Δίκτυα Επικοινωνίας Υπολογιστών

Ενότητα 5: Στοιχεία Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης (Στοιχεία ΘΤΚ)

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Συνιστώμενο Βιβλίο: *Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές*

Μιχαήλ Δ. Λογοθέτη

Εκδόσεις : Παπασωτηρίου **Δεύτερη Έκδοση**

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται κατ' αρχήν σε τηλεπικοινωνιακούς μηχανικούς και μηχανικούς Η/Υ. Δεδομένης όμως της διεισδυτικότητας της Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως στον γενικότερο επιστημονικό τομέα των μηχανικών, συνιστάται η γνώση του αντικειμένου του βιβλίου αυτού σ' όλους τους Ηλεκτρολόγους/Ηλεκτρονικούς Μηχανικούς και ιδιαιτέρως σε όλους όσους εξειδικεύονται στον τομέα των τηλεπικοινωνιακών δικτύων ή δικτύων υπολογιστών ως διαχειριστές, αναλυτές ή σχεδιαστές.
Πρόθεση του συγγραφέα είναι το βιβλίο αυτό να αποτελέσει εγχειρίδιο μελέτης για προπτυχιακούς φοιτητές. Συνιστάται δε ως βασικό υπόβαθρο στους φοιτητές που ενδιαφέρονται να ακολουθήσουν μεταπτυχιακές σπουδές στους προαναφερθέντες τομείς.

Σκοποί ενότητας

- Επεξήγηση της έννοιας του φορτίου κίνησης και των ιδιοτήτων αυτού
- Περιγραφή της κατανομής Poisson
- Περιγραφή ενός βασικού μοντέλου εξυπηρέτησης κλήσεων
- Περιγραφή του νόμου του Little και της επέκτασης αυτού
- Περιγραφή της φόρμουλας απωλειών Erlang B
- Περιγραφή συστημάτων αναμονής
- Ανάλυση του συστήματος M/M/1

Περιεχόμενα ενότητας

- Ορισμός φορτίου κίνησης και ιδιότητες αυτού
- Παραδείγματα
- Βασικό μοντέλο άφιξης κλήσεων
- Κατανομή Poisson
- Βασικό μοντέλο εξυπηρέτησης κλήσεων
- Ο νόμος του Little
- Η επέκταση του νόμου του Little
- Παραδείγματα
- Η Erlang B formula
- Το σύστημα εξυπηρέτησης με ουρά αναμονής M/M/1

Φορτίο κίνησης (1)

- **Βασικοί ορισμοί**

α) <u>Κλήση (call)</u> - Η απαίτηση για σύνδεση σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα.

*β) <u>Διάρκεια κλήσης (holding time), **h**</u> - Το χρονικό διάστημα που διαρκεί μια κλήση, γνωστό και ως χρόνος εξυπηρέτησης (service time).*

*γ) <u>Φορτίο κίνησης (traffic load)</u>, **α** - Η συνολική διάρκεια όλων των κλήσεων εντός ενός χρονικού διαστήματος που λαμβάνεται ως μονάδα.*

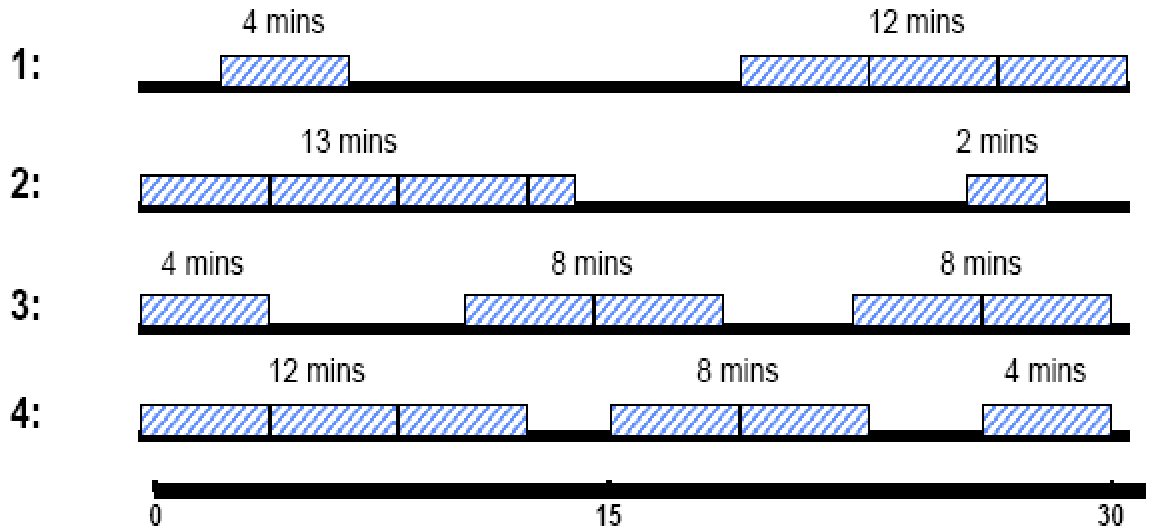
✓ Από τον ορισμό, η τηλεπικοινωνιακή κίνηση είναι αδιάστατο μέγεθος! Προς τιμήν του Δανού μαθηματικού Erlang, χρησιμοποιούμε ως μονάδα φορτίου κίνησης το **Erlang (erl).**

Φορτίο κίνησης (2)

- **Παράδειγμα 1**

Σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα 4 γραμμών υπάρχουν 10 κλήσεις με χρόνους εξυπηρέτησης όπως φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί. Το φορτίο κίνησης, ***α***, υπολογίζεται ως:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{(4 + 12 + 13 + 2 + 4 + 8 + 8 + 12 + 8 + 4)\ mins\ /\ 30\ mins = 2.5\ erl}$$



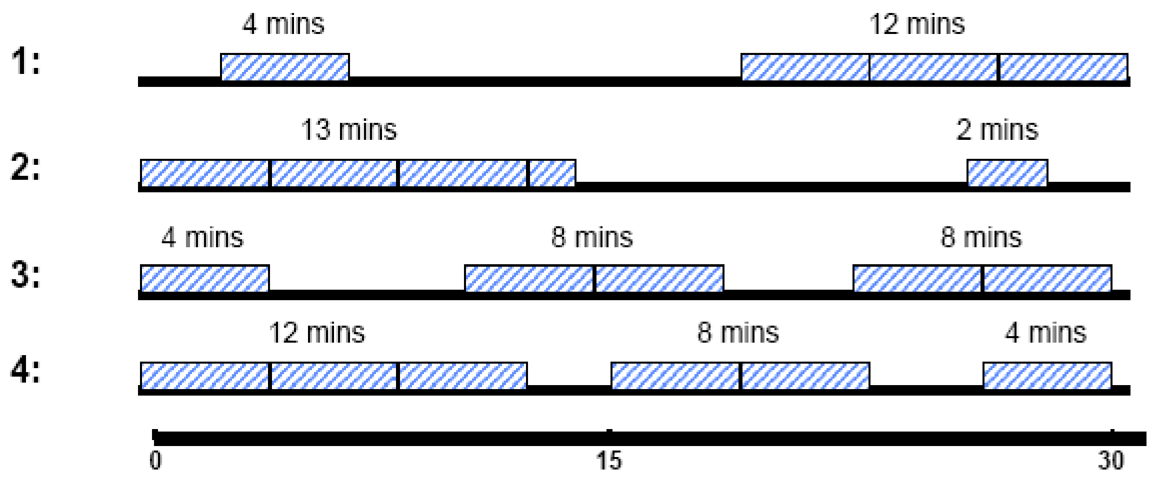
Χρόνος σε λεπτά (min)

Φορτίο κίνησης (3)

- **Παράδειγμα 1 (συνέχεια)**

✓ Με βάση τον ορισμό του φορτίου κίνησης, μια γραμμή μεταφέρει 1 erl αν είναι πλήρως κατειλημμένη για όλο το διάστημα παρατήρησης.

✓ Το σύστημα των 4 γραμμών μπορεί να μεταφέρει οποιοδήποτε φορτίο κίνησης μεταξύ των τιμών 0 και 4 erl.



Χρόνος σε λεπτά (min)

Φορτίο κίνησης (4)

- Εκτός από την μονάδα Erlang για το φορτίο κίνησης χρησιμοποιούμε (συνήθως στην Αμερική) ως μονάδα μέτρησης και το **CCS (Centum Call Seconds)**. Στην περίπτωση αυτή ως χρόνο παρατήρησης θεωρούμε τα εκατό δευτερόλεπτα (100 sec). Με CCS, δηλαδή, μετρούμε πόσες εκατοντάδες δευτερόλεπτα ήταν κατειλημμένο ένα trunk.

- ✓ Traffic Load **(erl)** = (total holding time in sec) / 3600
- ✓ Traffic Load **(CCS)** = (total holding time in sec) / 100
- ✓ Επομένως, **1 erl** = **36 CCS**

Ιδιότητες του φορτίου κίνησης
1^{η} ιδιότητα (1)

- *Αν* ***c*** *είναι ο αριθμός των κλήσεων που φθάνουν σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα και* ***h*** *είναι η μέση διάρκειά τους, τότε το φορτίο κίνησης* ***α*** *δίδεται από την σχέση:*

$$\boldsymbol{\alpha = ch}$$

Ιδιότητες του φορτίου κίνησης
1η ιδιότητα (2)

Απόδειξη

Συνολική διάρκεια κλήσεων = (Μέση διάρκεια κλήσεων) (# κλήσεων)   (1)

Από τον ορισμό του φορτίου κίνησης:

Συνολική διάρκεια κλήσεων = (Φορτίο κίνησης) (χρόνος παρατήρησης) (2)

Από (1), (2):

(Φορτίο κίνησης) (χρόνος παρατήρησης) = (Μέση διάρκεια κλήσεων) (# κλήσεων)

ή

Φορτίο κίνησης = ((# κλήσεων) /(χρόνος παρατήρησης)) (Μέση διάρκεια κλήσεων)

ή

$$\alpha = ch$$

όπου: ***c* = ((# κλήσεων) /(χρόνος παρατήρησης))**

Ιδιότητες του φορτίου κίνησης
2η ιδιότητα

- *Το φορτίο κίνησης ισούται προς τον αριθμό των κλήσεων που φθάνουν σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα εντός χρονικού διαστήματος ίσου προς την μέση τιμή της διάρκειάς των.*

✓ **Απόδειξη βάσει της ιδιότητας 1**

Αν εκλάβουμε ως μονάδα μέτρησης του χρόνου τη μέση διάρκεια των κλήσεων, δηλ. $h = 1$, τότε από την 1η ιδιότητα του φορτίου κίνησης προκύπτει ότι $\boldsymbol{\alpha = ch = c}$.

Στο Παράδειγμα 1 έχουμε:

Σε χρόνο 30 λεπτών μετρήσαμε 10 κλήσεις. Σε χρόνο ίσο με την μέση διάρκεια των κλήσεων, δηλαδή 75/10 = 7.5 λεπτά, ο αριθμός των κλήσεων θα είναι 2.5, που ισούται με τα 2.5 erl του φορτίου κίνησης.

Ιδιότητες του φορτίου κίνησης
3^{η} ιδιότητα

- *Το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από μία γραμμή μόνο, είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα ότι η γραμμή χρησιμοποιείται (ποσοστό του χρόνου που η γραμμή είναι κατειλημμένη). Επομένως μία γραμμή δεν μπορεί να μεταφέρει παρά μόνον 1 erl, το πολύ (αφού η μεγίστη τιμή πιθανότητος είναι 1).*

✓ **Στο Παράδειγμα 1 έχουμε:**

Η 1^{η} γραμμή είναι κατειλημμένη 16 από τα 30 λεπτά, άρα το ποσοστό του χρόνου που η γραμμή είναι κατειλημμένη είναι 16/30 = 0.533

Ομοίως για την 2^{η}, 3^{η} και 4^{η} γραμμή τα ποσοστά είναι 15/30 = 0.5, 20/30 = 0.667 και 24/30 = 0.8, αντιστοίχως.

Ιδιότητες του φορτίου κίνησης
$4^{η}$ ιδιότητα (1)

- *Το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από μία δέσμη γραμμών είναι ισοδύναμο με τον μέσο αριθμό κατειλημμένων γραμμών της δέσμης.*

Απόδειξη

Η $4^{η}$ ιδιότητα αποδεικνύεται ως *εξής* ***(δεδομένου ότι 1 κλήση ζητεί 1 trunk εξυπηρέτησης)***: Ας υποθέσουμε ότι μια δέσμη από s γραμμές διεκπεραιώνει φορτίο κίνησης α erl. Τότε, το φορτίο που θα μεταφέρεται από κάθε μία γραμμή, κατά μέσον όρον, είναι $\alpha_1 = (\alpha/s)$ erl, το οποίο είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα η γραμμή αυτή να είναι κατειλημμένη, βάσει της $3^{ης}$ ιδιότητας.

Άρα, ο μέσος αριθμός των κατειλημμένων γραμμών προκύπτει με τον πολλαπλασιασμό του αριθμού των γραμμών, s, επί την πιθανότητα μία γραμμή να είναι κατειλημμένη, δηλ. $s\,\alpha_1 = \alpha$.

Ιδιότητες του φορτίου κίνησης
$4^{η}$ ιδιότητα (2)

Παράδειγμα 2

Έστω ότι έχουμε τις εξής μετρήσεις σε διαστήματα των 5 λεπτών, κατά την διάρκεια της ώρας αιχμής, που αφορούν τις κατειλημμένες γραμμές ενός συστήματος:

11, 13, 8, 10, 14, 12, 7, 9, 15, 17, 16, 12

Υπολογίζουμε τότε ότι η διεκπεραιουμένη κίνηση θα ισούται με:

$$\frac{11+13+8+10+14+12+7+9+15+17+16+12}{12}=12\mathrm{erl}$$

Παράδειγμα – Φορτίο Κίνησης (1)

Κατά την ώρα αιχμής, μια εταιρεία έχει 240 εξερχόμενες τηλεφωνικές κλήσεις κατά μέσο όρο, με μέση διάρκεια 2 min. Δέχεται δε 200 εισερχόμενες κλήσεις με μέση διάρκεια 90 sec. Να υπολογισθεί:

(**a**) Η εξερχομένη κίνηση σε erlang.

(**b**) Η εισερχομένη κίνηση σε erlang.

(**c**) Η συνολική κίνηση.

Παράδειγμα – Φορτίο Κίνησης (2)

Λύση

Βάσει της 1ης ιδιότητας του φορτίου κίνησης:

(a) Για την εξερχόμενη κίνηση $\alpha_{\varepsilon\xi\varepsilon.}$
c = 240 κλήσεις/ώρα και h = 2 min.
Επομένως
$\alpha_{\varepsilon\xi\varepsilon.}$ = (240/60) κλήσεις/min * 2 min = 8 erl

(b) Για την εισερχόμενη κίνηση $\alpha_{\varepsilon\iota\sigma.}$
c = 200 κλήσεις/ώρα και h = 90 sec = 1.5 min.
Επομένως
$\alpha_{\varepsilon\iota\sigma.}$ = (200/60) κλήσεις/min * 1.5 min = 5 erl

(c) Η συνολική κίνηση $\alpha_{\text{ολική}}$ είναι:
$\alpha_{\text{ολική}} = \alpha_{\varepsilon\xi\varepsilon.} + \alpha_{\varepsilon\iota\sigma.}$ = 13 erl.

Μπορούμε να λέμε δηλαδή ότι η συνολική τηλεφωνική κίνηση της εταιρείας είναι 13 erl, αθροίζοντας ομοειδή πράγματα...

Βασικό μοντέλο άφιξης κλήσεων (1)

Τυχαίος τρόπος γεννήσεως (άφιξης) μιας κλήσης

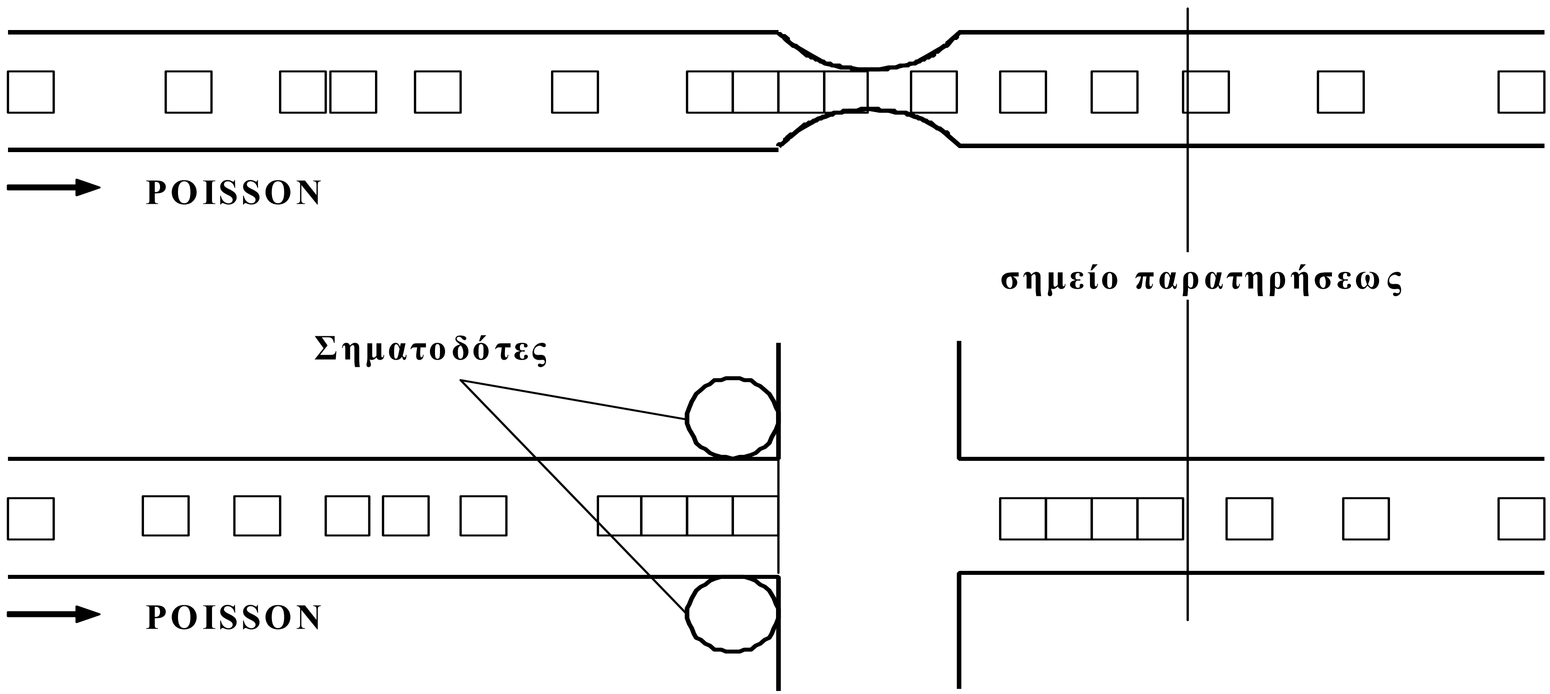
Η άφιξη μιας κλήσης σε κάποιο σύστημα καλείται **τυχαία** όταν:

1. *Η πιθανότητα $P_1(\Delta t)$ ότι μια κλήση θα γεννηθεί σε χρονικό διάστημα $(t, t+\Delta t]$ τείνει στο $\lambda\Delta t$, ανεξάρτητα από τον χρόνο t, όπου λ είναι σταθερός αριθμός.*
2. *Η πιθανότητα $P_{2+}(\Delta t)$ ότι δύο ή περισσότερες κλήσεις γεννώνται εντός του χρονικού διαστήματος $(t, t+\Delta t]$ τείνει στο μηδέν.*
3. *Οι κλήσεις γεννώνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη.*

✓ Η παραπάνω διαδικασία άφιξης κλήσεων καλείται επίσης **Poisson**

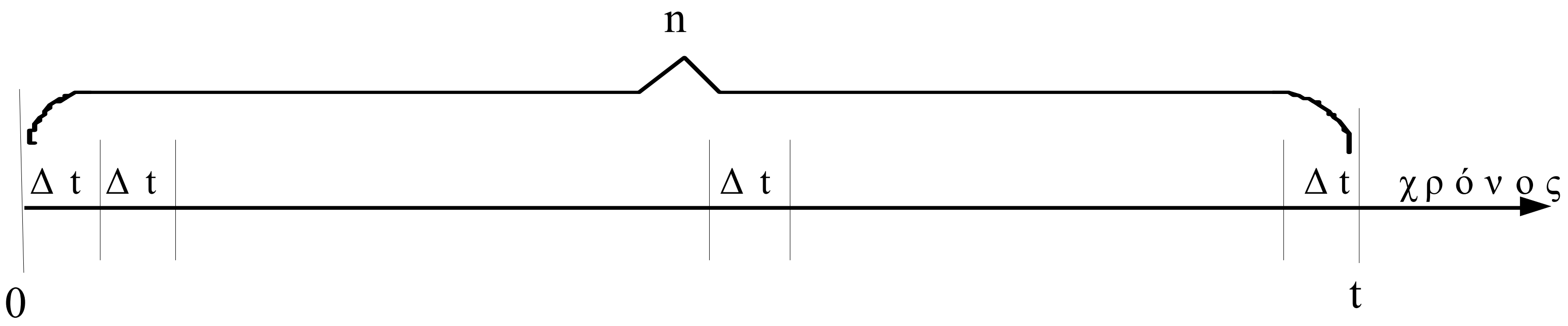
Βασικό μοντέλο άφιξης κλήσεων (2)

Διαταραχή της τυχαίας άφιξης αυτοκινήτων σε σημείο παρατήρησης



Κατανομή Poisson (1)

Μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός της πιθανότητα $P_k(t)$, ότι k κλήσεις γεννώνται εντός του χρονικού διαστήματος (0,t] όπου t = nΔt.



Κατανομή Poisson (2)

Η πιθανότητα $P_k^1(t)$ να γεννηθεί μία ακριβώς κλήση σε k διαστήματα ενώ στα υπόλοιπα n-k διαστήματα να μη γεννηθεί κλήση είναι:

$$P_k^1(t)=(P_1(\Delta t))^k (P_0(\Delta t))^{n-k} = (P_1(\Delta t))^k (1 - P_1(\Delta t) - P_{2+}(\Delta t))^{n-k} =$$

$$= (\lambda \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t - 0)^{n-k} = (\lambda \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{n-k}$$

Κατανομή Poisson (3)

Με βάση την $P_k^1(t)$, η πιθανότητα $P_k(t)$ υπολογίζεται ως:

$$P_k(t) = \lim_{(n\to\infty)} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{(\lambda t)}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{(n\to\infty)} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \left(1 - \frac{(\lambda t)}{n}\right)^{n-k} \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n}$$

ή
$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

που είναι η **κατανομή Poisson (Poisson distribution)** με μέση τιμή λt, όπου το λ καλείται **ρυθμός άφιξης των κλήσεων (arrival rate)**

Κατανομή Poisson (4)

- Αν η χρονική μονάδα είναι 1 ώρα τότε ο ρυθμός αφίξεων μετρείται σε **BHCA (Busy Hour Call Attempts)**.

- Πιθανότητα μηδέν κλήσεις να αφιχθούν στο διάστημα (0, t]:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

- Πιθανότητα ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων (interarrival time) να μην υπερβεί την τιμή t:

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Εκθετική κατανομή με μέση τιμή λ^{-1}

Κατανομή Poisson (5)

Παράδειγμα 3

Η άφιξη των κλήσεων σε ένα σύστημα είναι τυχαία με ρυθμό 20 κλήσεις την ώρα. α) Να υπολογισθεί η πιθανότητα τουλάχιστον δύο κλήσεις να αφιχθούν εντός 3 λεπτών. β) Ποια η πιθανότητα ο χρόνος μεταξύ δύο αφίξεων να μην είναι μεγαλύτερος των 12 λεπτών;

Λύση

α) Από την σχέση:

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\Rightarrow P_k(3)=\frac{\left(\frac{20}{60}3\right)^k}{k!}e^{-\frac{20}{60}3}=\frac{1}{k!}e^{-1}$$

και την $P_2+\ldots+P_n=1-P_0-P_1$

προκύπτει ότι:

$$P_{2+}(3)=1-P_0(3)-P_1(3)=1-e^{-1}-e^{-1}=1-2e^{-1}$$

Κατανομή Poisson (6)

Παράδειγμα 3 (συνέχεια)

β) Από την σχέση:

$$A(t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow A(6) = 1 - e^{-\frac{20}{60}12} = 1 - e^{-4}$$

Βασικό μοντέλο εξυπηρέτησης κλήσεων (1)

Τυχαίος τερματισμός κλήσης

Αρχίζοντας την μέτρηση του χρόνου από την στιγμή που η κλήση αρχίζει να εξυπηρετείται, η πιθανότητα να τερματίσει **τυχαία** η κλήση αυτή σε διάστημα (t, t+Δt) είναι μΔt.

Έστω H(t) η πιθανότητα ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι μεγαλύτερος από t, δηλαδή η πιθανότητα ότι η κλήση δεν θα τερματιστεί σε διάστημα [0,t]. Τότε:

$$H(t) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\mu t}{n}\right)^n = e^{-\mu t}$$

Άρα ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή μt, όπου το μ ονομάζεται **ρυθμός εξυπηρέτησης (service rate).**

- ✓ **Από την 1η ιδιότητα του φορτίου κίνησης: α = λ/μ**

Βασικό μοντέλο εξυπηρέτησης κλήσεων (2)

Παράδειγμα 4

Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο χρόνος εξυπηρέτησης μιας κλήσης να υπερβεί την 1 ώρα αν γνωρίζουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 4 λεπτά.

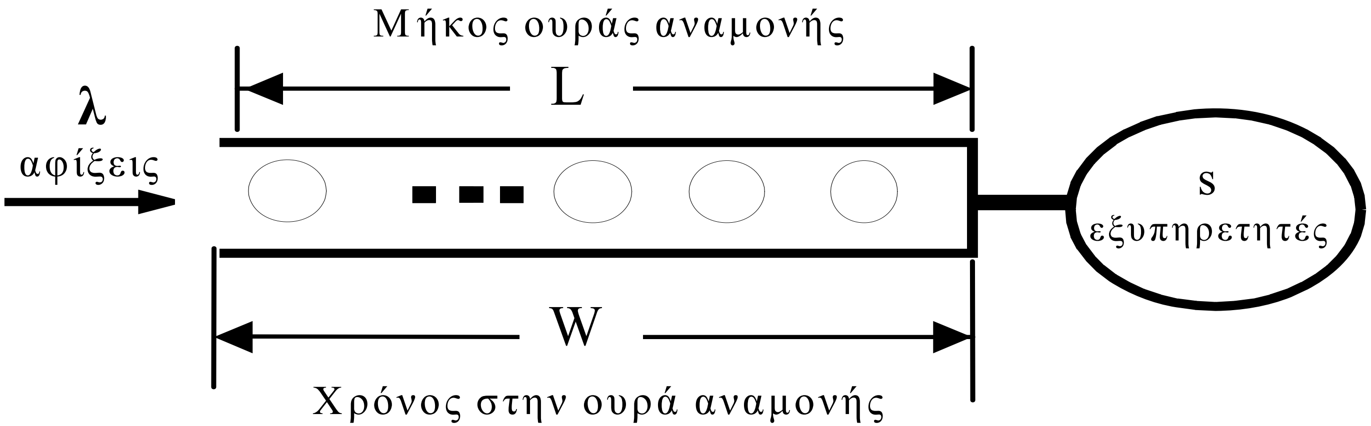
Λύση

$$P(X > 60) = H(60) = e^{-\frac{1}{4}60} = e^{-15}$$

Ο νόμος του Little (1)

Έστω το παρακάτω σύστημα αναμονής όπου λ είναι ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων, L η μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής και W ο μέσος όρος του χρόνου αναμονής στην ουρά. Σύμφωνα με τον νόμο του Little, τα μεγέθη L, λ και W συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$L = \lambda W$$



Ο νόμος του Little (2)

Απόδειξη της σχέσης L = λW

Αφού W είναι ο μέσος όρος του χρόνου παραμονής των κλήσεων στην ουρά, αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως ο μέσος όρος του χρόνου καταλήψεως μιας δέσμης τηλεπικοινωνιακών γραμμών. Τότε, το δεξιό μέρος της σχέσεως **L = λW** δίνει την κίνηση που διεκπεραιώνεται από την δέσμη, και λόγω της 4ης ιδιότητας της κίνησης ισούται με τον μέσο όρο των κατειλημμένων γραμμών της δέσμης, δηλαδή, στην περίπτωση μας, με τον μέσο όρο, L, των κλήσεων στην ουρά.

Η επέκταση του νόμου του Little (1)

Ο χρόνος παραμονής μιας κλήσεως στο σύστημα (system time) ισούται με το άθροισμα του χρόνου αναμονής της κλήσεως στην ουρά και του χρόνου εξυπηρετήσεώς της. Η μέση τιμή, T, του χρόνου παραμονής των κλήσεων στο σύστημα καλείται **χρόνος απόκρισης του συστήματος (response time).**

Αν N είναι ο μέσος αριθμός κλήσεων στο σύστημα, τότε κατ' επέκταση του νόμου του Little ισχύει ότι:

$$N = \lambda T$$

Παραδείγματα (1)

Παράδειγμα 5

Έστω ότι πελάτες προσέρχονται σε μια τράπεζα με μέσο ρυθμό 30 πελάτες ανά ώρα. Όταν όλοι οι ταμίες είναι απασχολημένοι σχηματίζεται ουρά αναμονής η οποία έχει μέσο μήκος 3.0 πελάτες. Ζητείται:

1) Πόση ώρα, κατά μέσο όρο, χρειάζεται να παραμείνει ένας πελάτης στην ουρά;

2) Αν ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη από κάποιον ταμία είναι 6 min κατά μέσο όρο, να υπολογιστεί ο συνολικός αριθμός πελατών που βρίσκονται στην τράπεζα κατά μέσο όρο;

Παραδείγματα (2)

Παράδειγμα 5 (συνέχεια)

Λύση

1) Ισχύει ότι L = 3.0 και λ = 30/60 min^{-1} = 0.5 min^{-1}. Άρα, από τον νόμο του Little, ο μέσος όρος του χρόνου W αναμονής στην ουρά είναι W = L / λ = (3.0 / 0.5) min = 6 min.

2) Βάσει της επέκτασης του νόμου του Little, ο συνολικός αριθμός N πελατών στην τράπεζα είναι N = λ T, όπου T = W + h = (6 + 6) min = 12 min. Άρα, N = 0.5*12 = 6.0 πελάτες.

Η τιμή του N μπορεί να υπολογισθεί εναλλακτικά ως εξής: Αφού h = 6 min και λ = 0.5 mim^{-1}, η διεκπεραιουμένη κίνηση είναι α = λ h = 3 erl, το οποίο σημαίνει ότι ο αριθμός των απασχολημένων ταμιών, άρα και των εξυπηρετουμένων πελατών (ένας ταμίας εξυπηρετεί έναν πελάτη), κατά μέσο όρο είναι 3. Επομένως, N = L + α = (3.0 + 3) πελάτες = 6.0 πελάτες.

Παραδείγματα (3)

Παράδειγμα 6

Σε δίκτυο Η/Υ τα μήκη των διαδρομών μεταξύ των κόμβων διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους. Έστω ότι η μετάδοση των δεδομένων γίνεται με ταχύτητα 10^6 πακέτα/sec. Ο χρόνος μετάδοσης ενός πακέτου εξαρτάται από το μήκος της διαδρομής αλλά και από την συμφόρηση της κίνησης στο δίκτυο. Η κατανομή του χρόνου μετάδοσης των πακέτων έχει ως εξής: 5 msec (70%), 20 msec (20%), 100 msec (10%). Να ευρεθεί ο αριθμός, Ν, των πακέτων στο δίκτυο κατά μέσον όρο.

Παραδείγματα (4)

Λύση

N_1 ο μέσος όρος των πακέτων που υπάρχουν στο δίκτυο επί 5 msec.

N_2 ο μέσος όρος των πακέτων που υπάρχουν στο δίκτυο επί 20 msec.

N_3 ο μέσος όρος των πακέτων που υπάρχουν στο δίκτυο επί 100 msec.

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Little (την επέκτασή του, $N=\lambda T$), για $\lambda = 10^6$ πακέτα/sec, τότε:

$N_1 = 10^6 * 0.005 = 5000$

$N_2 = 10^6 * 0.020 = 20000$

$N_3 = 10^6 * 0.100 = 100000$

Αλλά, μόνον το:

70 % των πακέτων N_1 = 3500 πακέτα

20 % των πακέτων N_2 = 4000 πακέτα

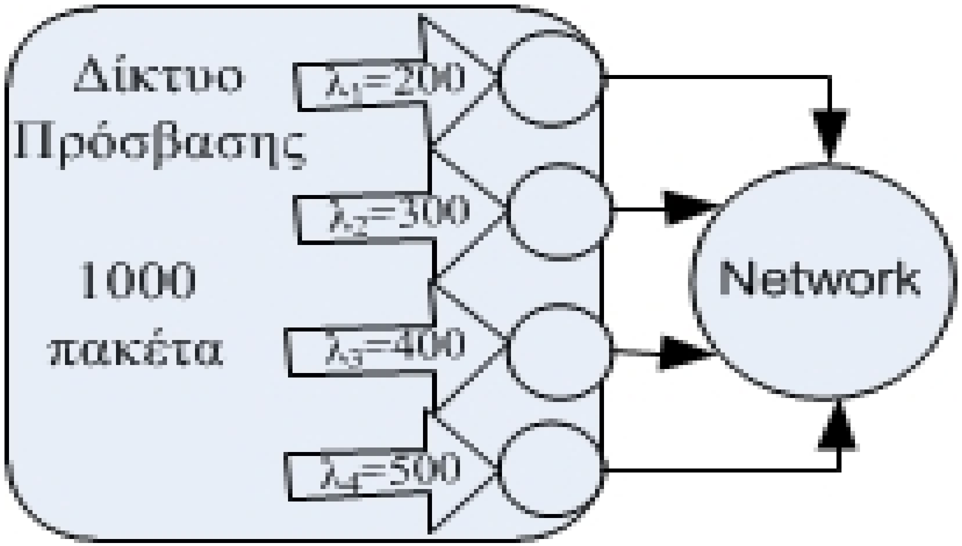
10 % των πακέτων N_3 = 10000 πακέτα

Άρα, ο συνολικός αριθμός N των πακέτων είναι: N = 3500 + 4000 + 10000 = 17500 πακέτα.

Παραδείγματα (5)

Παράδειγμα 7

Δίκτυο πρόσβασης διαθέτει 4 κόμβους σύνδεσης. Στο δίκτυο αυτό μετρώνται κατά μέσον όρο N=1000 πακέτα. Έστω ότι οι ρυθμοί άφιξης των πακέτων σε κάθε κόμβο είναι λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 πακέτα/sec, όπως φαίνονται στο σχήμα. Πόσο χρόνο T ένα πακέτο παραμένει στο δίκτυο πρόσβασης κατά μέσον όρο;



Παραδείγματα (6)

Λύση

Σύμφωνα με τον Νόμο του Little, θα ισχύει: $N = \lambda T$

όπου $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ = 200 + 300 + + 400 + 500 = 1400 πακέτα/sec

Επομένως, $T = N / \lambda$ = (1000 / 1400) sec

Δηλαδή: T = 0.714 sec.

Παραδείγματα (7)

Παράδειγμα 8 (Σωστό ή Λάθος);

Ο νόμος του Little (*L = λ W)* ισχύει:

(**a**) μόνον για τυχαίες αφίξεις με ρυθμό λ.

(**b**) όχι μόνον για αφίξεις με κατανομή Poisson, αλλά για οποιεσδήποτε αφίξεις, αρκεί οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων να είναι στατιστικώς ανεξάρτητες μεταβλητές.

(**c**) σε ουρές αναμονής με οποιαδήποτε πειθαρχία εξυπηρέτησης, όταν το μέσο μήκος της ουράς αναμονής είναι ανεξάρτητο από την πειθαρχία εξυπηρέτησης.

(**d**) ακόμη και όταν ο ρυθμός αφίξεως των κλήσεων εξαρτάται από την συμφόρηση που επικρατεί στο σύστημα εξυπηρέτησης.

Λύση

(**a**) Λάθος, (**b**) Λάθος, (**c**) Σωστό, (**d**) Σωστό.

H Erlang B formula (1)

Θεωρούμε κλήσεις που προέρχονται από άπειρο πρακτικά πληθυσμό, καταφθάνουν σε μια τέλεια δέσμη τυχαία, με ρυθμό αφίξεως λ. Ο ρυθμός εξυπηρετήσεως στην δέσμη είναι μ. Αποδεικνύεται ότι το προσφερόμενο φορτίο κινήσεως κατά μέσον όρο είναι α = λ/μ.

Η πιθανότητα απωλείας κλήσεως (δηλ. η πιθανότητα μη εξυπηρετήσεως της κλήσεως από την δέσμη διότι όλες οι γραμμές της είναι κατειλημμένες) είναι:

$$B = \frac{\frac{\alpha^s}{s!}}{\sum_{i=0}^{s} \frac{\alpha^i}{i!}} \equiv E_s(\alpha)$$

όπου **s είναι ο συνολικός αριθμός γραμμών της δέσμης** (χωρητικότητα).

Η Erlang B formula (2)

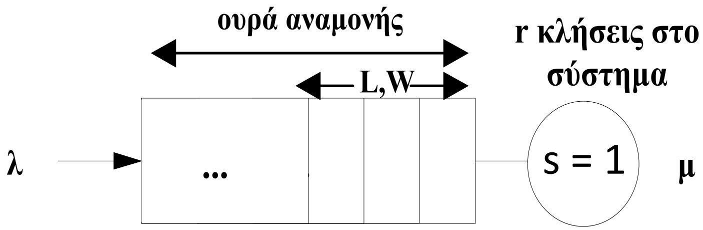
Αν θεωρήσουμε το **s άπειρον** τότε ο παρονομαστής της B-Formula του Erlang, γίνεται $e^{α}$, και όλος ο τύπος είναι πλέον ο τύπος του **Poisson**.

$$B = e^{-α} \frac{α^{s}}{s!}$$

(σημειωτέον ότι το α είναι το γινόμενο του λ επί την μέση τιμή του χρόνου διάρκειας των κλήσεων, ή α = λ/μ).

Ανάλυση του συστήματος αναμονής M/M/1

- Poisson αφίξεις, με μέσο ρυθμό λ (αφίξεις ανά μονάδα χρόνου)
- Εκθετικός χρόνος εξυπηρέτησης h = 1/μ (ρυθμός εξυπηρέτησης μ)
- Άπειρες θέσεις αναμονής
- Μέρος χρόνος αναμονής στην ουρά αναμονής W
- Μέρος χρόνος αναμονής στο σύστημα ουράς αναμονής και εξυπηρετητή T
- Πλήθος κλήσεων στην ουρά αναμονής κατά μέσον όρο L
- Πλήθος κλήσεων στο σύστημα ουράς αναμονής και εξυπηρετητή N
- Φορτίο κίνησης $\alpha = \lambda / \mu < 1$ ($\lambda < \mu$)



Πιθανότητα r κλήσεων στο σύστημα:

$$\mathrm{P}_r = \alpha^r (1-\alpha) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^r \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Παράδειγμα M/M/1 (1)

λ = 20, μ = 30

$$T = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{30-20} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$N = \lambda T = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{20}{10} = 2$$

$$W = T - \frac{1}{\mu} = 0.1 - \frac{1}{30} = 0.067$$

$$L = \lambda W = 20 * 0.067 = 1.34$$

$$P_1 = \left(\frac{20}{30}\right)\left(1-\frac{20}{30}\right) = 22.2\%$$

$$P_{empty} = P_0 = 1 - \frac{20}{30} = 33.3\%$$

λ = 25, μ = 30

$$T = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{30-25} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$N = \lambda T = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{25}{5} = 5$$

$$W = T - \frac{1}{\mu} = 0.2 - \frac{1}{30} = 0.167$$

$$L = \lambda W = 25 * 0.167 = 4.175$$

$$P_1 = \left(\frac{25}{30}\right)\left(1-\frac{25}{30}\right) = 13.9\%$$

$$P_{empty} = P_0 = 1 - \frac{25}{30} = 16.7\%$$

λ = 20, μ = 25

$$T = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{25-20} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$N = \lambda T = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{20}{5} = 4$$

$$W = T - \frac{1}{\mu} = 0.2 - \frac{1}{25} = 0.16$$

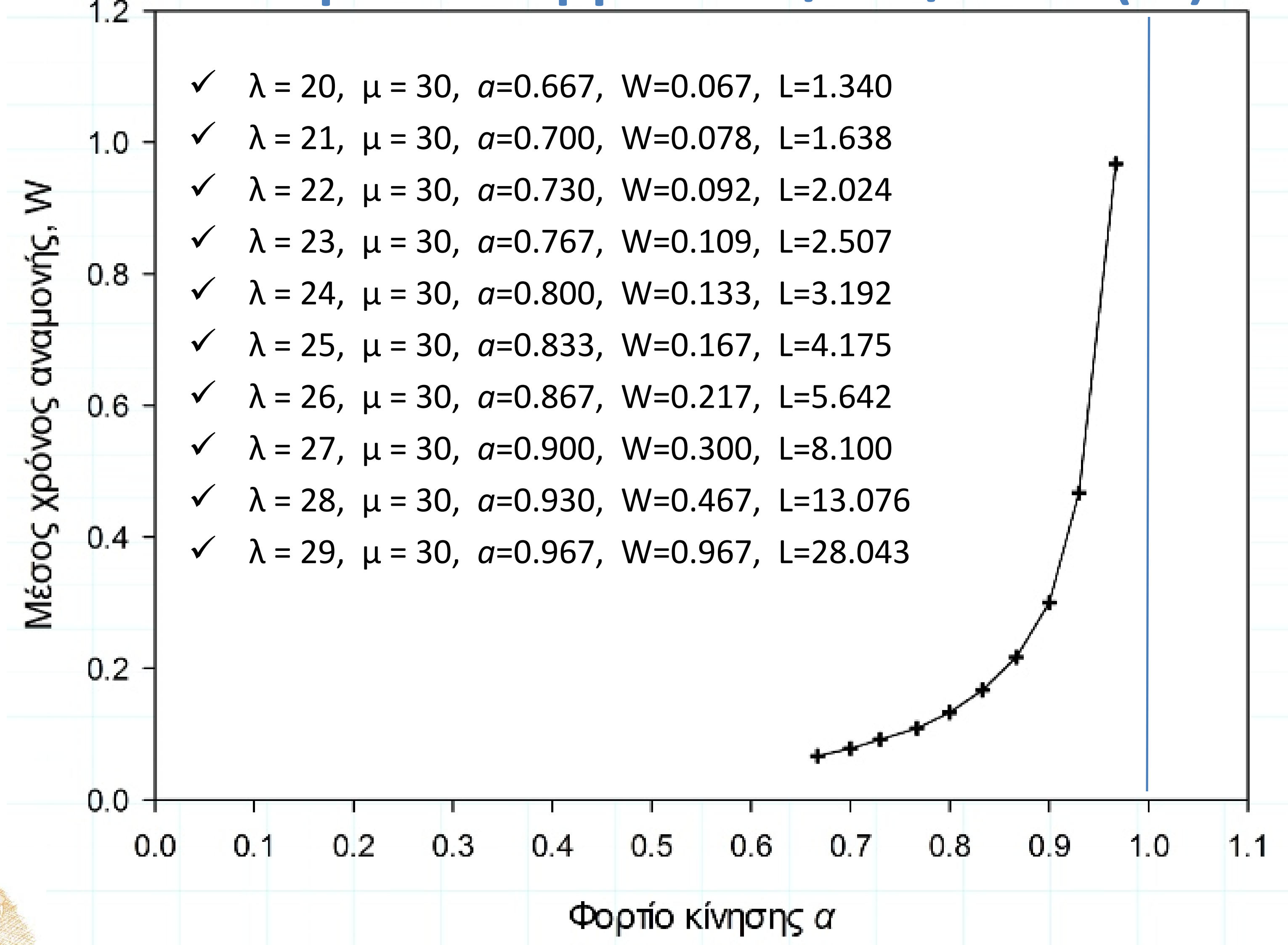
$$L = \lambda W = 20 * 0.16 = 3.2$$

$$P_1 = \left(\frac{20}{25}\right)\left(1-\frac{20}{25}\right) = 16\%$$

$$P_{empty} = P_0 = 1 - \frac{20}{25} = 20\%$$

Παράδειγμα M/M/1 (2)

- ✓ λ = 20, μ = 30, *a*=0.667, W=0.067, L=1.340
- ✓ λ = 21, μ = 30, *a*=0.700, W=0.078, L=1.638
- ✓ λ = 22, μ = 30, *a*=0.730, W=0.092, L=2.024
- ✓ λ = 23, μ = 30, *a*=0.767, W=0.109, L=2.507
- ✓ λ = 24, μ = 30, *a*=0.800, W=0.133, L=3.192
- ✓ λ = 25, μ = 30, *a*=0.833, W=0.167, L=4.175
- ✓ λ = 26, μ = 30, *a*=0.867, W=0.217, L=5.642
- ✓ λ = 27, μ = 30, *a*=0.900, W=0.300, L=8.100
- ✓ λ = 28, μ = 30, *a*=0.930, W=0.467, L=13.076
- ✓ λ = 29, μ = 30, *a*=0.967, W=0.967, L=28.043



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Πανεπιστημίου Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Μιχαήλ Λογοθέτης. «Δίκτυα Επικοινωνίας Υπολογιστών. Στοιχεία Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE604/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση του ακόλουθου έργου:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες/Πίνακες

[1] Μιχαήλ Λογοθέτης, *Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές, 2$^{\eta}$ έκδοση, Παπασωτηρίου, 2012*