Δίκτυα Επικοινωνίας Υπολογιστών

Ενότητα: Ασκήσεις για την ενότητα 5 (Στοιχεία Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης)

Ιωάννης Μοσχολιός

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περιεχόμενα

1. Σκοποί ενότητας

Ο βασικός σκοπός αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση ασκήσεων για την κατανόηση της ύλης της ενότητας 5 της θεωρίας του μαθήματος Δίκτυα Επικοινωνίας Υπολογιστών. Οι ασκήσεις που παρουσιάζονται καλύπτουν όλο το φάσμα της αντίστοιχης ύλης της θεωρίας, ενώ κάθε άσκηση συνοδεύεται από λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται ασκήσεις, καθώς και οι λύσεις τους, για την κατανόηση: 1) της έννοιας του φορτίου κίνησης και των ιδιοτήτων αυτού, 2) της κατανομής Poisson, 3) της εκθετικής κατανομής, 4) του νόμου του Little και 5) της Erlang B formula.

3. Ασκήσεις για την Ενότητα 5: (Στοιχεία Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης)

Άσκηση 1

Κατά την διάρκεια της ώρας αιχμής (busy hour) παρατηρήσαμε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα στο οποίο διεκπεραιώθηκαν 8 τηλεφωνικές κλήσεις. Η διάρκεια αυτών των κλήσεων ήταν 3, 5, 6, 10, 12, 17, 20 και 40 λεπτά, αντιστοίχως. Να υπολογιστεί: α) το φορτίο κίνησης που διεκπεραίωσε το σύστημα, β) η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων, γ) η μέση τιμή του ρυθμού άφιξης των κλήσεων, δ) οι κατειλημμένες γραμμές στο σύστημα (κατά μέσο όρο), ε) οι ελάχιστες γραμμές (links) που πρέπει να είναι εγκατεστημένες στο σύστημα αυτό, στ) η πιθανότητα οι γραμμές του ερωτήματος (ε) να είναι κατειλημμένες.

Λύση

α) Σύμφωνα με τον ορισμό του φορτίου κίνησης:

α= (3+5+6+10+12+17+20+35)/60 = 108/60 = 1.8 erlang

β) Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων, *h*, είναι:

(3+5+6+10+12+17+20+35)/ 8 = 108 / 8 = 13.5 min

γ) Με βάση την $1^{η}$ ιδιότητα του φορτίου κίνησης έχουμε:

c = α / h = 1.8 / 13.5 = 0.1333 κλήσεις / min

δ) Σύμφωνα με την $4^{η}$ ιδιότητα του φορτίου κίνησης, προκύπτει ότι 1.8 γραμμές ήταν κατειλημμένες κατά μέσο όρο.

ε) Εφόσον κάθε γραμμή μπορεί να «μεταφέρει» φορτίο κίνησης ενός erlang και το φορτίο κίνησης του τηλεπικοινωνιακού συστήματος είναι 1.8 erlang, απαιτούνται το λιγότερο δύο γραμμές.

στ) Σύμφωνα με την $3^{η}$ ιδιότητα του φορτίου κίνησης, η πιθανότητα αυτή είναι ίση με 1.8 / 2 = 0.90.

Άσκηση 2

Πέντε χρήστες μοιράζονται ένα τηλεπικοινωνιακό δίκτυο πρόσβασης. Κάθε χρήστης για να εξυπηρετηθεί καταλαμβάνει μια ζεύξη του δικτύου αυτού. Κατά την διάρκεια του χρόνου παρατήρησης του δικτύου, κάθε χρήστης μπορεί είτε να είναι ενεργός χρήστης (καταλαμβάνοντας μια ζεύξη του δικτύου) είτε όχι (ανενεργός χρήστης). Αν στο χρονικό διάστημα παρατήρησης το διεκπεραιούμενο φορτίο κίνησης για έναν χρήστη είναι κατά μέσον όρο *α* erl να υπολογιστούν:

α) Το συνολικό φορτίο κίνησης *A* που διεκπεραίωσε το σύστημα, συναρτήσει του *α*.

β) Η πιθανότητα *n* από τους 5 χρήστες να είναι ενεργοί, όπου *n* = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

γ) Η μέση τιμή των ενεργών χρηστών.

Αν κατά την διάρκεια της ώρας αιχμής κάθε χρήστης καταλαμβάνει μια ζεύξη 3 φορές για 4 min κάθε φορά (κατά μέσον όρο), να υπολογιστούν:

δ) Το διεκπεραιούμενο φορτίο κίνησης *α* κάθε χρήστη (κατά μέσο όρο).

ε) Το συνολικό φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνει το δίκτυο.

στ) Η πιθανότητα όλοι οι χρήστες να είναι ανενεργοί.

ζ) Η πιθανότητα όλοι οι χρήστες να είναι ενεργοί.

Λύση

α) Το συνολικό φορτίο κίνησης $A = 5\alpha$

β) Σύμφωνα με την 3η ιδιότητα του φορτίου κίνησης: «*Το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από μία γραμμή μόνο, είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα ότι η γραμμή χρησιμοποιείται*».

Επομένως, η πιθανότητα ένας χρήστης να χρησιμοποιήσει μία ζεύξη είναι *α* και (1 – *α*) να μην τη χρησιμοποιήσει. Λαμβάνοντας υπόψη όλους τους δυνατούς συνδυασμούς μεταξύ των χρηστών, η πιθανότητα *P*, ότι *n* από τους 5 χρήστες είναι ενεργοί δίνεται από την διωνυμική κατανομή:

$$P(n \text{ ενεργοί χρήστες, } 5 \text{ χρήστες}) = \binom{5}{n} a^n (1-a)^{5-n} .$$

γ) Σύμφωνα με την 4η ιδιότητα του φορτίου κίνησης: «*Το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από μία δέσμη γραμμών είναι ισοδύναμο με τον μέσο αριθμό κατειλημμένων γραμμών της δέσμης*»

Άρα, η μέση τιμή των κατειλημμένων ζεύξεων και επομένως των ενεργών χρηστών ισούται με *A*.

δ) $a = \frac{3}{60} * 4 \Rightarrow a = \frac{1}{5}\ erl$

ε) $A = 5a \Rightarrow A = 1\ erl$

στ) $P(0 \text{ ενεργοί χρήστες, } 5 \text{ χρήστες}) = \binom{5}{0} a^0 (1-a)^5 = (1-a)^5 = 0.32768$

ζ) $P(5 \text{ ενεργοί χρήστες, } 5 \text{ χρήστες}) = \binom{5}{5} a^5 (1-a)^0 = a^5 = 0.00032 .$

Άσκηση 3

Είκοσι χρήστες μοιράζονται ένα τηλεπικοινωνιακό δίκτυο πρόσβασης. Κάθε χρήστης για να εξυπηρετηθεί καταλαμβάνει μια ζεύξη του δικτύου αυτού. Κατά την διάρκεια του χρόνου παρατήρησης του δικτύου, κάθε χρήστης μπορεί είτε να είναι ενεργός χρήστης (καταλαμβάνοντας μια ζεύξη του δικτύου) είτε όχι (ανενεργός χρήστης). Αν κατά την διάρκεια της ώρας αιχμής κάθε χρήστης καταλαμβάνει μια ζεύξη 1 φορά για 6 min κάθε φορά (κατά μέσον όρο) τότε: α) να δώσετε σε πίνακα τις τιμές της συνάρτησης μάζας πιθανότητας (probability mass function) και της αθροιστικής πιθανότητας (cumulative probability) για όλες τις δυνατές τιμές των ενεργών χρηστών και β) να υπολογίσετε την πιθανότητα περισσότεροι από 7 χρήστες να είναι ενεργοί.

Λύση

α) Η πιθανότητα *P*, ότι *n* από τους 20 χρήστες είναι ενεργοί δίνεται από την διωνυμική κατανομή, με συνάρτηση μάζας πιθανότητας (probability mass function):

$$P(n \text{ ενεργοί χρήστες, } 20 \text{ χρήστες}) = \binom{20}{n} a^n (1-a)^{20-n} .$$

Η αθροιστική πιθανότητα (cumulative probability) υπολογίζεται από την σχέση:

$$F(b) = \sum_{n \le b} P(n \text{ ενεργοί χρήστες, } 20 \text{ χρήστες}) .$$

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές της συνάρτησης μάζας πιθανότητας και της αθροιστικής πιθανότητας:

20 χρήστες	**φορτίο κίνησης / χρήστη, *α* = 0.1**	
ενεργοί χρήστες	**Συνάρτηση μάζας πιθανότητας (Probability Mass Function)**	**Αθροιστική Πιθανότητα (Cumulative Probability)**
0	0,121576655	0,121576655
1	0,270170344	0,391746998
2	0,285179807	0,676926805
3	0,190119871	0,867046677
4	0,089778828	0,956825505
5	0,031921361	0,988746866
6	0,008867045	0,997613911
7	0,001970454	0,999584365
8	0,000355776	0,999940141
9	5,27076E-05	0,999992849
10	6,44204E-06	0,999999291
11	6,50711E-07	0,999999942
12	5,4226E-08	0,999999996

13	3,70776E-09	1
14	2,05987E-10	1
15	9,15496E-12	1
16	3,1788E-13	1
17	8,3106E-15	1
18	1,539E-16	1
19	1,8E-18	1
20	1E-20	1

β) $P(n \text{ ενεργοί χρήστες} > 7) = 1 \text{ - } F(7) = 1 - \sum_{n \leq 7} P(n \text{ ενεργοί χρήστες, 20 χρήστες})$ =1-0.999584365 = 0.04156 %.

Άσκηση 4

Θεωρήστε ότι ο αριθμός των χρηστών είναι *N* και *α* το διεκπεραιούμενο φορτίο κίνησης κάθε χρήστη (μέση τιμή). Τότε: α) να εκφράσετε την πιθανότητα *k* από τους *N* χρήστες να είναι ενεργοί συναρτήσει του συνολικού διεκπεραιωμένου φορτίου κίνησης *A* και του αριθμού των χρηστών *N* και β) να αποδείξετε ότι για $N \to \infty$ και σταθερό φορτίο κίνησης *A*, η διωνυμική κατανομή συγκλίνει στην κατανομή Poisson με μέση τιμή *A*.

Λύση

α) Το συνολικό διεκπεραιούμενο φορτίο κίνησης είναι *A*=*Nα*, όπου *α* το διεκπεραιούμενο φορτίο κίνησης κάθε χρήστη. Επομένως:

$$P[k \text{ ενεργοί χρήστες}, N \text{ χρήστες}] = \binom{N}{k} a^k (1-a)^{N-k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}\left(\frac{A}{N}\right)^k \left(1-\frac{A}{N}\right)^{N-k}$$

β)

$$P[k \text{ ενεργοί χρήστες}, \infty \text{ χρήστες}] = \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(N-k)!k!}\left(\frac{A}{N}\right)^k \left(1-\frac{A}{N}\right)^{N-k} =$$

$$= \frac{A^k}{k!} \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N(N-1)(N-2)...(N-k+1)}{N^k}\right)\left(1-\frac{A}{N}\right)^N \left(1-\frac{A}{N}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{A^k}{k!} \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N}{N}\frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N}...\frac{N-k+1}{N}\right)\left(1-\frac{A}{N}\right)^N \left(1-\frac{A}{N}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{A^k}{k!}(1)e^{-A}(1) = \frac{A^k}{k!}e^{-A}$$

Επομένως: $P\left[k \text{ ενεργοί χρήστες}, \infty \text{ χρήστες}\right] = \frac{A^k}{k!} e^{-A}$

Σημείωση: Στο τελευταίο βήμα της απόδειξης, χρησιμοποιήσαμε τον γνωστό τύπο $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$.

Θέτοντας $x = N/A$, έχουμε $\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{A}{N}\right)^{N/A} = e^{-1}$ από το οποίο προκύπτει ότι $\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{A}{N}\right)^{N} = e^{-A}$

Παρατήρηση: Η κατανομή Poisson με παράμετρο A είναι μια αρκετά καλή προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους N, α, δηλαδή ισχύει:

$\frac{A^k}{k!}e^{-A} \approx \frac{N!}{(N-k)!k!}a^k(1-a)^{N-k}$ για $k = 0, 1, \ldots, n$

υπό την προϋπόθεση ότι $A = N\alpha$ και $N \geq 100$, $\alpha \leq 0.01$.

Πράγματι, έστω N = 100 χρήστες και α = 0.01 erl ανά χρήστη. Τότε η πιθανότητα k = 5 ενεργοί χρήστες στους N = 100 χρήστες υπολογίζεται με την χρήση της διωνυμικής κατανομής ως εξής:

$$P\left[5 \text{ ενεργοί χρήστες}, 100 \text{ χρήστες}\right] = \binom{100}{5}(0.01)^5(1-0.01)^{95} = 0.00290$$

Χρησιμοποιώντας την κατανομή Poisson με $A = N\alpha$ = 100 * 0.01 = 1, η παραπάνω πιθανότητα προσεγγίζεται ως εξής:

$$\frac{A^k}{k!}e^{-A} = \frac{1}{5!}e^{-1} = 0.00306$$

Άσκηση 5

Θεωρούμε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα στο οποίο οι αφίξεις των χρηστών ακολουθούν μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 12 χρήστες την ώρα (κατά μέσο όρο). Να υπολογιστούν:

α) Η πιθανότητα ότι ακριβώς 6 χρήστες θα αφιχθούν εντός 30 λεπτών.

β) Η πιθανότητα ότι 3 ή περισσότεροι χρήστες θα αφιχθούν εντός 15 λεπτών.

γ) Η πιθανότητα ότι 2, 3 ή 4 χρήστες θα αφιχθούν εντός 5 λεπτών.

Λύση

α) Χρησιμοποιώντας την κατανομή Poisson με λ = 12 χρήστες / ώρα και t = 0.5 ώρες έχουμε:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \Rightarrow P_6(0.5) = \frac{(12*0.5)^6}{6!}e^{-12*0.5} = 0.1606$$

β) Επειδή λ = 12 χρήστες / ώρα και t = 0.25 ώρες, έχουμε:

$$P_{k>3}(t) = 1 - P_{k=0}(t) - P_{k=1}(t) - P_{k=2}(t) = 1 - \frac{(12*0.25)^0}{0!}e^{-12*0.25} - \frac{(12*0.25)^1}{1!}e^{-12*0.25} - \frac{(12*0.25)^2}{2!}e^{-12*0.25} \Rightarrow$$
$$P_{k>3}(t) = 1 - e^{-3}(1+3+4.5) = 0.5768$$

γ) Επειδή λ = 12 χρήστες / ώρα και t = 1/12 ώρες, έχουμε:

$$\text{Prob}\{2,3,4\,\text{χρήστες}\} = \sum_{k=2}^{4}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = \left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)e^{-1} = \frac{17}{24}e^{-1} = 0.2606$$

Σημείωση: Η διαδικασία Poisson χρησιμοποιείται ευρέως στην θεωρία τηλεπικοινωνιακής κίνησης προκειμένου να περιγράψει τον τρόπο άφιξης των κλήσεων σ' ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα. Αποτελεί μια διαδικασία αφίξεων κατά την οποία ο αριθμός των αφίξεων εντός ενός χρονικού διαστήματος t ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή λt αφίξεις, ή μέσο ρυθμό άφιξης στην μονάδα του χρόνου ίσο με $\lambda t/t=\lambda$. Επομένως, η πιθανότητα να συμβούν k αφίξεις μέσα σ' ένα χρονικό διάστημα t, $P_k(t)$, όπου $k \geq 0$, δίνεται από την σχέση:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

η οποία είναι η κατανομή Poisson.

Άσκηση 6

Αν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων σ' ένα σύστημα είναι Poisson με μέση τιμή λ, να δείξετε ότι οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων των κλήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\lambda$.

Λύση

Ορίζουμε ως T την τυχαία μεταβλητή «χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων». Τότε:

$$\Pr\{T > t\} = \text{πιθανότητα καμίας άφιξης εντός του διαστήματος } t = P_0(t) = e^{-\lambda t}\ .$$

Επομένως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Cumulative Distribution Function, CDF) της T γράφεται ως:

$$A(t) = \Pr\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

ενώ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Function, PDF) δίνεται ως η παράγωγος της CDF:

$$a(t) = \frac{d}{dt}A(t) = \lambda e^{-\lambda t}\ .$$

Η μέση τιμή της εκθετικής κατανομής, δηλαδή ο μέσος χρόνος ανάμεσα στις αφίξεις, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση ως εξής:

$$E[T]=\int_0^{\infty} ta(t)dt=\int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt=-te^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt=0-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

Πράγματι λοιπόν, η τυχαία μεταβλητή *T* ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/*λ*.

Σημείωση 1: Η προηγούμενη ανάλυση επιβεβαίωσε αυτό που διαισθητικά περιμέναμε να ισχύει: αν η μέση τιμή του ρυθμού άφιξης των κλήσεων είναι *λ*, τότε η μέση τιμή του χρόνου μεταξύ δύο αφίξεων είναι 1/*λ*.

Σημείωση 2: Προκειμένου να υπολογίσουμε την διασπορά της εκθετικής κατανομής χρησιμοποιούμε ξανά παραγοντική ολοκλήρωση, οπότε η δεύτερη ροπή είναι:

$$E[T^2]=\int_0^{\infty} t^2a(t)dt=\int_0^{\infty} t^2\lambda e^{-\lambda t}dt=-t^2e^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} 2te^{-\lambda t}dt=0+\frac{2}{\lambda}E[T]=\frac{2}{\lambda^2}$$

Τελικά έχουμε: $Var[T]=E[T^2]-E^2[T]=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$.

Άσκηση 7

Ο χρόνος που απαιτείται από έναν μηχανικό προκειμένου να επισκευάσει έναν Η/Υ είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 4 ώρες. Με την βοήθεια κατάλληλων εργαλείων ο χρόνος αυτός θα μπορούσε να μειωθεί σε 2 ώρες. Υποθέτουμε ότι ο μηχανικός αμείβεται με 100 ευρώ αν επισκευάσει έναν Η/Υ σε λιγότερο από 2 ώρες. Διαφορετικά, η αμοιβή του είναι 80 ευρώ. Να υπολογιστεί η μέση τιμή της αύξησης της αμοιβής του μηχανικού (ανά Η/Υ) αν χρησιμοποιήσει τα κατάλληλα εργαλεία.

Λύση

Η μέση αμοιβή του μηχανικού ανά Η/Υ δίνεται από την σχέση:

$$\text{Αμοιβή}=100P\{T<2\text{ ώρες}\}+80P\{T>2\text{ ώρες}\}=100\big(1-P\{T>2\text{ ώρες}\}\big)+80P\{T>2\text{ ώρες}\}\Rightarrow$$
$$\text{Αμοιβή=100 - 20}P\{T>2\text{ ώρες}\}$$

όπου *T* ο χρόνος επισκευής ενός Η/Υ.

Αν ορίσουμε ως T_1, T_2 τους χρόνους επισκευής του Η/Υ με ή χωρίς τα κατάλληλα εργαλεία, αντίστοιχα, τότε:

$$P\{T_1>2\text{ ώρες}\}=e^{-\mu t}=e^{-\frac{1}{2}2}=e^{-1}=0.368$$

$$P\{T_2>2\text{ ώρες}\}=e^{-\mu t}=e^{-\frac{1}{4}2}=e^{-0.5}=0.607$$

Επομένως:

$$\text{Αύξηση=100 - 20}P\{T_1>2\text{ ώρες}\}-100+20P\{T_2>2\text{ ώρες}\}\Rightarrow$$
$$\text{Αύξηση}=20\big(\{T_2>2\text{ ώρες}\}-P\{T_1>2\text{ ώρες}\}\big)=4.78\text{ ευρώ ανά Η/Υ}$$

Άσκηση 8

Ένας δέκτης εξυπηρετεί τα μηνύματα δύο πομπών Α, Β. Η άφιξη των μηνυμάτων κάθε πομπού ακολουθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ_x όπου $x =$ Α, Β. Υποθέτουμε ότι όλα τα μηνύματα είναι πολύ σύντομα ώστε να καταλαμβάνουν μοναδικά χρονικά σημεία. Ο αριθμός λέξεων κάθε μηνύματος (είτε του πομπού Α είτε του Β) είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(x) = \begin{cases} 2/6, & \text{αν } x = 1 \\ 3/6, & \text{αν } x = 2 \\ 1/6, & \text{αν } x = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

α) Ποια είναι η πιθανότητα να ληφθούν ακριβώς 9 μηνύματα κατά την διάρκεια ενός διαστήματος t ;

β) Αν N είναι ο συνολικός αριθμός των λέξεων που λαμβάνονται κατά την διάρκεια ενός διαστήματος t, να υπολογιστεί η μέση τιμή του N.

γ) Ποια είναι η πιθανότητα ακριβώς οκτώ από τα επόμενα δώδεκα μηνύματα που θα λάβει ο δέκτης να προέρχονται από τον πομπό Α;

Λύση

α) Έστω k ο συνολικός αριθμός των μηνυμάτων που λαμβάνει ο πομπός κατά την διάρκεια ενός διαστήματος t. Τότε το k είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $(\lambda_A + \lambda_B)t$. Επομένως, η πιθανότητα να ληφθούν ακριβώς 9 μηνύματα κατά την διάρκεια ενός διαστήματος t δίνεται από την σχέση:

$$P_9(t) = \frac{\left((\lambda_A + \lambda_B)t\right)^9}{9!} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t} .$$

β) Έστω X_i ο αριθμός των λέξεων στο μήνυμα i. Αν k και N ο συνολικός αριθμός των μηνυμάτων και των λέξεων, αντίστοιχα, που λαμβάνει ο πομπός κατά την διάρκεια ενός διαστήματος t, τότε:

$$N = X_1 + X_2 + ... + X_k .$$

Η μέση τιμή του N δίνεται από την σχέση:

$$E[N] = E[X]E[k] = \left(1\frac{2}{6} + 2\frac{3}{6} + 3\frac{1}{6}\right)(\lambda_A + \lambda_B)t = \frac{11}{6}(\lambda_A + \lambda_B)t$$

γ) Κάθε μήνυμα έχει πιθανότητα $\dfrac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$ να προέρχεται από τον πομπό Α. Επομένως, ο αριθμός των μηνυμάτων του πομπού Α είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή και η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$P(8 \text{ μηνύματα από τον πομπό Α, } 12 \text{ μηνύματα}) = \binom{12}{8}\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^8 \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^4 .$$

Άσκηση 9

Μια ζεύξη μεταξύ δύο τηλεφωνικών κέντρων έχει 5 παράλληλα trunks (γραμμές – κανάλια). Κάθε τηλεφωνική κλήση καταλαμβάνει ένα trunk. Οι τηλεφωνικές κλήσεις καταφθάνουν στην ζεύξη με κατανομή Poisson με ρυθμό 2 κλήσεις/min. Η μέση διάρκεια των κλήσεων είναι 3 min. Να υπολογισθεί:

1) Η προσφερομένη κίνηση.

2) Η διεκπεραιουμένη κίνηση

3) Η κίνηση που χάνεται.

Λύση

1) Η προσφερομένη κίνηση $\alpha = \lambda h$ = 2 κλήσεις/min * 3 min = 6 erl

2) Η διεκπεραιουμένη κίνηση $\alpha_c = \alpha\,(1\text{-}B)$

όπου η τιμή του B θα υπολογιστεί από την Erlang B formula,

δηλαδή: $B = E_5(6) = (6^5/5!)/(1+ 6/1! + 6^2/2! + 6^3/3! + 6^4/4! + 6^5/5!) =$

$= 64.8/(1+6+18+36+54+64.8) = 64.8/179.8 = 0.36 = 36\ \%$

Άρα $\alpha_c = \alpha\,(1\text{-}B) = 6\,(1 – 0.36) = 3.84$ erl

3) Η κίνηση που χάνεται $\alpha' = \alpha - \alpha_c = 6 - 3.84 = 2.16$ erl

ή $\alpha' = \alpha\,B = 6 * 0.36 = 2.16$ erl.

Άσκηση 10

Σε μια κυψέλη, ενός κυψελωτού συστήματος κινητής τηλεφωνίας, διατίθενται 4 κανάλια. Οι χρήστες του συστήματος είναι 100, καθένας από τους οποίους επιχειρεί κατά μέσο 1 κλήση την ώρα με μέση διάρκεια 1.8 λεπτά ανά κλήση. Οι αφίξεις των κλήσεων είναι τυχαίες ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένος. Αν μοντελοποιήσουμε την κυψέλη ως σύστημα απωλειών, τότε να υπολογίσετε την πιθανότητα απώλειας κλήσεως χρησιμοποιώντας την Erlang B formula. Πόσο θα αυξηθεί η πιθανότητα απώλειας κλήσεως αν οι χρήστες της κυψέλης διπλασιαστούν;

Λύση

Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης στην κυψέλη είναι:

$$a = \frac{100\,\text{χρήστες} * 1\,\text{κλήση/χρήστη} * 1.8\ \text{λεπτά/κλήση}}{60\ \text{λεπτά}} = 3\,erl$$

Οπότε η πιθανότητα απώλειας κλήσεως δίνεται από την σχέση:

$$E_s(a) \equiv B_s = \frac{\frac{a^s}{s!}}{\sum_{i=0}^{s} \frac{a^i}{i!}} \stackrel{s=4,\ a=3}{\Rightarrow} B_4 = \frac{\frac{3^4}{4!}}{\sum_{i=0}^{4} \frac{3^i}{i!}} = \frac{3.375}{\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!}} = 0.206$$

Όταν οι χρήστες γίνουν 200, τότε το προσφερόμενο φορτίο κίνησης στην κυψέλη γίνεται:

$$a = \frac{200\,\text{χρήστες} * 1\,\text{κλήση/χρήστη} * 1.8\ \text{λεπτά/κλήση}}{60\ \text{λεπτά}} = 6\,erl$$

Οπότε η πιθανότητα απώλειας κλήσεως υπολογίζεται ως εξής:

$$B_s = \frac{\frac{a^s}{s!}}{\sum_{i=0}^{s} \frac{a^i}{i!}} \stackrel{s=4,\ a=6}{\Rightarrow} B_4 = \frac{\frac{6^4}{4!}}{\sum_{i=0}^{4} \frac{6^i}{i!}} = \frac{54}{\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!}} \approx 0.47\ .$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα απώλειας κλήσεως υπερδιπλασιάζεται.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού ΕκδόσεωνΈργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Ιωάννης Μοσχολιός. «Δίκτυα Επικοινωνίας Υπολογιστών, Ασκήσεις για την ενότητα 5: Στοιχεία Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE604/ .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς

- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό δεν κάνει χρήση εικόνων/σχημάτων/διαγραμμάτων/φωτογραφιών ή πινάκων από έργα τρίτων:

Πηγές:

[1] Μ. Λογοθέτης, *Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές*, 2η έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2012.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «***Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα* Πανεπιστημίου Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης