνακας πρόσπτωσης ζυγών

συζευγμένοι κλάδοι

$$
Y_\alpha = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{bmatrix}
Y_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & Y_b & Y_m & 0 & 0 & 0 \\
0 & Y_m & Y_c & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & Y_d & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & Y_e & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_f
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

αγωγιμότητες κλάδων

αρχέγονος πίνακας αγωγιμοτήτων

$$\boxed{Y_{bus} = A^T Y_\alpha A}$$

Αλγοριθμική μέθοδος σχηματισμού του πίνακα Y_{bus}

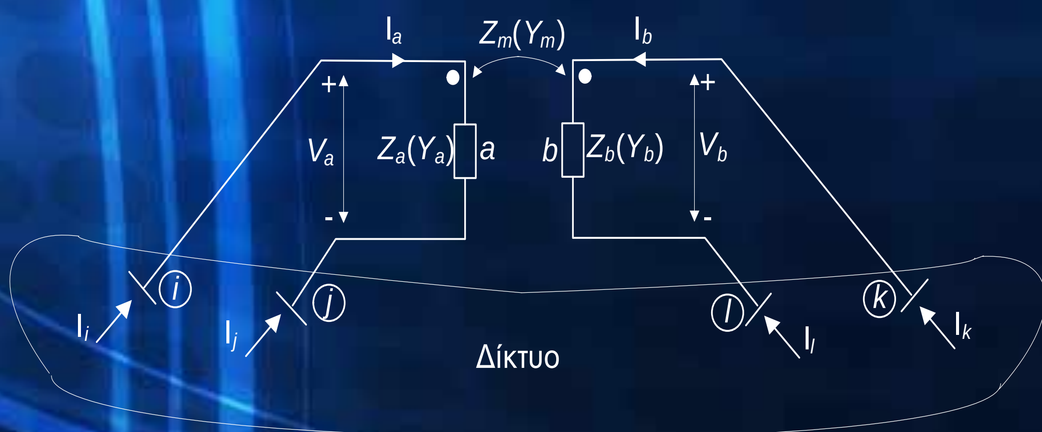
- Οι κλάδοι εξετάζονται με τη σειρά.
- Κάθε φορά γίνεται μεταβολή του Y_{bus}, που εξαρτάται από το εάν υπάρχει σύζευξη ή όχι:

- Κλάδοι χωρίς αμοιβαία σύζευξη

$$\left.\begin{aligned} y_{ii,new} &= y_{ii,old} + Y_k \\ y_{jj,new} &= y_{jj,old} + Y_k \end{aligned}\right\} \text{Πρόσθεση } Y_k \text{ στα 2 διαγώνια στοιχεία που αντιστοιχούν στα άκρα του κλάδου.}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{ij,new} &= y_{ij,old} - Y_k \\ y_{ji,new} &= y_{ji,old} - Y_k \end{aligned}\right\} \text{Αφαίρεση } Y_k \text{ από τα 2 μη-διαγώνια στοιχεία που αντιστοιχούν στα άκρα του κλάδου.}$$

- Αμοιβαία συζευγμένοι κλάδοι



Dot convention: η τάση λόγω αμοιβαίας επαγωγής είναι θετική όταν τα ρεύματα μπαίνουν ή βγαίνουν από τις τελείες και των δύο κλάδων. Διαφορετικά είναι αρνητική.

Τα Y_M μπαίνουν στα στοιχεία του Y_{bus} με δείκτες που ανήκουν ο ένας στον ένα συζευγμένο κλάδο και ο άλλος στον άλλο:
(+) όταν και οι δύο έχουν ή δεν έχουν τελεία
(-) όταν ο ένας έχει και ο άλλος δεν έχει τελεία ή αντίστροφα

$$\begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \\ I_l \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \\ l \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & j & k & l \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} Y_a & -Y_a & Y_m & -Y_m \\ -Y_a & Y_a & -Y_m & Y_m \\ \hline Y_m & -Y_m & Y_b & -Y_b \\ -Y_m & Y_m & -Y_b & Y_b \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \\ V_l \end{bmatrix}$$

Αλγοριθμική μέθοδος σχηματισμού του πίνακα Y_{bus}

$$y_{ii,new} = y_{ii,old} + Y_a$$

$$y_{jj,new} = y_{jj,old} + Y_a$$

$$y_{ij,new} = y_{ji,new} = y_{ij,old} - Y_a$$

$$y_{kk,new} = y_{kk,old} + Y_b$$

$$y_{ll,new} = y_{ll,old} + Y_b$$

$$y_{kl,new} = y_{lk,new} = y_{kl,old} - Y_b$$

Επίδραση αγωγιμοτήτων κλάδων

$$y_{ik,new} = y_{ki,new} = y_{ik,old} + Y_m$$

$$y_{il,new} = y_{li,new} = y_{il,old} - Y_m$$

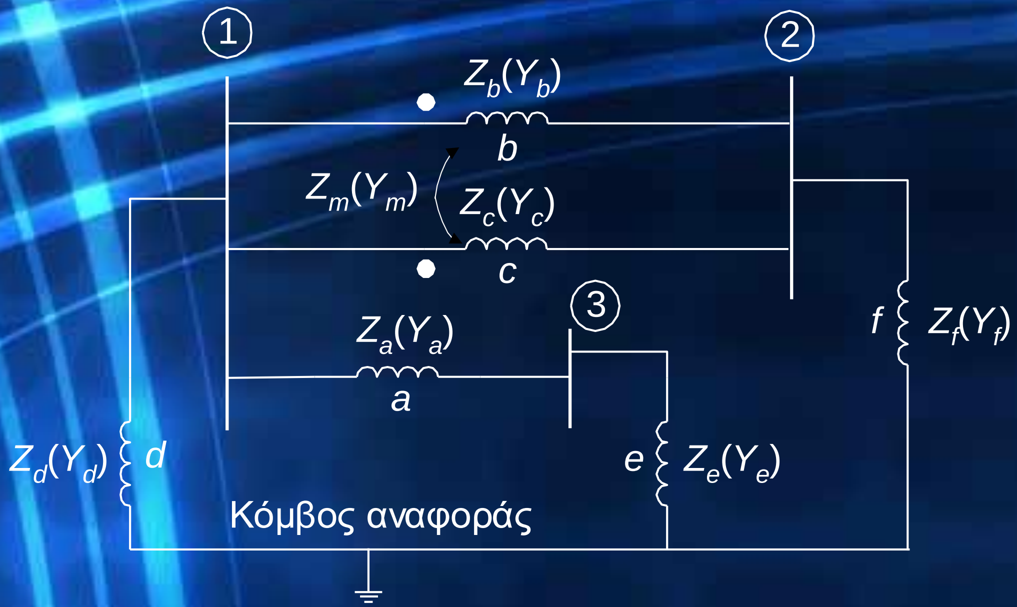
$$y_{jl,new} = y_{lj,new} = y_{jl,old} + Y_m$$

$$y_{jk,new} = y_{kj,new} = y_{jk,old} - Y_m$$

Επίδραση αμοιβαίας αγωγιμότητας

Σημείωση: έστω οι «τελείες» είναι στα i και k (ή j και l) .

Παράδειγμα αλγοριθμικής μεθόδου



1. Προσθήκη κλάδου *a* :

$$Y_{bus} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_a & 0 & -Y_a \\ 0 & 0 & 0 \\ -Y_a & 0 & Y_a \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Προσθήκη κλάδων *b και c* :

$$\begin{array}{c|cccc} & \text{i} & \text{j} & \text{k} & \text{l} \\ & 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & Y_b & -Y_b & Y_m & -Y_m \\ 2 & -Y_b & Y_b & -Y_m & Y_m \\ 1 & Y_m & -Y_m & Y_c & -Y_c \\ 2 & -Y_m & Y_m & -Y_c & Y_c \end{array}$$

i=k=1 και j=l=2

$$y_{11} = (Y_a) + Y_b + Y_m + Y_m + Y_c = Y_a + Y_b + Y_c + 2Y_m$$

$$y_{22} = (0) + Y_b + Y_m + Y_m + Y_c = Y_b + Y_c + 2Y_m$$

$$y_{12} = y_{21} = (0) - Y_b - Y_m - Y_m - Y_c = -Y_b - Y_c - 2Y_m$$

3. Προσθήκη κλάδου *d* :

$$y_{11} = (Y_a + Y_b + Y_c + 2Y_m) + Y_d = Y_a + Y_b + Y_c + Y_d + 2Y_m$$

4. Προσθήκη κλάδου *e* :

$$y_{33} = (Y_a) + Y_e = Y_a + Y_e$$

5. Προσθήκη κλάδου f :

$$y_{22} = (Y_b + Y_c + 2Y_m) + Y_f = Y_b + Y_c + Y_f + 2Y_m$$

ΤΕΛΙΚΑ

$$Y_{bus} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_c + Y_d + 2Y_m & -Y_b - Y_c - 2Y_m & -Y_a \\ -Y_b - Y_c - 2Y_m & Y_b + Y_c + Y_f + 2Y_m & 0 \\ -Y_a & 0 & Y_a + Y_e \end{bmatrix} \end{array}$$

Πλεονεκτήματα αλγοριθμικής μεθόδου σχηματισμού πίνακα Y_{bus}

- Πλεονεκτεί έναντι της μεθόδου με παρατήρηση, γιατί συνυπολογίζει συζεύξεις κλάδων.
- Προγραμματίζεται εύκολα, λόγο αλγοριθμικής δομής και απλότητάς.
- Πλεονεκτεί έναντι της μεθόδου με χρήση του πίνακα πρόσπτωσης ζυγών ή με παρατήρηση, διότι δεν απαιτεί τον εξαρχής υπολογισμό του Y_{bus} κάθε φορά που γίνεται τροποποίηση στη δομή του δικτύου:
    - Η προσθήκη ενός κλάδου αντιμετωπίζεται σαν επόμενος/τελευταίος κλάδος στον αλγόριθμο.
    - Η αφαίρεση ενός κλάδου αγωγιμότητα $Y_κ$ αντιμετωπίζεται με προσθήκη εν παραλλήλω αγωγιμότητας $–Y_κ$ (συνολικά 0).
    - Η μεταβολή της αγωγιμότητας ενός κλάδου αντιμετωπίζεται με αφαίρεση της υπάρχουσας αγωγιμότητας και προσθήκη νέας αγωγιμότητας με την επιθυμητή τιμή.

Βήμα 3: Επίλυση εξισώσεων - μέθοδος Gauss

- **Τα σύγχρονα ενεργειακά δίκτυα περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό συνιστωσών και χιλιάδες ζυγούς (κόμβους).**
- **Οι πίνακες Y_{bus} έχουν πολύ μεγάλες διαστάσεις.**
- **Οι εξισώσεις κόμβων που περιγράφουν τη συμπεριφορά τους είναι πολυάριθμες.**
- **Μία λύση υψηλού υπολογιστικού κόστους είναι η αντιστροφή της Y_{bus}, ώστε : $V_{bus}=Y_{bus}^{-1}\cdot I_{bus}$**
- **Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss λύνει τις εξισώσεις *n* κόμβων, χωρίς αντιστροφή της Y_{bus} , σε δύο φάσεις.**
- **Στην *ευθεία απαλοιφή n* εξισώσεις με *n* αγνώστους (*n*x*n*) γίνονται (*n*-1)x(*n*-1), μετά (*n*-2)x(*n*-2) … μέχρι 1x1 (1 άγνωστος = 1 γνωστός).**
- **Στην *αντίστροφη αντικατάσταση,* ο υπολογισμένος άγνωστος αντικαθίσταται στις εξισώσεις του προτελευταίου βήματος της ευθείας απαλοιφής, υπολογίζεται ένας ακόμα άγνωστος κλπ.**

Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου Gauss

Έστω δίκτυο τεσσάρων ζυγών (άρα $Y_{bus}^{(0)} \rightarrow 4x4$) .

Ευθεία απαλοιφή – βήμα 1

Εξισώσεις κόμβων

$$y_{11}^{(0)}V_1 + y_{12}^{(0)}V_2 + y_{13}^{(0)}V_3 + y_{14}^{(0)}V_4 = I_1^{(0)}$$

$$y_{21}^{(0)}V_1 + y_{22}^{(0)}V_2 + y_{23}^{(0)}V_3 + y_{24}^{(0)}V_4 = I_2^{(0)}$$

$$y_{31}^{(0)}V_1 + y_{32}^{(0)}V_2 + y_{33}^{(0)}V_3 + y_{34}^{(0)}V_4 = I_3^{(0)}$$

$$y_{41}^{(0)}V_1 + y_{42}^{(0)}V_2 + y_{43}^{(0)}V_3 + y_{44}^{(0)}V_4 = I_4^{(0)}$$

Διαιρώ με $y_{11}^{(0)}$

$$V_1 + u_{12}^{(1)}V_2 + u_{13}^{(1)}V_3 + u_{14}^{(1)}V_4 = V_1'^{(1)}$$

Λύνω την 1η εξίσωση ως προς V_1 και το απαλείφω από τις υπόλοιπες 3

$$y_{22}^{(1)}V_2 + y_{23}^{(1)}V_3 + y_{24}^{(1)}V_4 = I_2^{(1)}$$

$$y_{32}^{(1)}V_2 + y_{33}^{(1)}V_3 + y_{34}^{(1)}V_4 = I_3^{(1)}$$

$$y_{42}^{(1)}V_2 + y_{43}^{(1)}V_3 + y_{44}^{(1)}V_4 = I_4^{(1)}$$

όπου $u_{1j}^{(1)} = \dfrac{y_{1j}^{(0)}}{y_{11}^{(0)}}$ και $y_{ij}^{(1)} = y_{ij}^{(0)} - \dfrac{y_{i1}^{(0)}y_{1j}^{(0)}}{y_{11}^{(0)}} = y_{ij}^{(0)} - y_{i1}^{(0)}u_{1j}^{(1)}$ έχουν διαστάσεις αγωγιμοτήτων,

ενώ $V_1'^{(1)} = \dfrac{1}{y_{11}^{(0)}} I_1^{(0)}$ έχει πλέον διάσταση τάσης (έναντι του αρχικού I_1 στο διάνυσμα I_{bus}).

$I_i^{(1)} = I_i^{(0)} - \dfrac{y_{i1}^{(0)}}{y_{11}^{(0)}} I_1^{(0)} = I_i^{(0)} - y_{i1}^{(0)} V_1'^{(1)}$ είναι το ισοδύναμο ρεύμα που προκύπτει για τον ζυγό i μετά την απαλοιφή του ζυγού 1.

Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου Gauss

Ευθεία απαλοιφή – βήμα 2

Εξισώσεις κόμβων

$$y_{22}^{(1)}V_2 + y_{23}^{(1)}V_3 + y_{24}^{(1)}V_4 = I_2^{(1)}$$

Διαιρώ με $y_{22}^{(1)}$

$$V_2 + u_{23}^{(2)}V_3 + u_{24}^{(2)}V_4 = V_2'^{(2)}$$

$$y_{32}^{(1)}V_2 + y_{33}^{(1)}V_3 + y_{34}^{(1)}V_4 = I_3^{(1)}$$

$$y_{42}^{(1)}V_2 + y_{43}^{(1)}V_3 + y_{44}^{(1)}V_4 = I_4^{(1)}$$

Λύνω την 1η εξίσωση ως προς V_2 και το απαλείφω από τις υπόλοιπες 2

$$\begin{cases} y_{33}^{(2)}V_3 + y_{34}^{(2)}V_4 = I_3^{(2)} \\ y_{43}^{(2)}V_3 + y_{44}^{(2)}V_4 = I_4^{(2)} \end{cases}$$

όπου $u_{2j}^{(2)} = \dfrac{y_{2j}^{(1)}}{y_{22}^{(1)}}$ και $y_{ij}^{(2)} = y_{ij}^{(1)} - \dfrac{y_{i2}^{(1)}y_{2j}^{(1)}}{y_{22}^{(1)}} = y_{ij}^{(1)} - y_{i2}^{(1)}u_{2j}^{(2)}$ έχουν διαστάσεις αγωγιμοτήτων,

ενώ $V_2'^{(2)} = \dfrac{1}{y_{22}^{(1)}}I_2^{(1)}$ έχει πλέον διάσταση τάσης (έναντι του αρχικού I_2 στο διάνυσμα I_{bus}).

$$I_i^{(2)} = I_i^{(1)} - \frac{y_{i2}^{(1)}}{y_{22}^{(1)}}I_2^{(1)} = I_i^{(1)} - y_{i2}^{(1)}V_2'^{(2)}$$

είναι το νέο ισοδύναμο ρεύμα που προκύπτει για τον ζυγό i μετά την απαλοιφή και του ζυγού 2.

Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου Gauss

Ευθεία απαλοιφή – βήμα 3

Εξισώσεις κόμβων

$$y_{33}^{(2)}V_3 + y_{34}^{(2)}V_4 = I_3^{(2)}$$

$$y_{43}^{(2)}V_3 + y_{44}^{(2)}V_4 = I_4^{(2)}$$

Διαιρώ με $y_{33}^{(2)}$

$$V_3 + u_{34}^{(3)}V_4 = V_3'^{(3)}$$

$$y_{44}^{(3)}V_4 = I_4^{(3)}$$

Λύνω την 1η εξίσωση ως προς V_3 και το απαλείφω από την δεύτερη

Ευθεία απαλοιφή - βήμα 4 (μόνο αυτό !)

$$\boxed{V_4 = \frac{I_4^{(3)}}{y_{44}^{(3)}} = V_4'^{(4)}}$$

Τέλος ευθείας απαλοιφής ! Ένας άγνωστος (V_4) υπολογίστηκε. Ξεκινά η αντίστροφη αντικατάσταση

όπου $u_{34}^{(3)} = \frac{y_{34}^{(2)}}{y_{33}^{(2)}}$ και $y_{44}^{(3)} = y_{44}^{(2)} - \frac{y_{43}^{(2)}y_{34}^{(2)}}{y_{33}^{(2)}} = y_{44}^{(2)} - y_{43}^{(2)}u_{34}^{(3)}$ έχουν διαστάσεις αγωγιμοτήτων,

ενώ $V_3'^{(3)} = \frac{1}{y_{33}^{(2)}} I_3^{(2)}$ έχει πλέον διάσταση τάσης (έναντι του αρχικού I_3 στο διάνυσμα I_{bus}).

$$I_4^{(3)} = I_4^{(2)} - \frac{y_{43}^{(2)}}{y_{33}^{(2)}} I_3^{(2)} = I_4^{(2)} - y_{43}^{(2)}V_3'^{(2)}$$

- Είναι το νέο ισοδύναμο ρεύμα που προκύπτει για τον τελευταίο ζυγό (4) μετά την απαλοιφή και του ζυγού 3.
- Δηλαδή έχουμε ουσιαστικά μία ισοδύναμη πηγή ρεύματος $I_4^{(3)}$ που τροφοδοτεί την μοναδική αγωγιμότητα $y_{44}^{(3)}$, ώστε να προκύψει η αρχική τάση (V_4) στα άκρα του ζυγού 4 (χωρίς καμία απαλοιφή).

Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου Gauss

Ευθεία απαλοιφή - αποτέλεσμα

$$V_1 + u_{12}^{(1)} V_2 + u_{13}^{(1)} V_3 + u_{14}^{(1)} V_4 = V_1'^{(1)} \quad (1)$$

$$V_2 + u_{23}^{(2)} V_3 + u_{24}^{(2)} V_4 = V_2'^{(2)} \quad (2)$$

$$V_3 + u_{34}^{(3)} V_4 = V_3'^{(3)} \quad (3)$$

$$\boxed{V_4 = \frac{I_4^{(3)}}{y_{44}^{(3)}} = V_4'^{(4)}} \quad (4)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} & u_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & u_{23}^{(2)} & u_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_1'^{(1)} \\ V_2'^{(2)} \\ V_3'^{(3)} \\ V_4'^{(4)} \end{bmatrix}}$$

Ο πίνακας Y_{bus} έγινε ο άνω τριγωνικός U των «συντελεστών Gauss»

Το διάνυσμα I_{bus} μετατράπηκε στο διάνυσμα V' (γνωστό)

Αντίστροφη αντικατάσταση

- Με γνωστή την V_4 από την (4), την αντικαθιστώ στην (3), από όπου υπολογίζω την V_3.
- Αντικαθιστώ τις V_3 και V_4 στην (2), από όπου υπολογίζω την V_2.
- Αντικαθιστώ τις V_2, V_3 και V_4 στην (1) για να υπολογίσω την V_1, τελευταίο άγνωστο.

Αλγοριθμική εκτέλεση μεθόδου Gauss

1. Για όλα τα *k* πλην του τελευταίου (δηλαδή *k*=1, *k*=2, … , *k*=*n*-1)

$$u_{kj}^{(k)} = \frac{y_{kj}^{(k-1)}}{y_{kk}^{(k-1)}} \quad \text{για} \;\; j = k+1,\ldots,n$$

Υπολογίζω τους συντελεστές Gauss της γραμμής *k* δεξιά της διαγωνίου.

$$V_k'^{(k)} = \frac{1}{y_{kk}^{(k-1)}} I_k^{(k-1)}$$

Υπολογίζω την ισοδύναμη τάση του ζυγού *k* που απαλείφεται (ίδια γραμμή με τους συντελεστές Gauss).

$$y_{ij}^{(k)} = y_{ij}^{(k-1)} - \frac{y_{ik}^{(k-1)} y_{kj}^{(k-1)}}{y_{kk}^{(k-1)}} = y_{ij}^{(k-1)} - y_{ik}^{(k-1)} u_{kj}^{(k)} \quad \text{για} \;\; i, j = k+1,\ldots,n$$

Υπολογίζω αγωγιμότητες και ρεύματα ισοδύναμου δικτύου για ζυγούς που παραμένουν.

$$I_i^{(k)} = I_i^{(k-1)} - \frac{y_{ik}^{(k-1)}}{y_{kk}^{(k-1)}} I_k^{(k-1)} = I_i^{(k-1)} - y_{ik}^{(k-1)} V_k'^{(k)} \quad \text{για} \;\; i = k+1,\ldots,n$$

2. Για *k*=*n* κάνω μόνο αυτό!

$$\boxed{V_k'^{(k)} = \frac{1}{y_{kk}^{(k-1)}} I_k^{(k-1)}}$$

3. Σχηματίζω το σύστημα $U \cdot V_{bus} = V'$

4. Αντικαθιστώ τη τιμή της μεταβλητής της τελευταίας γραμμής στην προτελευταία. Υπολογίζεται μία ακόμα μεταβλητή. Τις δύο γνωστές μεταβλητές τις αντικαθιστώ στην 3η γραμμή από το τέλος. Συνεχίζουν έτσι οι υπολογισμοί έως ότου όλο το V_{bus} γίνει γνωστό.

Σημείωση: *Ευθεία απαλοιφή*: **1-3**. *Αντίστροφη αντικατάσταση*: **4**

Μείωση δικτύου

- Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss μειώνουμε το μέγεθος του δικτύου (Y_{bus} μειώνεται), διατηρώντας τους ζυγούς που μας ενδιαφέρουν.
- Οι ζυγοί που δεν μας ενδιαφέρουν μαθηματικά «εξαφανίζονται», δηλαδή οι τάσεις και οι εγχύσεις ρεύματός τους δεν εμφανίζονται στις εξισώσεις.
- Εάν θέλουμε να απαλείψουμε *r* από τους *n συνολικά* ζυγούς, τότε : αριθμούμε πρώτα αυτούς τους ζυγούς (1 ,2 , … , *r*) και μετά αυτούς που θέλουμε να διατηρήσουμε (*r*+1 , *r*+2 , … , *n*) .
- Εφαρμόζουμε αλγοριθμικά τη μέθοδο του Gauss για *k*=1, … , *r* .
- Ο αλγόριθμος παράγει ένα μειωμένο δίκτυο με *n*-*r* ζυγούς , όπου προφανώς ο πίνακας Ybus είναι (*n*-*r*)x(*n*-*r*).

Απαλοιφή ζυγών μηδενικής έγχυσης ρεύματος (μείωση δικτύου κατά Kron)

- Σε ζυγούς χωρίς φορτία ή γεννήτριες έχουμε μηδενική έγχυση ρεύματος (στην Ανάλυση Ροής *P*+j*Q*=0) .
- Οι ζυγοί αυτοί είναι υποψήφιοι για απαλοιφή, γιατί δεν είναι συνήθως αναγκαίο να υπολογίσουμε την τάση σε αυτούς.
- Εάν ο ζυγός *p* έχει I_p=0, τότε διαιρώ την εξίσωση κόμβου του με y_{pp} :

Λύνω ως προς $\mathbf{V_p}$

$$\frac{y_{p1}}{y_{pp}}V_1 + \ldots + V_p + \ldots + \frac{y_{pn}}{y_{pp}}V_n = 0$$

Αντικαθιστώ σε όλες τις άλλες εξισώσεις κόμβων τη V_p : αλλάζουν οι αγωγιμότητες/συντελεστές των τάσεων των κόμβων που παραμένουν.

- Τελικά, αυτές υπολογίζονται σε :

$$y_{ij}^{(new)} = y_{ij} - \frac{y_{ip}y_{pj}}{y_{pp}} \qquad \text{για } i,j = 1,\ldots,n \qquad i,j \neq p$$

- <u>Σημείωση</u>: οι *y* επανυπολογίζονται όλες σε κάθε απαλοιφή κόμβου.

Τριγωνική παραγοντοποίηση

- Εφαρμόζεται στις μελέτες που ο πίνακας Y_{bus} δεν μεταβάλλεται, δηλαδή η δομή και οι παράμετροι του δικτύου παραμένουν σταθερά.
- Τότε η επίλυση ως προς την V_{bus} γίνεται για διαφορετικές τιμές του I_{bus}.
- Για να το πετύχω εκφράζω τις ισοδύναμες τάσεις V' από την ευθεία απαλοιφή Gauss, συναρτήσει των αρχικών εγχύσεων ρευμάτων I.
- Π.χ. για το δίκτυο 4 ζυγών:

$$V_1'^{(1)} = \frac{1}{y_{11}^{(0)}} I_1^{(0)} \quad V_2'^{(2)} = \frac{1}{y_{22}^{(1)}} I_2^{(1)} \quad V_3'^{(3)} = \frac{1}{y_{33}^{(2)}} I_3^{(2)} \quad V_4 = \frac{I_4^{(3)}}{y_{44}^{(3)}} = V_4'^{(4)}$$

- Θέλω όμως τις «πραγματικές» εγχύσεις και όχι τις «ισοδύναμες» εγχύσεις που προκύπτουν κατά την ευθεία απαλοιφή των ζυγών.
- Εφαρμόζουμε τον γνωστό τύπο από τη μέθοδο Gauss για το ρεύμα και υπολογίζουμε διαδοχικά $I_i^{(k)}$, $I_i^{(k-1)}$, … έως ότου φτάσουμε στο επιθυμητό $I_i^{(0)}$:

$$I_i^{(k)} = I_i^{(k-1)} - \frac{y_{ik}^{(k-1)}}{y_{kk}^{(k-1)}} I_k^{(k-1)} = I_i^{(k-1)} - y_{ik}^{(k-1)} V_k'^{(k)} \quad (2)$$

Τριγωνική παραγοντοποίηση (συνέχεια)

- Έτσι, οι εξισώσεις των *V΄ εκφράζονται συναρτήσει των* $I_i^{(0)}$:

$$V_1'^{(1)} = \frac{1}{y_{11}^{(0)}} I_1^{(0)}$$

$$V_2'^{(2)} = \frac{1}{y_{22}^{(1)}} I_2^{(1)} \xrightarrow{(2)} y_{22}^{(1)} V_2'^{(2)} = I_2^{(0)} - y_{21}^{(0)} V_1'^{(1)}$$

$$V_3'^{(3)} = \frac{1}{y_{33}^{(2)}} I_3^{(2)} \xrightarrow{(2)} y_{33}^{(2)} V_3'^{(3)} = I_3^{(0)} - y_{31}^{(0)} V_1'^{(1)} - y_{32}^{(1)} V_2'^{(2)}$$

$$V_4 = \frac{I_4^{(3)}}{y_{44}^{(3)}} = V_4'^{(4)} \xrightarrow{(2)} y_{44}^{(3)} V_4'^{(4)} = I_4^{(0)} - y_{41}^{(0)} V_1'^{(1)} - y_{42}^{(1)} V_2'^{(2)} - y_{43}^{(2)} V_3'^{(3)}$$

- Λύνοντας κάθε εξίσωση ως προς $I_i^{(0)}$ και γράφοντας σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} y_{11}^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ y_{31}^{(0)} & y_{32}^{(1)} & y_{33}^{(2)} & 0 \\ y_{41}^{(0)} & y_{42}^{(1)} & y_{43}^{(2)} & y_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1'^{(1)} \\ V_2'^{(2)} \\ V_3'^{(3)} \\ V_4'^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^{(0)} \\ I_2^{(0)} \\ I_3^{(0)} \\ I_4^{(0)} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{LV' = I_{bus}}$$

Τριγωνική παραγοντοποίηση (συνέχεια)

$$\left.\begin{array}{l} L\boxed{V'} = I_{bus} \\ UV_{bus} = \boxed{V'} \end{array}\right\} \boxed{LUV_{bus} = I_{bus}} \Rightarrow Y_{bus} = LU$$

Η επίλυση ως προς την V_{bus} γίνεται σε δύο βήματα:

<u>Βήμα 1ο</u> (ευθεία αντικατάσταση)

Με I_{bus} γνωστή, η λύση της $LV' = I_{bus}$ ως προς *V΄* γίνεται ταχύτατα, αφού η *L* είναι *κάτω τριγωνική*.

Ξεκινάμε από την πρώτη σειρά/εξίσωση και κινούμαστε προς τα κάτω με απλή αντικατάσταση μέχρι να υπολογιστεί ολόκληρο το διάνυσμα *V΄*.

<u>Βήμα 2ο</u> (αντίστροφη αντικατάσταση)

Με V΄ γνωστή, η λύση της $UV_{bus} = V'$ ως προς V_{bus} γίνεται ταχύτατα, αφού η *U* είναι *άνω τριγωνική*.

Ξεκινάμε από την τελευταία σειρά/εξίσωση και κινούμαστε προς τα πάνω με απλή αντικατάσταση μέχρι να υπολογιστεί ολόκληρο το διάνυσμα V_{bus}.

Τριγωνική παραγοντοποίηση (ο πίνακας παραγόντων)

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 1 & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} & u_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & u_{23}^{(2)} & u_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} y_{11}^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ y_{31}^{(0)} & y_{32}^{(1)} & y_{33}^{(2)} & 0 \\ y_{41}^{(0)} & y_{42}^{(1)} & y_{43}^{(2)} & y_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} y_{11}^{(0)} & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} & u_{14}^{(1)} \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(1)} & u_{23}^{(2)} & u_{24}^{(2)} \\ y_{31}^{(0)} & y_{32}^{(1)} & y_{33}^{(2)} & u_{34}^{(3)} \\ y_{41}^{(0)} & y_{42}^{(1)} & y_{43}^{(2)} & y_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Παρατηρώντας προσεκτικά τον *F*

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} y_{11}^{(0)} & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} & u_{14}^{(1)} \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(1)} & u_{23}^{(2)} & u_{24}^{(2)} \\ y_{31}^{(0)} & y_{32}^{(1)} & y_{33}^{(2)} & u_{34}^{(3)} \\ y_{41}^{(0)} & y_{42}^{(1)} & y_{43}^{(2)} & y_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$$

- από Ybus (μήτρα αγωγιμοτήτων δικτύου)
- από $1^{ο}$ βήμα ευθείας απαλοιφής (Gauss)
- από $2^{ο}$ βήμα ευθείας απαλοιφής (Gauss)
- από $3^{ο}$ βήμα ευθείας απαλοιφής (Gauss)

Αλγοριθμικός σχηματισμός του πίνακα παραγόντων

$$F = \begin{bmatrix} y_{11}^{(0)} & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} & u_{14}^{(1)} \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(1)} & u_{23}^{(2)} & u_{24}^{(2)} \\ y_{31}^{(0)} & y_{32}^{(1)} & y_{33}^{(2)} & u_{34}^{(3)} \\ y_{41}^{(0)} & y_{42}^{(1)} & y_{43}^{(2)} & y_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Στοιχείο στη θέση *i,j* $\begin{cases} u^{(i)}_{i,j} & \text{όταν } i<j \\ y^{(j-1)}_{i,j} & \text{όταν } i\geq j \end{cases}$

<u>Σημείωση</u>: η παρένθεση του εκθέτη περιέχει το βήμα *k* της ευθείας απαλοιφής.

Βάσει της θέσης του (*i,j*), σε κάθε στοιχείο της *F* προσδιορίζεται:

1. **ο τύπος του (*y* ή *u*) και**
2. **το βήμα της ευθείας απαλοιφής (*k*) από το οποίο έχει προκύψει.**

Αλγοριθμικά όλος ο *F* μπορεί να υπολογιστεί:

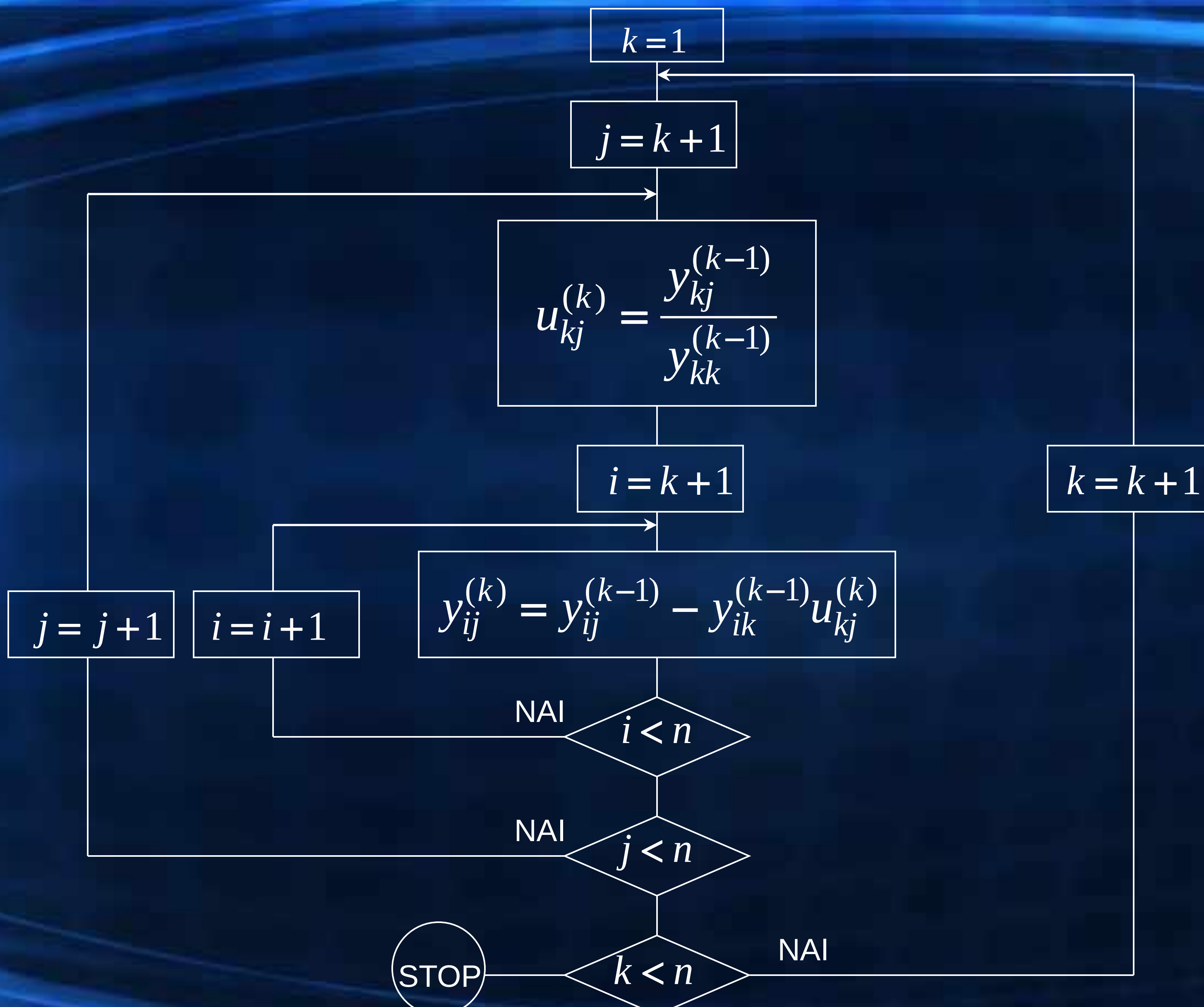
$$\text{Για} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$u_{kj}^{(k)} = \frac{y_{kj}^{(k-1)}}{y_{kk}^{(k-1)}} \qquad \text{για} \quad j = k+1, \ldots, n$$

$$y_{ij}^{(k)} = y_{ij}^{(k-1)} - y_{ik}^{(k-1)} u_{kj}^{(k)} \qquad \text{για} \quad i, j = k+1, \ldots, n$$

<u>*Σημείωση 1*</u>: για *k*=0 θεωρούμε τα στοιχεία της Ybus (πριν την εφαρμογή του 1ου βήματος της μεθόδου Gauss) .
<u>*Σημείωση 2*</u>: *(nxn)* η διάσταση της Y_{bus}

Αλγοριθμικός σχηματισμός του πίνακα παραγόντων



Παράδειγμα υπολογισμού πίνακα παραγόντων

$$F^{(0)} = Y_{bus} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(0)} & y_{12}^{(0)} & y_{13}^{(0)} & y_{14}^{(0)} \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(0)} & y_{23}^{(0)} & y_{24}^{(0)} \\ y_{31}^{(0)} & y_{32}^{(0)} & y_{33}^{(0)} & y_{34}^{(0)} \\ y_{41}^{(0)} & y_{42}^{(0)} & y_{43}^{(0)} & y_{44}^{(0)} \end{bmatrix}$$

Βήμα 1 (k=1)

$$\boxed{u_{1j}^{(1)}} = \frac{y_{1j}^{(0)}}{y_{11}^{(0)}} \qquad j = 2,3,4$$

$$y_{ij}^{(1)} = y_{ij}^{(0)} - y_{i1}^{(0)} \boxed{u_{1j}^{(1)}} \qquad i, j = 2,3,4$$

$$F^{(1)} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(0)} & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} & u_{14}^{(1)} \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(1)} & y_{23}^{(1)} & y_{24}^{(1)} \\ y_{31}^{(0)} & y_{32}^{(1)} & y_{33}^{(1)} & y_{34}^{(1)} \\ y_{41}^{(0)} & y_{42}^{(1)} & y_{43}^{(1)} & y_{44}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Βήμα 2 (k=2)

$$\boxed{u_{2j}^{(2)}} = \frac{y_{2j}^{(1)}}{y_{22}^{(1)}} \qquad j = 3,4$$

$$y_{ij}^{(2)} = y_{ij}^{(1)} - y_{i2}^{(1)} \boxed{u_{2j}^{(2)}} \qquad i, j = 3,4$$

$$F^{(2)} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(0)} & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} & u_{14}^{(1)} \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(1)} & u_{23}^{(2)} & u_{24}^{(2)} \\ y_{31}^{(0)} & y_{32}^{(1)} & y_{33}^{(2)} & y_{34}^{(2)} \\ y_{41}^{(0)} & y_{42}^{(1)} & y_{43}^{(2)} & y_{44}^{(2)} \end{bmatrix}$$

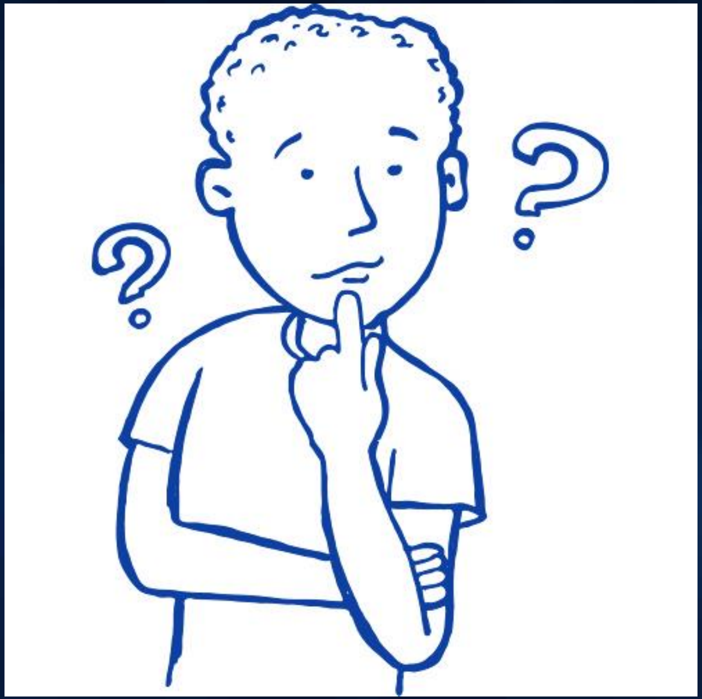
Βήμα 3 (k=3)

$$\boxed{u_{3j}^{(3)}} = \frac{y_{3j}^{(2)}}{y_{33}^{(2)}} \qquad j = 4$$

$$y_{ij}^{(3)} = y_{ij}^{(2)} - y_{i3}^{(2)} \boxed{u_{3j}^{(3)}} \qquad i, j = 4$$

$$F^{(3)} = F = \begin{bmatrix} y_{11}^{(0)} & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} & u_{14}^{(1)} \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(1)} & u_{23}^{(2)} & u_{24}^{(2)} \\ y_{31}^{(0)} & y_{32}^{(1)} & y_{33}^{(2)} & u_{34}^{(3)} \\ y_{41}^{(0)} & y_{42}^{(1)} & y_{43}^{(2)} & y_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \longrightarrow L = \begin{bmatrix} y_{11}^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ y_{31}^{(0)} & y_{32}^{(1)} & y_{33}^{(2)} & 0 \\ y_{41}^{(0)} & y_{42}^{(1)} & y_{43}^{(2)} & y_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} & u_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & u_{23}^{(2)} & u_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ευχαριστώ για την προσοχή σας !



Ερωτήσεις ;