Ανάλυση Μικρού Σήματος και Έλεγχος: Εφαρμογή στα ΣΗΕ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ

Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων

Ευστάθεια συστήματος

- Ένα σύστημα μπορεί να περιγραφεί από ένα μαθηματικό μοντέλο διαφορικής εξίσωσης n −στής τάξης ή από μια συνάρτηση μεταφοράς
- Αν ένα σύστημα είναι *παθητικό*, τότε δεν υπάρχει καμία εσωτερική πηγή ενέργειας
- Ένα φραγμένο σήμα εισόδου είναι η μόνη διαθέσιμη πηγή ενέργειας ώστε να παρέχει την απαραίτητη πηγή ενέργειας στο σήμα εξόδου. Επιπλέον, μέρος της ενέργειας εισόδου μπορεί να αποσβένεται στο εσωτερικό το συστήματος. Ένα τέτοιο σύστημα είναι ευσταθές καθώς η έξοδος του είναι επίσης φραγμένη (*ευστάθεια φραγμένης-εισόδου φραγμένης-εξόδου*, bounded-input bounded-output stability, *BIBO stability*)

Ευστάθεια συστήματος

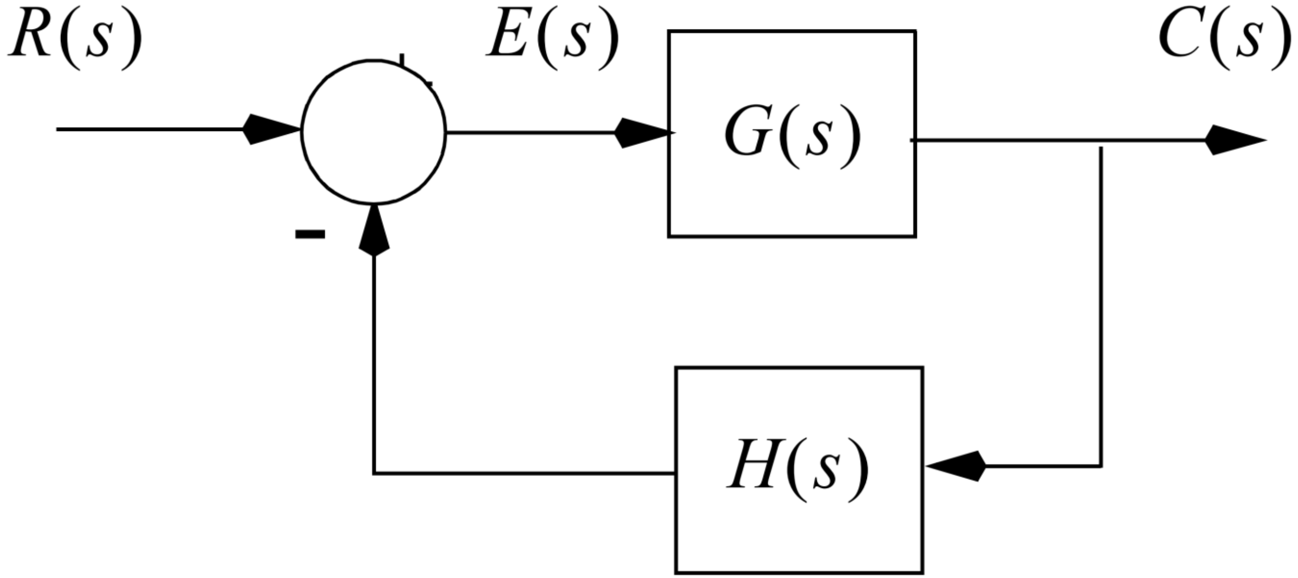
- Όπως είδαμε στην προηγούμενη διάλεξη, η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος αποτελείται από την απόκριση μόνιμης κατάστασης και τους μεταβατικούς όρους. Για να είναι το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει όλοι οι μεταβατικοί όροι να μειώνονται συνεχώς προς το μηδέν.
- Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει το πραγματικό μέρος α των πόλων να είναι αρνητικό.

Άρα, για να είναι ένα σύστημα ευσταθές, όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς (ή οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης) πρέπει να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Ισοδύναμα, όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς πρέπει αν βρίσκονται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Οριακή ευστάθεια

- Αν κάποιοι πόλοι βρίσκονται πάνω στον φανταστικό άξονα και όλοι οι άλλοι βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο (left-half of the s-plane), τότε το σύστημα λέγεται ότι είναι *οριακά ευσταθές (marginally stable)*.
- Στην πράξη, σε ένα γραμμικό σύστημα ελέγχου, είναι αδύνατο να τοποθετηθεί και να διατηρηθεί ένας πόλος ακριβώς πάνω στον φανταστικό άξονα κι επομένως η έννοια της οριακής ευστάθειας έχει μόνο ακαδημαϊκό ενδιαφέρον.

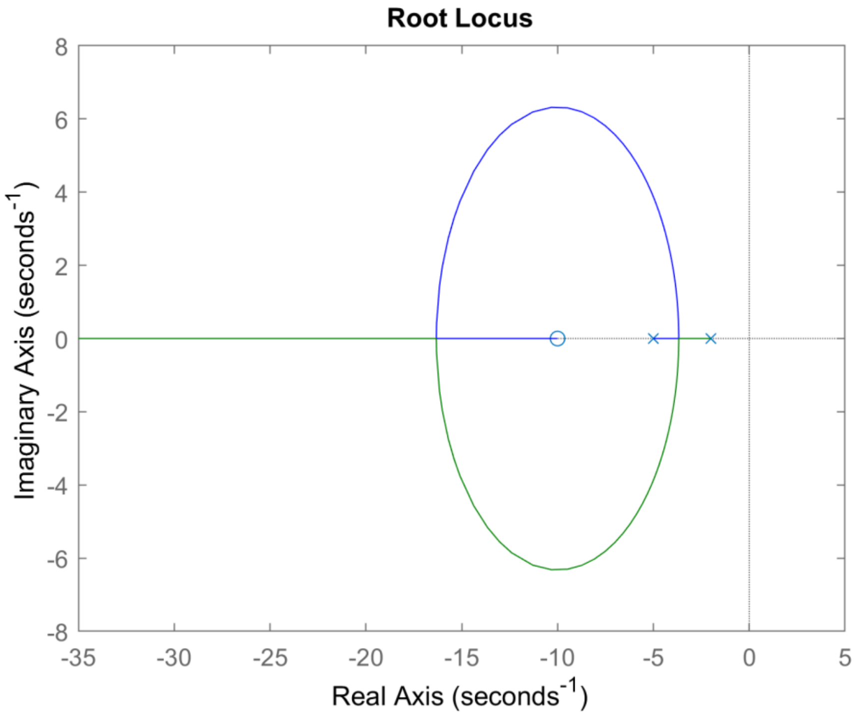
Γεωμετρικός τόπος ριζών



- Έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι
$$K * G(s)$$
- Ο γεωμετρικός τόπος ριζών περιγράφει τους πόλους του συστήματος κλειστού βρόχου για διαφορετικές τιμές του κέρδους K
- Χρησιμοποιείται για τη σχεδίαση ελεγκτών (κυρίως ελεγκτών κέρδους) ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ευσταθές

Γεωμετρικός τόπος ριζών

- Υλοποιείται στο Matlab με χρήση της συνάρτησης *rlocus* και είσοδο τη συνάρτηση μεταφοράς loop $G(s)H(s)$, δηλαδή *rlocus(G*H)*
- Παράδειγμα: $KG(s) = K\frac{s+10}{s+2}$, $H(s) = \frac{1}{s+5}$

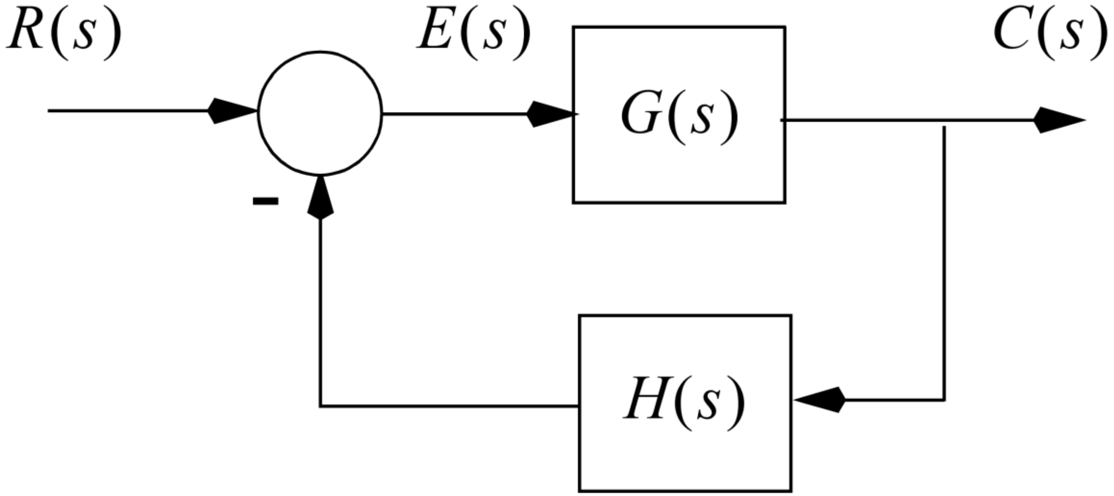


Σφάλμα μόνιμης κατάστασης

- Στα συστήματα ελέγχου κλειστού βρόχου, επιθυμούμε να ελέγξουμε αυτόματα την έξοδο του συστήματος σε μια επιθυμητή τιμή (όσο πιο κοντά στην τιμή αυτή γίνεται)
- Όταν η επιθυμητή είσοδος ελέγχου είναι σταθερή, τότε η διαφορά μεταξύ της επιθυμητής τιμής και της μεταβλητής εξόδου ονομάζεται *σφάλμα σταθεροποίησης*.
- Η τιμή μόνιμης κατάστασης ενός χρονικώς μεταβαλλόμενου σήματος $x(t)$, δηλαδή η τιμή του σήματος όταν τα μεταβατικά φαινόμενα έχουν ολοκληρωθεί, ορίζεται από το θεώρημα τελικής τιμής (final value theorem):

$$x_{ss} = \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Σύστημα κλειστού βρόχου



- $C(s)$: σήμα εξόδου (ελεγχόμενο σήμα)
- $R(s)$: επιθυμητό σήμα
- $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$: σήμα σφάλματος
- $G(s)$: συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου
- $H(s)$: συνάρτηση μεταφοράς ανατροφοδότησης

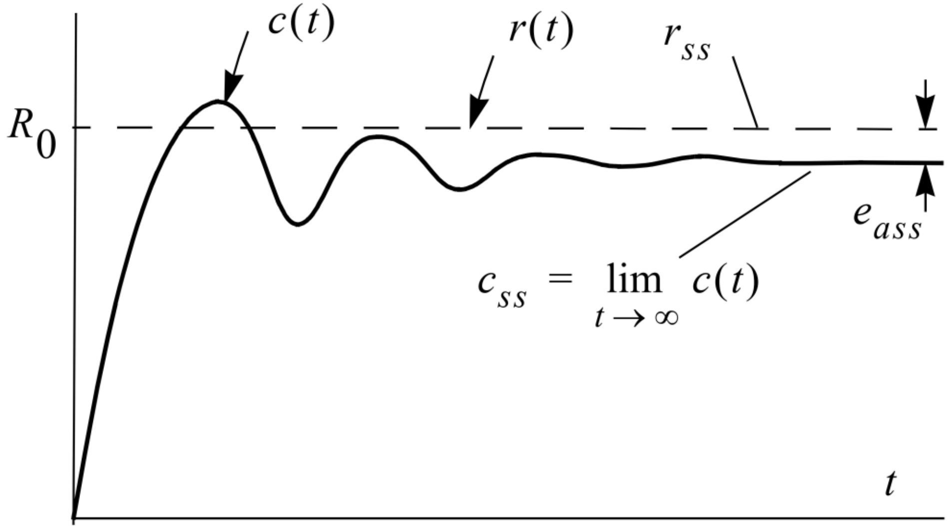
$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Σφάλμα μόνιμης κατάστασης για βηματική είσοδο

- Στη μόνιμη κατάσταση, για μια αλλαγή του επιθυμητού σήματος $r(t)$, η μόνιμη τιμή της εξόδου c_{ss} μπορεί να μην είναι ίση με τη σταθερή επιθυμητή τιμή r_{ss}
- Σφάλμα μόνιμης κατάστασης:

$$e_{ass} = r_{ss} - c_{ss} = \lim_{s \to 0} s \left[\frac{R_0}{s} - W(s) \frac{R_0}{s} \right], \text{ όπου } C(s) = W(s)R(s)$$

$$e_{ass} = \lim_{s \to 0} R_0 [1 - W(s)]$$



Συνάρτηση ανοικτού βρόχου χωρίς ολοκληρωτή και $H(s) = 1$

- Έστω

$$G(s) = \frac{K(1 + sT_{b1})(1 + sT_{b2}) \dots}{(1 + sT_{a1})(1 + C_{a1}s + C_{a2}s^2) \dots}$$

- Στη μόνιμη κατάσταση

$$G(s) \to K \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \quad s \to 0$$

- Το K ονομάζεται *στατικό κέρδος (static gain)*
- Άρα το σφάλμα μόνιμης κατάστασης είναι

$$e_{ass} = R_0 \frac{1}{1 + K}$$

Συνάρτηση ανοικτού βρόχου με απλό ολοκληρωτή και $H(s) = 1$

- Έστω

$$G(s) = \frac{K}{s}\left(\frac{(1 + sT_{b1})(1 + sT_{b2})\ldots}{(1 + sT_{a1})(1 + C_{a1}s + C_{a2}s^2)\ldots}\right)$$

- Στη μόνιμη κατάσταση

$$G(s) \to \frac{K}{s} \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \quad s \to 0$$

- Άρα το σφάλμα μόνιμης κατάστασης είναι

$$e_{ass} = \lim_{s\to 0} R_0 \frac{1}{1 + \frac{K}{s}} = 0$$

Σφάλμα μόνιμης κατάστασης για είσοδο ράμπας

- Έστω ότι η είσοδος είναι ένα σήμα ράμπας $r(t) = R_0 t$

- Το σφάλμα μόνιμης κατάστασης είναι:

$$e_{fss} = \lim_{t\to\infty}[r(t) - c(t)] = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{R_0}{s^2} - W(s)\frac{R_0}{s^2}\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{R_0}{s}[1 - W(s)]$$

Συνάρτηση ανοικτού βρόχου χωρίς ολοκληρωτή και $H(s) = 1$

- Έστω

$$G(s) = \frac{K(1 + sT_{b1})(1 + sT_{b2}) \ldots}{(1 + sT_{a1})(1 + C_{a1}s + C_{a2}s^2) \ldots}$$

- Στη μόνιμη κατάσταση

$$G(s) \to K \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \quad s \to 0$$

- Άρα το σφάλμα μόνιμης κατάστασης είναι

$$e_{fss} = \lim_{s \to 0} \frac{R_0}{s + sK} \to \infty$$

Συνάρτηση ανοικτού βρόχου με απλό ολοκληρωτή και $H(s) = 1$

- Έστω

$$G(s) = \frac{K}{s}\left(\frac{(1 + sT_{b1})(1 + sT_{b2}) \dots}{(1 + sT_{a1})(1 + C_{a1}s + C_{a2}s^2) \dots}\right)$$

- Στη μόνιμη κατάσταση

$$G(s) \to \frac{K}{s} \quad καθώς \quad s \to 0$$

- Άρα το σφάλμα μόνιμης κατάστασης είναι

$$e_{fss} = \lim_{s\to 0} \frac{R_0}{s} \frac{1}{1 + \frac{K}{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{R_0}{s + K} = \frac{R_0}{K}$$